TRAITÉ DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

G. CAGNAC
E. RAMIS
J. COMMEAU



MASSON & Cie

TRAITÉ

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

G. CAGNAC
Inspecteur général de l'Instruction Publique.

E. RAMIS
Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Louis-le-Grand.

J. COMMEAU
Professeur de Mathématiques Supérieures
au Lycée Kléber, à Strasbourg.

3

Géométrie

Classes Préparatoires et Enseignement Supérieur (1er cycle)

MASSON et Cie ÉDITEURS
1971

TRAITÉ
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

G. CAGNAC
Inspecteur général de l'Instruction publique.

E. RAMIS
Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Louis-le-Grand

J. COMMEAU
Professeur de Mathématiques Supérieures
au Lycée Kléber

1
Algèbre
Un volume in-8°, avec figures et exercices; broché.

2
Analyse
Un volume in-8°, avec figures et exercices; broché.

3
Géométrie
Un volume in-8°, avec figures et exercices; broché.

4
Applications de l'analyse à la géométrie
Un volume in-8°, avec figures et exercices; broché.

AVERTISSEMENT

C*E* « TRAITÉ DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES » *s'adresse, aux étudiants des classes préparatoires aux grandes Écoles et aux étudiants qui suivent la propédeutique M. P. en vue de l'acquisition du D. U. E. S.*

Pour chacune de ces deux catégories d'étudiants, l'ouvrage traite le programme des deux années d'études qui constituent le cycle complet, sans distinguer systématiquement ce qui relève de la première année; il va de soi que, dans ces conditions, les débutants devront adapter l'étude de l'ouvrage à la progression suivie par leur professeur.

Le tome I de notre Traité (Algèbre) *comprend essentiellement l'étude des structures algébriques, des polynômes, des fractions rationnelles et équations algébriques, enfin de l'algèbre linéaire.*

Le tome II (Analyse) *contient l'étude des fonctions réelles ou complexes d'une ou plusieurs variables réelles, et la partie théorique du programme de calcul différentiel et intégral.*

Le contenu du présent tome III sera détaillé ci-dessous.

Le tome IV (Applications de l'Analyse à la Géométrie) *contient d'une part des compléments d'Analyse (étude de fonctions vectorielles d'une variable réelle), d'autre part la géométrie différentielle, les intégrales multiples, les calculs de longueurs, aires, volumes, etc... et l'analyse vectorielle.*



Bien que nous l'ayons intitulé abréviativement « GÉOMÉTRIE », *ce tome III comprend deux parties fort distinctes.*

La première partie (Compléments d'Algèbre) *constituée par les chapitres I à X est une suite naturelle du tome I.*

Elle comprend essentiellement :

— une étude des formes quadratiques et hermitiennes, des espaces vectoriels euclidiens et hermitiens;

— une introduction axiomatique de la géométrie affine, de la géométrie projective et de la géométrie euclidienne.

Pour nous conformer, lorsqu'ils étaient convergents, aux vœux des directions de plusieurs grandes Écoles, nous avons été amenés à compléter notre exposé par l'introduction de notions nouvelles qui figureront vraisemblablement dans une prochaine rédaction des programmes des classes préparatoires. C'est ainsi que, pour donner un exemple, nous avons étendu la notion de groupe orthogonal au cas d'un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée, sur un corps commutatif quelconque, sans nous limiter au cas d'un espace euclidien.

*La seconde partie de ce tome III est consacrée à l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie. *Elle comprend :*

— une étude des questions traditionnelles de Géométrie : droites et plans, torseurs, courbes et surfaces usuelles étudiées d'un point de vue algébrique;

— une étude des coniques, conçue comme une illustration de la théorie des formes quadratiques.

***

Nous avons numéroté les paragraphes tome par tome, les renvois sont indiqués par référence au tome (en chiffres romains) et au paragraphe (en chiffres arabes); ceux d'entre eux qui ne sont pas précédés d'un chiffre romain sont relatifs au tome étudié.

Chaque paragraphe est divisé en sous-paragraphes par des numéros 1°, 2°, 3°, . . . ; chaque sous-paragraphe est divisé le cas échéant, par des lettres a), b) c)... *Nous espérons ainsi rendre service aux étudiants en marquant bien la séparation des idées.*

Les formules encadrées dans le texte sont d'un usage courant; il est indispensable, sinon de les savoir par cœur, du moins de pouvoir les retrouver très rapidement.

***

MM. Masson et Cie ainsi que leurs collaborateurs, ont consenti pour la mise à jour de notre ouvrage un effort dont nous sentons tout le prix; nous sommes heureux de les en remercier particulièrement.

LES AUTEURS.

N. B. Nous avons représenté les ensembles fondamentaux des naturels, entiers, rationnels, réels, complexes, par les lettres

N, Z, Q, R, C.

Pour éviter des confusions, en particulier si un texte appelle les lettres précédentes à recevoir une autre signification, on pourra représenter ces ensembles par les symboles

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$.

PREMIÈRE PARTIE

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

CHAPITRE PREMIER

FORMES QUADRATIQUES

Dans tout ce tome III, quand nous parlerons d'un corps K, *nous entendrons qu'il s'agit d'un corps commutatif, dont la caractéristique* (1) *n'est pas* 2.

I. DÉFINITION. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

1. ***Forme quadratique engendrée par une forme bilinéaire symétrique.*** — 1° Soit K un corps commutatif, E un espace vectoriel sur K, φ une forme bilinéaire symétrique sur E (I, **188** à **190** et **229**).

Rappelons que φ est une application de E × E dans K

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \in E \times E \xrightarrow{\varphi} \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) \in K,$$

qui vérifie les critères de linéarité séparément par rapport à $\vec{X}$ et par rapport à $\vec{Y}$, avec en outre $\varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = \varphi(\vec{X}, \vec{Y})$.

---

(1) Dans K, nous désignons par 0 et 1 les éléments neutres de l'addition et de la multiplication et par 2 l'élément $1 + 1$.

Nous supposons $2 \neq 0$, ce que nous exprimons en disant que K *n'admet pas la caractéristique* 2; il en résulte que 2 admet, dans la multiplication sur K, un inverse que nous désignons par $\frac{1}{2}$.

$\vec{X}$ étant un élément d'un espace vectoriel sur K (et en particulier de K) :

$$\vec{X} + \vec{X} = 1.\vec{X} + 1.\vec{X} = (1 + 1)\vec{X} = 2\vec{X}.$$

En particulier $2 + 2$ et 2.2 sont des éléments égaux de K; nous les désignons par 4. K étant un anneau d'intégrité, $2 \neq 0$ entraîne $2.2 \neq 0$; 4 admet, dans la multiplication sur K, un inverse que nous désignons par $\frac{1}{4}$.

DÉFINITION I. — **Soit E un espace vectoriel sur le corps K; on appelle forme quadratique engendrée par la forme bilinéaire symétrique φ l'application Φ de E dans K qui à tout vecteur $\vec{X}$ de E associe l'élément de K, noté $\Phi(\vec{X})$, déterminé par**

$$\Phi(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}, \vec{X}).$$

On dit que φ est la forme polaire de Φ.

2° **Égalités fondamentales.** — *a*) Nous avons, pour tout vecteur $\vec{X}$ de E et pour tout élément λ de K,

$$\varphi(\lambda\vec{X}, \lambda\vec{X}) = \lambda\varphi(\vec{X}, \lambda\vec{X}) = \lambda^2\varphi(\vec{X}, \vec{X}),$$

que nous écrivons

$$\boxed{\Phi(\lambda\vec{X}) = \lambda^2\Phi(\vec{X}).} \tag{1}$$

En particulier, $\Phi(-\vec{X}) = \Phi(\vec{X})$ et $\Phi(\vec{0}) = 0$.

b) Nous avons, pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de E × E,

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{X}+\vec{Y}, \vec{X}+\vec{Y}) &= \varphi(\vec{X}, \vec{X}+\vec{Y}) + \varphi(\vec{Y}, \vec{X}+\vec{Y}) \\ &= \varphi(\vec{X}, \vec{X}) + \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \varphi(\vec{Y}, \vec{X}) + \varphi(\vec{Y}, \vec{Y})\end{aligned}$$

ou
$$\Phi(\vec{X}+\vec{Y}) = \Phi(\vec{X}) + \Phi(\vec{Y}) + \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \varphi(\vec{Y}, \vec{X}),$$

ce qui, compte tenu de la symétrie de φ, s'écrit

$$\boxed{2\,\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{X}+\vec{Y}) - \Phi(\vec{X}) - \Phi(\vec{Y})} \tag{2}$$

En remplaçant $\vec{Y}$ par $-\vec{Y}$ dans (2), on obtient

$$-2\,\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{X}-\vec{Y}) - \Phi(\vec{X}) - \Phi(\vec{Y})$$

et, par soustraction, puis par addition,

$$\boxed{4\,\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{X}+\vec{Y}) - \Phi(\vec{X}-\vec{Y})} \tag{3}$$

et

$$\Phi(\vec{X}+\vec{Y}) + \Phi(\vec{X}-\vec{Y}) = 2\left[\Phi(\vec{X}) + \Phi(\vec{Y})\right] \tag{3'}$$

c) *Formule de Taylor.* — D'après la relation (2), on a, quels que soient les scalaires λ et μ de K

$$\Phi(\lambda\vec{X} + \mu\vec{Y}) = \Phi(\lambda\vec{X}) + 2\,\varphi(\lambda\vec{X}, \mu\vec{Y}) + \Phi(\mu\vec{Y}).$$

En tenant compte de (1) et de $\varphi(\lambda\vec{X}, \mu\vec{Y}) = \lambda\mu\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$, on en déduit

$$\boxed{\Phi(\lambda\vec{X} + \mu\vec{Y}) = \lambda^2\Phi(\vec{X}) + 2\lambda\mu\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \mu^2\Phi(\vec{Y})} \tag{4}$$

C'est la *formule de Taylor pour une forme quadratique.*

3° Définition II. — **Soit E un espace vectoriel sur le corps K. On dit qu'une application Φ de E dans K est une forme quadratique sur E si**

α) $$\forall \vec{X} \in E, \quad \forall \lambda \in K \qquad \Phi(\lambda\vec{X}) = \lambda^2\Phi(\vec{X}) \tag{1}$$

β) **l'application symétrique ψ de E × E dans K déterminée par**

$$\psi(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{2}\left[\Phi(\vec{X} + \vec{Y}) - \Phi(\vec{X}) - \Phi(\vec{Y})\right] \tag{5}$$

est une forme bilinéaire sur E.

4° **Equivalence des définitions I et II.** — *a*) Soit Φ la forme quadratique engendrée par la forme bilinéaire symétrique φ, au sens de la définition I. Φ est une application de E dans K qui vérifie (1), et aussi (5) à condition d'adopter $\psi = 2\varphi$; Φ est donc une forme quadratique au sens de II.

b) Inversement, soit Φ une forme quadratique au sens de II, à laquelle est associée la forme bilinéaire symétrique ψ. La caractéristique de K n'étant pas 2, l'application φ de E × E dans K déterminée par $\psi = 2\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique et on a, en faisant $\vec{Y} = \vec{X}$ dans (5),

$$2\varphi(\vec{X}, \vec{X}) = \Phi(2\vec{X}) - 2\Phi(\vec{X}).$$

Or, d'après (1) : $\Phi(2\vec{X}) = 4\Phi(\vec{X})$, d'où $\Phi(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}, \vec{X})$. Φ est ainsi la forme quadratique engendrée par φ, au sens de I.

Remarque I. — Dans la condition (β) de II, on peut adopter

$$\psi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{X} + \vec{Y}) - \Phi(\vec{X} - \vec{Y})$$

II est alors équivalente à I, à condition d'adopter $\psi = 4\varphi$.

Remarque II. — Contrairement à la définition I, la définition II reste utilisable dans le cas où le corps de base admet 2 pour caractéristique (hypothèse que nous ne rencontrerons pas dans la suite).

5° **Isomorphisme entre l'espace vectoriel des φ et celui des Φ.** — Il est aisé de munir d'une structure d'espace vectoriel sur K d'une part l'ensemble $(\mathcal{B})$ des formes bilinéaires symétriques (1) sur E, d'autre part l'ensemble $(\mathcal{Q})$ des formes quadratiques sur E. La bijection

$$\varphi \in (\mathcal{B}) \quad \longleftrightarrow \quad \Phi \in (\mathcal{Q})$$

(1) $(\mathcal{B})$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E (I, **187**, 2°).

obtenue en associant à φ la forme quadratique qu'elle engendre et à Φ sa forme polaire, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

6° **Exemple.** — Soit f une forme linéaire sur E (I, 184). L'application φ de $E \times E$ dans K définie par

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = f(\vec{X}) \times f(\vec{Y}) \qquad \text{(produit dans K)}$$

est une forme bilinéaire, symétrique; nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

Il en résulte que l'application Φ de E dans K définie par

$$\forall \vec{X}, \qquad \Phi(\vec{X}) = [f(\vec{X})]^2 \qquad \text{(carré dans K)}$$

est une forme quadratique, dont la forme polaire est φ.

Plus généralement, si $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont des formes linéaires sur E et si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des éléments quelconques de K, l'application Φ de E dans K définie par

$$\forall \vec{X}, \qquad \Phi(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i [f_i(\vec{X})]^2$$

est une forme quadratique, que nous écrirons $\Phi = \Sigma \lambda_i f_i$.

Le réciproque est une propriété capitale de la théorie des formes quadratiques; elle sera étudiée au n° 9.

2. *Représentation matricielle d'une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie. Rang.*

— Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, sur le corps K.

1° **Représentation matricielle.** — La base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_i\}$ de E ayant été choisie, soit

$a)$ Φ une forme quadratique quelconque sur E et φ la forme polaire de Φ,

$b)$ $\Omega = [\omega_{ij}]$ une matrice quelconque (n, n) sur K, symétrique.

Nous avons montré (I, 189, 2°) que les relations $\omega_{ij} = \varphi(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$ établissent une bijection entre φ et Ω et par suite entre Φ et Ω. On a, en désignant par X et Y les matrices unicolonnes des coordonnées de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ dans la base $\mathfrak{U}$,

$$(1) \qquad \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\Omega\,Y) \qquad \text{et} \qquad \Phi(\vec{X}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\Omega\,X).$$

2° **Rang.** — Quand on passe de la base $\mathfrak{U}$ de E à la base $\mathfrak{U}'$, par la matrice de passage P, on doit remplacer (I, 229) la matrice symétrique Ω qui représente la forme bilinéaire symétrique φ (et par suite la forme quadratique Φ) par la matrice $\Omega' = \tilde{P}\,\Omega\,P$.

Ω et Ω' admettent le même rang et leurs déterminants sont liés par

$$(2) \qquad \text{dét}\,\Omega' = (\text{dét}\,\Omega)\,(\text{dét}\,P)^2.$$

Bien entendu, Ω' est, elle aussi, symétrique, ce que l'on vérifie, d'ailleurs, en calculant

$$\tilde{\Omega}' = \tilde{P}\,\tilde{\Omega}\,P \qquad \text{ou} \qquad \tilde{P}\,\Omega\,P \qquad \text{ou} \qquad \Omega' \;(\text{puisque } \tilde{\Omega} = \Omega).$$

Nous sommes ainsi conduits à compléter de la façon suivante la définition donnée au n° 229, 4° du tome I :

DÉFINITION I. — **On appelle rang d'une forme quadratique Φ, sur un espace vectoriel E de dimension finie, le rang de la forme polaire φ de Φ, c'est-à-dire le rang commun r de toutes les matrices symétriques (congruentes) qui déterminent Φ et φ dans les diverses bases de E.**

On écrit

$$r = \text{rg}\,\varphi = \text{rg}\,\Phi.$$

DÉFINITION II. — **Les formes φ et Φ étant représentées dans la base $\mathcal{U}$ de E par la matrice Ω, on dit que** dét Ω **est le discriminant de φ et aussi de Φ.**

Le discriminant dépend de la base, ainsi que le montre la relation (2). Mais *le fait que le discriminant est nul ou non nul ne dépend pas de la base;* cette invariance interviendra au n° 11, 2°.

3. ***Polynômes associés à une forme bilinéaire symétrique et à une forme quadratique.*** — Nous supposons encore que E, espace vectoriel sur K, est de dimension finie n.

1° Polynôme bilinéaire symétrique. — La forme bilinéaire symétrique φ donne de l'élément $(\vec{X}, \vec{Y})$ de E × E une image dans K, $\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$, qui s'écrit (I, 188, 1°) dans la base $\mathcal{U}$ de E,

$$(1) \qquad \sum_{i,j} x_i \omega_{ij} y_j,$$

la sommation étant étendue à tous les couples rangés d'indices (i, j), égaux ou non, pris dans l'ensemble $(1, 2, \ldots, n)$.

A deux indices inégaux sont associés deux termes de la somme, $x_i\omega_{ij}y_j$ et $x_j\omega_{ji}y_i$ qu'il est possible de rassembler, puisque $\omega_{ji} = \omega_{ij}$. L'élément $\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$ de K s'écrit donc

$$(2) \qquad \sum_i \omega_{ii} x_i y_i + \sum_{i<j} \omega_{ij}(x_i y_j + x_j y_i).$$

Changeant de point de vue, nous pouvons considérer (1) et (2) comme des expressions d'un polynôme sur K, aux $2n$ indéterminées $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$; ce polynôme est du premier degré et homogène par rapport aux indéterminées x_i et également par rapport aux indéterminées y_j; nous le noterons $f\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix}$ et nous dirons que f est le polynôme bilinéaire symétrique associé à la forme bilinéaire symétrique φ.

2° **Polynôme quadratique.** — La forme quadratique Φ donne de l'élément $\vec{X}$ de E une image dans K, $\Phi(\vec{X})$, qui s'écrit dans la base $\mathfrak{U}$ de E,

$$\sum_i \omega_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} \omega_{ij} x_i x_j. \tag{3}$$

Nous pouvons considérer (3) comme une expression d'un polynôme sur K, aux n indéterminées $x_1, \ldots, x_n$; ce polynôme est du second degré et homogène; nous le noterons $F(x_1, \ldots, x_n)$ et nous dirons que F est le *polynôme quadratique* associé à la forme quadratique Φ.

Inversement, si la base $\mathfrak{U}$ est donnée, la connaissance du polynôme f (resp. F) détermine sans ambiguïté la forme φ (resp. Φ).

En résumé, une fois choisie une base $\mathfrak{U}$ de E, nous disposons des deux correspondances biunivoques

φ (forme bilinéaire symétrique sur E) $\leftrightarrow$ f (polynôme bilinéaire symétrique sur K)

Φ (forme quadratique sur E) $\leftrightarrow$ F (polynôme quadratique sur K),

ces correspondances respectent d'une part l'addition, d'autre part la multiplication par un élément de K, ce sont donc des isomorphismes d'espaces vectoriels sur K.

3° **Règle de dédoublement des termes.** — On passe de l'expression du polynôme quadratique

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i \omega_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} \omega_{ij} x_i x_j \tag{3}$$

à celle du polynôme bilinéaire symétrique $f\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_n \\ y_1, & \ldots, & y_n \end{pmatrix}$ (2)

par la *règle de dédoublement des termes* :

$$x_i^2 \longrightarrow x_i y_i ; \qquad 2\, x_i x_j \longrightarrow x_i y_j + x_j y_i$$

f est appelé le *polynôme polaire* du polynôme quadratique F. D'après le 2, 1°, f se met sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\text{dét}\left(\tilde{X}\, \Omega\, Y\right) \qquad \text{et} \qquad \text{dét}\left(\tilde{Y}\, \Omega\, X\right)$$

à cause de la symétrie de la matrice Ω. D'autre part les termes en x_i de F ont pour somme

$$2\, \omega_{i1} x_1 x_i + 2\, \omega_{i2} x_2 x_i + \ldots + \omega_{ii} x_i^2 + \ldots + 2\, \omega_{in} x_n x_i$$

en sorte que $\frac{1}{2} F'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega_{i1} x_1 + \omega_{i2} x_2 + \ldots + \omega_{in} x_n$

Alors :
$$\Omega X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F'_{x_1} \\ \vdots \\ F'_{x_n} \end{bmatrix}$$

et finalement :

$$2f\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_n \\ y_1, & \ldots, & y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i F'_x (y_1, \ldots, y_n)$$

En abrégé, nous écrirons : $2f = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial y_i}$

et $$2F = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

II. CLASSIFICATION DES FORMES QUADRATIQUES

E désigne ici un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie) sur le corps K, Φ une forme quadratique sur E, φ la forme polaire de Φ.

4. ***Vecteurs singuliers (ou isotropes). Formes définies.*** — DÉFINITION I. — **Un vecteur $\vec{\sigma}$ de l'espace vectoriel** E **est dit singulier** (ou **isotrope**), **relativement à la forme quadratique Φ, si** $\Phi(\vec{\sigma}) = 0$.

Dans cet ouvrage, nous utiliserons « singulier » et réserverons « isotrope » à un cas particulier (n° 106).

Le vecteur nul de E, $\vec{0}$, est singulier relativement à toute forme quadratique sur E, ainsi qu'on l'a constaté en faisant $\lambda = 0$ dans la relation

$$\Phi(\lambda\vec{X}) = \lambda^2\Phi(\vec{X}).$$

DÉFINITION II. — **Une forme quadratique est dite définie si elle n'admet pas d'autre vecteur singulier que le vecteur nul;** dans le cas contraire la forme est dite *singulière.*

Φ est définie :	$\Phi(\vec{X}) = 0$	$\Longleftrightarrow \vec{X} = \vec{0}$
Φ est singulière : $\exists\, \vec{X} \neq \vec{0}$	tel que	$\Phi(\vec{X}) = 0$

EXEMPLES. — Soit F le polynôme quadratique

$$F = x^2 + y^2.$$

a) Sur l'espace vectoriel R^2, rapporté à la base $\vec{u}(1, 0)$, $\vec{v}(0, 1)$, soit Φ la forme quadratique associée à F.

$$\vec{X} = x\vec{u} + y\vec{v} \longrightarrow \Phi(\vec{X}) = x^2 + y^2, \quad x, y \in R.$$

Ce scalaire, réel, ne peut être nul que si $x = 0$, $y = 0$; la forme Φ est définie.

b) Sur l'espace vectoriel C^2, rapporté à la même base, soit Φ_1, la forme quadratique associée à F;

$$\Phi_1(\vec{X}) = x^2 + y^2, \qquad x, y \in C.$$

Ici, par exemple, le vecteur $(1, i)$ est singulier; la forme Φ est alors singulière.

c) Sur l'espace vectoriel R^3, rapporté à la base $\vec{u}(1, 0, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 0)$, $\vec{w}(0, 0, 1)$, soit Φ_2 la forme quadratique associée à F :

$$\vec{X} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \xrightarrow{\ \theta\ } \Phi_2(\vec{X}) = x^2 + y^2, \quad x, y, z \in R.$$

Les vecteurs colinéaires à $\vec{w}$, de composantes 0, 0, k ($k \in$ R) sont singuliers; la forme Φ_2 n'est pas définie.

d) On voit ainsi qu'un même polynôme quadratique peut donner lieu à des formes quadratiques définies ou non suivant la nature du corps de base, et suivant la nature de l'espace vectoriel sur lequel agit la forme quadratique. Nous reprendrons cette étude au n° 10, 2°.

5. *Vecteurs conjugués (ou orthogonaux)*. — 1° Définition. — **Les deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de l'espace vectoriel E sont dits conjugués (ou orthogonaux) relativement à la forme bilinéaire symétrique φ si $\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$.**

On dit aussi que $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont conjugués relativement à la forme quadratique Φ engendrée par φ. Cette relation est symétrique puisque φ est symétrique. On dit plus simplement que « $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont conjugués » lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre. On dit aussi que $\vec{X}$ (resp. $\vec{Y}$) est conjugué de $\vec{Y}$ (resp. $\vec{X}$).

Dans cet ouvrage nous utiliserons en général « conjugués » et réserverons « orthogonaux » au cas où φ est un produit scalaire euclidien (n° 17) ou hermitien (n° 37).

2° **Conséquences de la définition.** — a) *Le vecteur nul $\vec{0}$ est conjugué de tout vecteur $\vec{A}$ de* E; en effet, en faisant $\lambda = 0$ dans la relation

$$\varphi(\lambda\vec{X}, \vec{A}) = \lambda\varphi(\vec{X}, \vec{A}), \qquad \text{on obtient} \qquad \varphi(\vec{0}, \vec{A}) = 0.$$

b) *Un vecteur est singulier* (ou *isotrope*) *si, et seulement si, il est conjugué de lui-même.* En effet $\Phi(\vec{A}) = 0$ n'est autre que $\varphi(\vec{A}, \vec{A}) = 0$.

c) *Deux vecteurs quelconques sont conjugués relativement à la forme nulle*

3° **Sous-espace conjugué d'un sous-espace vectoriel de E.** —

a) Théorème I et définition. - **L'ensemble $\bar{E}$ des vecteurs conjugués d'un vecteur donné $\vec{A}$, relativement à la forme bilinéaire symétrique φ, est un sous-espace vectoriel de E; on dit que $\bar{E}$ est le sous-espace conjugué de $\vec{A}$ (ou que $\bar{E}$ est le sous-espace orthogonal à $\vec{A}$).**

$\bar{E}$ n'est pas vide puisqu'il contient au moins le vecteur $\vec{0}$.

Soient alors $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ deux éléments quelconques de $\bar{E}$, λ un élément quelconque de K. Par hypothèse, $\varphi(\vec{X}, \vec{A}) = 0$, $\varphi(\vec{Y}, \vec{A}) = 0$.

Les propriétés de φ entraînent alors

$$\varphi\left(\lambda \vec{X} + \vec{Y}, \vec{A}\right) = \lambda\, \varphi\left(\vec{X}, \vec{A}\right) + \varphi\left(\vec{Y}, \vec{A}\right) = 0;$$

par suite $\lambda \vec{X} + \vec{Y}$ est un vecteur de $\overline{E}$, qui est ainsi un sous-espace vectoriel de E.

b) Soit E′ un sous-espace vectoriel de E; à chaque vecteur $\vec{A}$ de E′ est associé un sous-espace vectoriel $\overline{E}$ conjugué de $\vec{A}$ (cf. 1°). L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels $\overline{E}$ est encore un sous-espace vectoriel E″ de E; nous énoncerons :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **L'ensemble E″ des vecteurs conjugués de tous les vecteurs d'un sous-espace vectoriel E′ de E, est un sous-espace vectoriel de E; on dit que E″ est le sous-espace conjugué de E′.**

c) THÉORÈME II. — **Si un vecteur $\vec{V}$ de E est conjugué de tous les vecteurs d'une partie $\mathcal{A}$ de E, relativement à la forme bilinéaire symétrique φ, $\vec{V}$ est conjugué de tout vecteur du sous-espace vectoriel E′ qui est engendré par $\mathcal{A}$.**

Rappelons (I, n° 151) que E′ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{A}$; tout élément de E′ s'écrit

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{A}_i, \qquad \vec{A}_i \in \mathcal{A}.$$

Alors
$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{V}\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, \varphi\left(\vec{A}_i, \vec{V}\right).$$

L'hypothèse entraîne $\varphi\left(\vec{A}_i, \vec{V}\right) = 0$, et par suite $\varphi\left(\vec{X}, \vec{V}\right) = 0$.

COROLLAIRE. — Considérons dans E un sous-espace vectoriel E′ de dimension finie; E′ est engendré par une quelconque de ses bases. Par suite, *si un vecteur $\vec{V}$ de E est conjugué des vecteurs d'une base de E′, $\vec{V}$ est conjugué de tous les vecteurs de E′.*

Il en résulte que pour trouver le sous-espace conjugué de E′, il suffira de chercher les vecteurs qui sont conjugués de tous les vecteurs d'une base de E′.

d) Les sous-espaces E′ et E″ ne jouent pas en général des rôles symétriques :
— Partons d'un sous-espace vectoriel E′ de E, et soit E″ le sous-espace vectoriel conjugué; soit E‴ le sous-espace conjugué de E″.

Tout vecteur de E′ est conjugué de tout vecteur de E″, il appartient donc à E‴; on a ainsi $E' \subseteq E'''$ sans que nécessairement $E' = E'''$.

Cette question sera reprise au n° 19 dans le cas particulier des espaces vectoriels euclidiens.

6. *Vecteurs doubles. Noyau. Formes non dégénérées.* — 1° DÉFINITION I. — **Soit E un espace vectoriel sur le corps K. On appelle noyau de la forme bilinéaire symétrique φ sur E, et de la forme quadratique Φ engendrée par φ, le sous-espace conjugué de E.**

Le noyau est l'ensemble S des vecteurs de E qui sont conjugués de tout vecteur de E; un élément $\vec{s}$ du noyau est dit *vecteur double* pour φ et pour Φ.

Autrement dit :

$$(1) \qquad \vec{s} \in S \iff \forall \vec{X} \in E, \quad \varphi\left(\vec{X}, \vec{s}\right) = 0.$$

Comme tout sous-espace vectoriel de E, S contient $\vec{0}$.

Notons que le sous-espace conjugué E″ d'un sous-espace quelconque E′ de E contient S.

En effet

$$\vec{s} \in S \implies \forall \vec{X} \in E', \varphi\left(\vec{X}, \vec{s}\right) = 0 \implies \vec{s} \in E''. \text{ Donc } S \subset E''.$$

DÉFINITION II. — **On dit d'une forme bilinéaire symétrique ou d'une forme quadratique qu'elle est « non dégénérée » quand son noyau se réduit au vecteur nul.** Dans le cas contraire, la forme est dite ***dégénérée.***

Φ est dégénérée :	$\exists \vec{s} \neq \vec{0}$ tel que,	$\forall \vec{X} \in E, \quad \varphi\left(\vec{X}, \vec{s}\right) = 0$
Φ est non dégénérée :		$\forall \vec{X} \in E, \quad \varphi\left(\vec{X}, \vec{s}\right) = 0 \implies \vec{s} = \vec{0}$

2° **Comparaison des formes quadratiques définies et des formes quadratiques dégénérées.** — *a*) Un vecteur double est conjugué de tout vecteur de E et, en particulier, de lui-même; par conséquent *tout vecteur double est singulier.*

b) Une forme quadratique définie, qui n'admet pas de vecteur singulier non nul, ne peut admettre de vecteur double non nul; son noyau se réduit au vecteur $\vec{0}$. En conséquence *une forme quadratique définie est non dégénérée.* Il en résulte qu'une forme dégénérée n'est pas définie.

c) Les réciproques des propriétés *a* et *b*) ne sont pas vraies, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE. — Sur R^2 rapporté à la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$, soit Φ la forme quadratique associée au polynôme $F(x, y) = 2\,xy$. La condition de conjugaison des vecteurs (x, y) et (x', y') est $xy' + x'y = 0$; cette condition est vérifiée quels que soient x' et y' si, et seulement si, $x = y = 0$. Le noyau de la forme Φ se réduit à $\vec{0}$; la forme est non dégénérée et pourtant elle n'est pas définie, puisqu'elle admet $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour vecteurs singuliers (mais non doubles).

7. ***Forme bilinéaire et formes linéaires associées.*** — **1° Définitions.** — Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps commutatif K, et φ une application bilinéaire de $E \times F$ dans K.

$$\vec{Y} \in F \text{ étant fixé : } \vec{X} \in E \overset{y}{\longrightarrow} \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) \in K \text{ détermine } y \in E^*$$

$$\vec{X} \in E \text{ étant fixé : } \vec{Y} \in F \overset{x'}{\longrightarrow} \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) \in K \text{ détermine } x' \in F^*$$

En d'autres termes $y(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}, \vec{Y})$, $x'(\vec{Y}) = \varphi(\vec{X}, \vec{Y})$.

En écrivant $y = \delta(\vec{Y})$, on détermine une application δ de F dans E^* en écrivant $x' = \gamma(\vec{X})$, on détermine une application γ de E dans F^*.

Démontrons — par exemple pour δ — qu'il s'agit d'applications linéaires. Étant donné $(\lambda, \vec{Y}, \vec{Z}) \in K \times F \times F$, l'image par δ du vecteur $\lambda\vec{Y} + \vec{Z}$ de F est la forme linéaire sur E qui, au vecteur générique $\vec{X}$ de E associe le scalaire

$$\varphi(\vec{X}, \lambda\vec{Y} + \vec{Z}) \quad \text{ou} \quad \lambda\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \varphi(\vec{X}, \vec{Z}).$$

On en déduit $\delta(\lambda\vec{Y} + \vec{Z}) = \lambda\delta(\vec{Y}) + \delta(\vec{Z})$.

On dit que δ (resp. γ) est l'application linéaire associée à droite (resp. à gauche) à la forme bilinéaire φ.

Remarque. — Soit l l'application linéaire canonique de F dans son bidual F^{**} (I, n° 190). Au vecteur $\vec{Y} \in F$, associons $l(\vec{Y}) = \mathfrak{Y}$.

A tout élément $x' \in F^*$, $\mathfrak{Y}$ associe un élément de K qui est

$$\mathfrak{Y}(x') = x'(\vec{Y}) = \varphi(\vec{X}, \vec{Y}).$$

$\vec{X}$ étant l'élément générique de E, $\gamma(\vec{X}) = x'$ est un élément de F^* que $\mathfrak{Y}$ transforme en un élément de K qui est $\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$, c'est-à-dire $y(\vec{X})$, transformé de $\vec{X}$ par $y = \delta(\vec{Y})$; en d'autres termes

$$\mathfrak{Y}\left[\gamma(\vec{X})\right] = \left(\delta(\vec{Y})\right)(\vec{X}) \quad \text{ou} \quad \forall \vec{Y} \in F, \quad \delta(\vec{Y}) = \mathfrak{Y} \circ \gamma. \quad (1)$$

2° **Nouvelle introduction du rang d'une forme bilinéaire.** — Limitons-nous au cas où $\dim E = n$, $\dim F = p$; l est alors un isomorphisme de F sur F^{**} et l'on peut écrire (1) sous la forme :

$$\forall \mathfrak{Y} \in F^{**}, \qquad (\delta \circ l^{-1})(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{Y} \circ \gamma.$$

L'application $\delta \circ l^{-1}$ de F^{**} dans E^* n'est autre (I, n° 186, 1°) que la transposée $\tilde{\gamma}$ de l'application γ de E dans F^*; autrement dit $\delta = \tilde{\gamma} \circ l$. Comme l est bijectif, δ et $\tilde{\gamma}$ — et par suite δ et γ — ont le même rang, ce qui autorise à poser :

Définition. — **On appelle rang de la forme bilinéaire φ le rang commun aux applications linéaires associées δ et γ.**

Le calcul suivant montre qu'il s'agit du rang **défini** au n° **229** du tome I. Soit Ω la matrice (n, p) qui représente φ dans les bases $\mathcal{U}$ de E et $\mathcal{V}$ de F. La j-ième colonne de la matrice A qui représente δ dans les bases $\mathcal{V}$ de F et $\mathcal{U}^*$ de E^* est formée des coordonnées dans $\mathcal{U}^*$ de l'élément $\delta\left(\vec{v_j}\right)$ de E^*, lequel est déterminé par

$$\sum_i x_i \vec{u_i} \longrightarrow \varphi\left(\sum_i x_i \vec{u_i}, \vec{v_j}\right) \quad \text{ou} \quad \sum_i x_i\, \omega_{ij}.$$

Les coordonnées de $\delta\left(\vec{v_j}\right)$ dans $\mathcal{U}^*$ sont donc

$$\omega_{1j}, \ldots, \omega_{nj}; \qquad \text{par suite} \qquad A = \Omega.$$

On montrerait de même que la matrice qui représente γ dans les bases $\mathcal{U}$ de E et $\mathcal{V}^*$ de F^* est $\tilde{\Omega}$.

3° **Cas d'une forme bilinéaire sur** E. — Ici $F = E$; δ et γ sont les applications linéaires de E dans E^* qui à l'élément générique de E, noté $\vec{Y}$, associent les formes linéaires y et y' sur E telles que

$$\left(\forall \vec{X} \in E\right) \qquad y\left(\vec{X}\right) = \varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right), \qquad y'\left(\vec{X}\right) = \varphi\left(\vec{Y}, \vec{X}\right)$$

δ et γ sont égales si, et seulement si, φ est symétrique.

Dans le cas où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, nous avons appelé noyau de φ l'ensemble S des vecteurs $\vec{s}$ de E tels que

$$\left(\forall \vec{X} \in E\right) \qquad \varphi\left(\vec{X}, \vec{s}\right) = 0$$

ce qui signifie que $\delta\left(\vec{s}\right)$ est la forme nulle de E^*. En d'autres termes, la définition I du n° **6** équivaut à la suivante : **Le noyau de φ est le noyau des applications linéaires égales δ et γ.**

D'autre part la définition II du n° **6** équivaut à la suivante : **l'application bilinéaire symétrique φ est dite « non dégénérée » quand les applications linéaires égales δ et γ sont injectives.**

III. ÉTUDE D'UNE FORME QUADRATIQUE SUR UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

Dans tout ce sous-chapitre il ne sera question que d'espaces vectoriels de dimension finie.

8. ***Changement de base simultané dans un espace vectoriel et dans son dual.*** — Nous introduirons plus bas les formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n; elles constituent l'espace dual E^*, ce qui nous amènera à changer de base simultanément dans E et dans E^* Soient $\mathcal{E} = \left\{\vec{e_i}\right\}$ et $\mathcal{E}' = \left\{\vec{e_j}\right\}$ deux bases de E et soit $P = [p_{ij}]$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à

$\mathcal{E}'$ (I, n° 224). On a :

$$(1) \qquad \vec{e}'_j = \vec{e}_1 p_{1j} + \ldots + \vec{e}_n p_{nj}.$$

La base $\mathcal{E}^*$ de E*, duale de $\mathcal{E}$, comprend les formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que $\varphi_k(\vec{e}_i) = \delta_{ki}$ (notation de Kronecker, tome I, n° 185, 3°).

A la base $\mathcal{E}'$ de E est attachée la base $\mathcal{E}'^*$ de E*, duale de $\mathcal{E}'$, et dont les éléments sont les formes linéaires $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n$ telles que $\varphi'_k(\vec{e}'_i) = \delta_{ki}$. La matrice de passage de $\mathcal{E}^*$ à $\mathcal{E}'^*$ est

$$\mathcal{R} = \overset{\varphi_l}{\overline{[\rho_{jl}]}}\,\big|\,\varphi'_j$$

les coordonnées de φ'_j dans $\mathcal{E}^*$ sont placées sur la j-ième ligne de $\mathcal{R}$, puisque nous écrivons en ligne les coordonnées d'une forme linéaire sur E.

$$\begin{bmatrix} \varphi'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi'_n \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{bmatrix} \qquad (2) \qquad \varphi'_j = \rho_{j1}\varphi_1 + \ldots + \rho_{jn}\varphi_n.$$

$$\varphi'_j(\vec{e}_k) = \sum_{l=1}^{n} \rho_{jl}\varphi_l(\vec{e}_k) \qquad \text{ou} \qquad \rho_{jk}.$$

Les vecteurs $\vec{e}_i$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}'_j$:

$$[\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n] = [\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n] \times \mathrm{P} \implies [\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n] = [\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n] \times \mathrm{P}^{-1},$$

ou encore, avec $\mathrm{P}^{-1} = [p'_{ij}]$, $\quad \vec{e}_k = \vec{e}'_1 p'_{1k} + \ldots + \vec{e}'_n p'_{nk}$ (3)

Par suite $\quad \varphi'_j(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} \varphi'_j(\vec{e}'_i)\, p'_{ik} \qquad$ ou $\qquad p'_{jk}$.

Finalement: $\quad p'_{jk} = \rho_{jk} \qquad$ et $\qquad \mathcal{R} = \mathrm{P}^{-1}$.

En résumé,

THÉORÈME. — **Au cours d'un changement de base simultané dans E et son dual E*, les matrices de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$, et de la base $\mathcal{E}^*$ à la base $\mathcal{E}'^*$, sont deux matrices inverses.**

Le lecteur n'oubliera pas que, ayant écrit en colonne les coordonnées d'un élément de E, il doit écrire en ligne les coordonnées d'un élément de l'espace dual E*.

AUTRE DÉMONSTRATION. — D'après (1), P est la matrice qui représente l'identité $\mathfrak{J}$ de E quand E est rapporté, au titre d'espace-objet à $\mathcal{E}'$, au titre d'espace-image à $\mathcal{E}$. Étant donné (I, 186, 1°) que l'application transposée de $\mathfrak{J}$ est l'identité $\mathfrak{J}^*$ de E*, on peut affirmer que P représente $\mathfrak{J}^*$ quand E* est rapporté, au titre d'espace-objet à $\mathcal{E}^*$, au titre d'espace-

image à $\mathcal{E}'^*$. Il en résulte que P est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}'^*$ de E^* à la base $\mathcal{E}^*$, ou que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{E}^*$ à $\mathcal{E}'^*$.

COROLLAIRE. — Soit $f_1, \ldots, f_n$, n formes linéaires indépendantes sur E, définies par rapport à une base $\mathcal{E}^*$ de E^*; on peut les prendre pour base de E^*, soit $\mathcal{U}^*$ cette base.

Si Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}^*$ à la base $\mathcal{U}^*$ dans E^*, la matrice inverse Q^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ de E (dont $\mathcal{E}^*$ est duale) à une base $\mathcal{U}$ de E (dont $\mathcal{U}^*$ est duale).

En d'autres termes, *étant donné n formes linéaires indépendantes sur* E, *il existe une base* $\mathcal{U}$ *de* E, et une seule, *telle que les formes données constituent la base duale de* $\mathcal{U}$.

9. *Existence d'une base formée de vecteurs conjugués relativement à une forme quadratique.* — 1° THÉORÈME. — **Étant donnés la forme quadratique Φ sur l'espace vectoriel E et un sous-espace E′ de E, de dimension finie, on peut trouver au moins une base de E′ formée de vecteurs deux à deux conjugués relativement à Φ.**

Dans la mesure où, au lieu de *vecteurs conjugués*, on utilise *vecteurs orthogonaux*, il est légitime de qualifier une telle base d'*orthogonale*.

Nous démontrerons cette proposition par récurrence sur la dimension.

I. — Avant d'« amorcer » cette récurrence nous allons prouver que si le théorème est vrai pour tout sous-espace de dimension $p-1$, il l'est encore pour tout sous-espace E′ de dimension p. Examinons deux cas :

a) ou bien la restriction de Φ à E′ est la forme nulle sur E′; alors deux vecteurs quelconques de E′ sont conjugués et toute base de E′ répond à la question;

b) ou bien la restriction de Φ à E′ n'est pas la forme nulle sur E′; alors il existe au moins un vecteur $\vec{A} \neq \vec{0}$ de E′ tel que $\Phi(\vec{A}) \neq 0$.

Nous allons montrer que, à tout élément $\vec{X}$ de E, on peut ajouter, d'une façon et d'une seule, un vecteur proportionnel à $\vec{A}$ de manière à obtenir un vecteur conjugué de $\vec{A}$; en effet, en désignant par φ la forme polaire de Φ, la condition :

$$\varphi(\vec{X} + \lambda\vec{A}, \vec{A}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(\vec{X}, \vec{A}) + \lambda\Phi(\vec{A}) = 0$$

équivaut, compte tenu de $\Phi(\vec{A}) \neq 0$, à

$$\lambda = -\frac{\varphi(\vec{X}, \vec{A})}{\Phi(\vec{A})}.$$

Soit alors $\mathcal{U} = \left\{ \vec{A}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p \right\}$ l'une quelconque des bases de E′ dont $\vec{A}$ fait partie.

D'après ce qui précède on peut associer à chaque vecteur $\vec{u}_i$ de E′ ($i = 2, \ldots, p$) un vecteur conjugué de $\vec{A}$ relativement à Φ :

$$\vec{v}_i = \vec{u}_i + \lambda_i \vec{A}.$$

Le système $\mathcal{V} = \left\{ \vec{A}, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \right\}$ est représenté dans la base $\mathcal{U}$ par une matrice diagonale Λ dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

Nous avons dét $\Lambda = 1$; $\mathcal{V}$ est donc une base de E′.

Le vecteur $\vec{A}$ est conjugué du sous-espace E″ de E′ qui est engendré par le système libre $\left\{ \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \right\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, E″, dont la dimension est $p - 1$, admet une base $\left\{ \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p \right\}$ formée de vecteurs deux à deux conjugués qui d'ailleurs, comme tous les vecteurs de E″, sont conjugués de $\vec{A}$. Il en résulte que le système $\left\{ \vec{A}, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p \right\}$ est une base de E′ formée de vecteurs deux à deux conjugués.

II. — Amorçons maintenant la récurrence. La proposition n'a de sens que si $p \geqslant 2$. Or si $p = 2$, la démonstration du I reste valable successivement dans les hypothèses *a*), *b*), la base $\mathcal{V} = \left\{ \vec{A}, \vec{v}_2 \right\}$ répondant à la question.

2° **Espace vectoriel de dimension finie.** — Si l'espace vectoriel E est de dimension finie n, le théorème du 1° s'applique à E lui-même, considéré comme sous-espace vectoriel de E.

Dans un espace vectoriel E *de dimension finie n, il existe au moins une base* $\mathcal{E} = \left\{ \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \right\}$ *formée de vecteurs deux à deux conjugués relativement à une forme quadratique donnée* Φ (ou à la forme bilinéaire associée φ).

En d'autres termes, $(\forall i \neq j) \quad \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0.$

10. *Décomposition en carrés d'une forme quadratique.*

I. Étude théorique. — Soit Φ une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie n, et φ la forme polaire de Φ.

1° **Diagonalisation de la matrice représentative.** — Soit $\mathcal{E} = \left\{ \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \right\}$ une base de E, dont les vecteurs sont deux à deux conjugués relativement à φ et à Φ (n° 9).

La matrice qui représente les formes φ et Φ dans la base $\mathcal{E}$ est la matrice

diagonale Θ dont les éléments diagonaux sont les scalaires

$$\theta_i = \varphi(\vec{e_i}, \vec{e_i}) \quad \text{ou} \quad \Phi(\vec{e_i}).$$

Le rang r des formes φ et Φ, ou rang de la matrice Θ, n'est autre que le nombre des scalaires θ_i non nuls; en effectuant, s'il y a lieu, une substitution sur les vecteurs de $\mathcal{E}$, on peut supposer que ces scalaires sont $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Aux vecteurs $\vec{X} = \sum_1^n \vec{e_i}x_i$ et $\vec{Y} = \sum_1^n \vec{e_i}y_i$ les formes φ et Φ associent les éléments de K

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_1^r \theta_k\, x_k y_k; \quad \Phi(\vec{X}) = \sum_1^r \theta_k\, x_k^2.$$

Les vecteurs $\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n$ appartiennent au noyau de Φ; comme ils sont extraits de la base $\mathcal{E}$, ils sont indépendants et comme la dimension du noyau est $n - r$, ils forment une base de ce noyau. On peut alors compléter le résultat du n° 9, 2° de la façon suivante : *si Φ est de rang r, la base $\mathcal{E}$ possède $n - r$ vecteurs singuliers qui forment une base du noyau de Φ.*

Nous pouvons énoncer d'autre part (cf. n° 2, 2°) : *Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.*

2° **Base réduite.** — Les notations étant celles du 1°, à chaque $\vec{e_k}$, $k \in [1, r]$, on peut associer un vecteur $\vec{v_k}$ colinéaire, $\vec{v_k} = \alpha_k \vec{e_k}$, tel que $\Phi(\vec{v_k}) = 1$, si et seulement si on sait résoudre l'équation sur K, $\alpha_k^2 = (\theta_k)^{-1}$, ce qui est possible quand K est algébriquement clos. Posons alors : $\vec{v_j} = \vec{e_j}$, $j \in [r + 1, n]$. $\mathcal{V} = \{\vec{v_i}\}$ est une base, dite *réduite*, formée de vecteurs deux à deux conjugués, dans laquelle φ et Φ sont représentées par la matrice ci-contre :

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right]$$

Dans le cas où Φ est non dégénérée, il s'agit de la matrice-unité I_n

3° **Décomposition en carrés.** — THÉORÈME. — **Toute forme quadratique Φ sur un espace vectoriel E de dimension finie, peut s'exprimer comme une combinaison linéaire, à coefficients non nuls, des carrés de formes linéaires indépendantes. Dans toute décomposition de ce type, le nombre des formes linéaires est le rang r de Φ.**

I. *Existence d'une décomposition.* — Nous gardons les notations précédentes et nous désignons par f_i, $(i = 1, \ldots, r)$, la forme linéaire sur E qui associe au vecteur $\vec{X}$ de E le scalaire de K

$$f_i(\vec{X}) = x_i.$$

Nous avons l'égalité (entre éléments de K)

$$\forall \vec{X} \in E, \quad \Phi(\vec{X}) = \sum_1^r \theta_i \left[f_i(\vec{X})\right]^2,$$

ce qui équivaut à l'égalité entre formes quadratiques (I, 6°)

$$\Phi = \sum_{1}^{r} \theta_i f_i^2, \qquad \theta_i \neq 0.$$

Les r formes linéaires f_i sont indépendantes : en effet, dans l'espace dual E^* de E, elles font partie de la base $\mathcal{E}^*$, duale de la base $\mathcal{E}$ de E.

II. *Unicité du nombre des formes linéaires.* — Supposons que, par un autre procédé, nous ayons obtenu l'égalité entre formes quadratiques

$$\Phi = \sum_{1}^{q} \lambda_i g_i^2, \qquad \lambda_i \neq 0, \tag{2}$$

dans laquelle les g_i sont q formes linéaires sur E, indépendantes.

D'après le théorème de la base incomplète, il existe dans le dual E^* de E des formes $g_{q+1}, \ldots, g_n$ telles que $\mathcal{U}^* = \{ g_1, \ldots, g_q, g_{q+1}, \ldots, g_n \}$ soit une base de E^*.

Nous savons (n° 8) qu'il existe une base $\mathcal{U}$ de E et une seule, $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \}$, dont la base duale est $\mathcal{U}^*$.

Le vecteur générique de E étant écrit, dans la base $\mathcal{U}$, $\vec{X} = \sum_{1}^{n} \vec{u}_j . x_j$, on a

$$g_i(\vec{X}) = x_i \implies \Phi(\vec{X}) = \sum_{1}^{q} \lambda_i x_i^2,$$

ce qui montre que la forme quadratique Φ est représentée, dans la base $\mathcal{U}$, par la matrice diagonale qui admet pour éléments diagonaux

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_q, 0, \ldots, 0.$$

Le rang de cette matrice est q, ce qui exige $q = r$.

II. Méthode pratique (Gauss). — En considérant maintenant des polynômes et (non plus des formes), nous allons faire une étude qui fournit rapidement une décomposition en carrés.

Théorème. — **Tout polynôme quadratique à n indéterminées est une combinaison linéaire des carrés de $q \leqslant n$ polynômes linéaires indépendants, aux mêmes indéterminées.**

Raisonnons par récurrence sur le nombre des indéterminées.

I. La propriété est triviale dans le cas d'une indéterminée, ax_1^2 s'écrivant $a(x_1)^2$.

II. Étant donné l'entier naturel $n \geqslant 2$, admettons que tout polynôme quadratique dans lequel le nombre des indéterminées n'excède pas $n - 1$ possède la propriété. Soit F un polynôme quadratique, non nul, aux indéterminées $x_1, \ldots, x_n$.

Distinguons deux cas.

Premier cas : F *possède au moins un terme carré.*

En supposant, par exemple, que le coefficient de x_1^2 est $a \neq 0$, nous pouvons écrire :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = ax_1^2 + 2\,x_1\,B(x_2, \ldots, x_n) + C(x_2, \ldots, x_n),$$

B et C désignant respectivement des polynômes linéaire et quadratique aux $n - 1$ indéterminées $x_2, \ldots, x_n$. Il en résulte

$$F = a\left[x_1 + \frac{1}{a}B\right]^2 + \left(C - \frac{1}{a}B^2\right).$$

$C - \frac{1}{a}B^2$ est un polynôme quadratique aux $n - 1$ indéterminées $x_2, \ldots, x_n$; d'après l'hypothèse de récurrence, il est une combinaison linéaire de carrés de polynômes linéaires indépendants, dont le nombre, que nous désignons par $q - 1$, n'excède pas $n - 1$ $(q \leqslant n)$; soient $G_2, \ldots, G_q$ ces polynômes.

En leur adjoignant le polynôme $G_1 = x_1 + \frac{1}{a}B$, dans lequel figure, avec un coefficient non nul, l'indéterminée supplémentaire x_1, nous obtenons un système libre. Par suite

$$\begin{cases} F = a\,G_1^2 + \lambda_2\,G_2^2 + \ldots + \lambda_q\,G_q^2 & (q \leqslant n) \\ G_1, G_2, \ldots, G_q \text{ indépendants.} \end{cases}$$

Second cas : F *ne possède pas de terme carré.*

F possède alors au moins un terme rectangle, soit, par exemple, ax_1x_2, $a \neq 0$. Nous pouvons écrire :

$$F = ax_1x_2 + x_1B + x_2C + D,$$

B, C et D désignant deux polynômes linéaires et un polynôme quadratique aux $n - 2$ indéterminées $x_3, \ldots, x_n$. Il en résulte

$$F = \frac{1}{a}(ax_1 + C)(ax_2 + B) + \left(D - \frac{1}{a}BC\right).$$

$D - \frac{1}{a}BC$ est un polynôme quadratique aux $n - 2$ indéterminées $x_3, \ldots, x_n$; d'après l'hypothèse de récurrence, il est une combinaison linéaire de carrés de polynômes linéaires indépendants dont le nombre, que nous désignons par $q - 2$, n'excède pas $n - 2$ $(q \leqslant n)$; soient $G_3, \ldots, G_q$ ces polynômes.

En leur adjoignant les polynômes $ax_1 + C$ et $ax_2 + B$, dans chacun desquels figure, avec un coefficient non nul, une indéterminée supplémentaire (x_1 ou x_2) nous obtenons un système libre, dont nous déduisons un nouveau système libre en remplaçant $ax_1 + C$ et $ax_2 + B$ par leur demi-somme G_1 et leur demi-différence G_2. Nous avons

$$ax_1 + C = G_1 + G_2, \qquad ax_2 + B = G_1 - G_2 \qquad \text{et}$$

$$\begin{cases} F = \frac{1}{a}G_1^2 - \frac{1}{a}G_2^2 + \lambda_3\,G_3^2 + \ldots + \lambda_q\,G_q^2 & (q \leqslant n). \\ G_1, G_2, G_3, \ldots, G_q \text{ indépendants.} \end{cases}$$

Ce calcul est, naturellement, valable pour un polynôme quadratique à deux indéterminées, sans terme carré. Nous avons dans ce cas

$$F = ax_1x_2 = \frac{a}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2,$$

et les polynômes $x_1 + x_2$ et $x_1 - x_2$ sont indépendants.

La propriété se trouve ainsi démontrée pour tout polynôme.

Remarque. — D'après l'étude théorique du I nous pouvons affirmer que le nombre q des polynômes linéaires indépendants obtenus est égal au rang r de la forme quadratique associée au polynôme quadratique F.

Exemple I. — Soit Φ une forme quadratique sur l'espace vectoriel R^3; $\vec{V}(x, y, z)$. étant l'élément générique de R^3 rapporté à sa base canonique $\mathcal{E}$, supposons que Φ est donné par

$$\Phi\left(\vec{V}\right) = \lambda(-x + y + z)^2 + \mu(x - y + z)^2 + \nu(x + y - z)^2 \quad \lambda\mu\nu \neq 0.$$

Les formes linéaires attachées aux polynômes

$$(1) \qquad X = -x + y + z, \qquad Y = x - y + z, \qquad Z = x + y - z$$

sont indépendantes; prenons-les comme base $\mathcal{U}^*$ du dual de R^3; par rapport à la base $\mathcal{U}$ de R^3, dont $\mathcal{U}^*$ est la duale

$$\Phi\left(\vec{V}\right) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2.$$

La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{U}$, P, se calcule à partir de P^{-1}, qui est la matrice de passage de $\mathcal{E}^*$ à $\mathcal{U}^*$, elle-même fournie par (1), soit

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple II. — Soit Φ la forme quadratique sur l'espace vectoriel R^3 définie par

$$\Phi\left(\vec{V}\right) = (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2,$$

$\vec{V}(x, y, z)$ étant l'élément générique de R^3.

L'expression proposée comporte trois carrés, mais les formes linéaires attachées aux polynômes

$$X = y - z, \qquad Y = z - x, \qquad Z = x - y$$

ne sont pas indépendantes puisque la forme linéaire attachée au polynôme $X + Y + Z$ est la forme nulle.

On peut écrire

$$\Phi\left(\vec{V}\right) = X^2 + Y^2 + (X + Y)^2$$

ou $$2(X^2 + XY + Y^2)$$

ou enfin $$2\left(X + \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}Y^2.$$

Φ est une forme quadratique de rang 2.

11. *Relation entre le rang et le noyau.* — Nous limitant encore au cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie n, nous allons traiter quelques applications des expressions des formes φ et Φ obtenues au nº **10**, I, 1º, dans le cas où E est rapporté à une base $\mathcal{E}$ formée de vecteurs deux à deux conjugués. Nous reprenons les notations de ce nº **10**, I, 1º.

1º **Recherche des vecteurs doubles.** — Les vecteurs $\vec{X} = \sum_1^n \vec{e_i}.x_i$ et $\vec{s} = \sum_1^n \vec{e_i}.s_i$ sont conjugués si, et seulement si,

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{s}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum_1^r \theta_i x_i s_i = 0.$$

Il en résulte que $\vec{s}$ est vecteur double si, et seulement si, la relation précédente est vérifiée pour tout vecteur $\vec{X}$ de E c'est-à-dire si

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0,$$

ou encore si $\vec{s}$ appartient au sous-espace vectoriel de E qui est engendré par $\left\{ \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n \right\}$; ce sous-espace est le noyau S de E et, par suite, la dimension du noyau est $n - r$. Étant donné que r est le rang de φ et de Φ, nous avons la relation

$$\boxed{\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg} \Phi = \dim E - \dim S}$$

2º **Application à la classification.** — *a*) Une forme quadratique non dégénérée étant caractérisée (nº **6**) par $S = \left\{ \vec{0} \right\}$ nous avons :

Φ non dégénérée	$\Longleftrightarrow$	$\operatorname{rg} \Phi = \dim E$	$\Longleftrightarrow$	$\text{dét } \Omega \neq 0$
Φ dégénérée	$\Longleftrightarrow$	$\operatorname{rg} \Phi < \dim E$	$\Longleftrightarrow$	$\text{dét } \Omega = 0$

b) Une forme quadratique définie étant non dégénérée (sans que la réciproque soit vraie),

$$\operatorname{rg} \Phi = \dim E \iff \text{dét } \Omega \neq 0$$

est une condition nécessaire, *mais non suffisante*, pour que la forme quadratique Φ soit définie.

Alors que le fait qu'une forme quadratique soit dégénérée, ou non, tient uniquement au rang, le fait qu'une forme quadratique soit définie ou singulière, tient non seulement au rang, mais à des propriétés liées à la nature du corps de base, ainsi que le montrent les exemples étudiés au nº **4**.

12. *Complément dans le cas d'un espace vectoriel complexe.* — Pour simplifier, nous appellerons *espace vectoriel complexe* tout espace vectoriel sur le corps des complexes; une forme bilinéaire (resp. quadratique) sur un espace vectoriel complexe sera dite *complexe.*

1° Théorème. — **Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. La forme quadratique Φ, sur E, est le carré d'une forme linéaire non nulle si, et seulement si, le rang de Φ est un.**

a) Supposons que $\Phi = f^2$, f étant une forme linéaire non nulle; d'après la remarque finale du n° 10, $\mathrm{rg}\,\Phi = 1$.

b) Supposons que le rang de Φ est 1. D'après le n° 10, I, 1°, il existe une forme linéaire f_1 et un nombre complexe θ, tels que

$$\Phi = \theta_1 f_1^2 = (\omega_1 f_1)^2,$$

ω_1 étant l'une quelconque des racines carrées de θ_1 sur le corps C;
Φ est le carré de la forme linéaire $\omega_1 f_1$.

2° Théorème. — **Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. La forme quadratique Φ, sur E, est le produit de deux formes linéaires indépendantes si, et seulement si, le rang de Φ est deux.**

a) Supposons que Φ est le produit des formes linéaires indépendantes g_1 et g_2 :

$$\Phi = g_1 g_2 \implies \Phi = \frac{1}{4}(g_1 + g_2)^2 - \frac{1}{4}(g_1 - g_2)^2,$$

ce qui montre que Φ, est une combinaison linéaire des carrés des deux formes linéaires

$$f_1 = g_1 + g_2, \qquad f_2 = g_1 - g_2$$

qui sont indépendantes comme g_1 et g_2; d'après la remarque finale du n° 10, $\mathrm{rg}\,\Phi = 2$.

b) Supposons que le rang de Φ est 2. Il existe d'après le n° 10, I, 1° deux formes linéaires indépendantes f_1, f_2 et deux nombres complexes non nuls θ_1, θ_2 tels que

$$\Phi = \theta_1 f_1^2 + \theta_2 f_2^2.$$

Sur le corps C il existe des nombres complexes ω_1 et ω_2 tels que

$$\omega_1 = \theta_1, \qquad \omega_2^2 = -\theta_2;$$

alors $$\Phi = \omega_1^2 f_1^2 - \omega_2 f_2^2 = (\omega_1 f_1 + \omega_2 f_2)(\omega_1 f_1 - \omega_2 f_2);$$

Φ est le produit des formes linéaires

$$g_1 = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2, \qquad g_2 = \omega_1 f_1 - \omega_2 f_2,$$

qui sont indépendantes comme f_1 et f_2, car

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{vmatrix} = -2\omega_1\omega_2 \quad \text{n'est pas nul.}$$

Finalement $$\Phi = g_1 g_2.$$

IV. FORMES QUADRATIQUES SUR UN ESPACE VECTORIEL RÉEL

Dans ce sous-chapitre, le corps de base est celui des réels; pour simplifier, un espace vectoriel E sur le corps des réels sera dit *espace vectoriel réel*; une forme bilinéaire (resp. quadratique) sur un espace vectoriel réel sera dite *réelle*.

13. *Théorème d'inertie de Sylvester*. 1° **Quelle que soit la base formée de vecteurs deux à deux conjugués à laquelle on rapporte l'espace vectoriel réel E, de dimension n, la matrice diagonale qui représente la forme quadratique Φ sur E comporte le même nombre d'éléments diagonaux positifs et le même nombre d'éléments diagonaux négatifs.**

*(1) Soit r le rang de la forme quadratique Φ; nous savons déjà que le nombre des éléments diagonaux nuls est $n-r$.

Soit $\mathcal{U} = \{\vec{u}_i\}$ une première base de E formée de vecteurs deux à deux conjugués. Désignons par p le nombre des termes diagonaux positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de la matrice qui représente φ et Φ dans la base $\mathcal{U}$. Le nombre des termes négatifs est $r-p$; soient $-\mu_{p+1}, \ldots, -\mu_r$ ces termes.

Au vecteur $\vec{X} = \sum_1^n \vec{u}_i . x_i$ de E, Φ associe le réel

$$\Phi(\vec{X}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2 - \mu_{p+1} x_{p+1}^2 - \ldots - \mu_r x_r^2.$$

Soit $\mathcal{V} = \{\vec{v}_i\}$ une seconde base analogue et q le nombre des éléments diagonaux positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ de la matrice qui représente φ et Φ dans la base $\mathcal{V}$; les termes négatifs sont $-\beta_{q+1}, \ldots, -\beta_r$.

Au vecteur $\vec{X} = \sum_1^n \vec{v}_i . y_i$ de E, Φ associe le réel

$$\Phi(\vec{X}) = \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_q y_q^2 - \beta_{q+1} y_{q+1}^2 - \ldots - \beta_r y_r^2.$$

Supposons $p > q$.

Pour tout vecteur $\vec{X}$ du sous-espace F de E qui est engendré par les $p + (n-r)$ vecteurs de $\mathcal{U}$

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p, \vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+2}, \ldots, \vec{u}_n$$

les coordonnées $x_{p+1}, \ldots, x_r$ sont nulles, ce qui entraîne $\Phi(\vec{X}) \geqslant 0$.

---

(1) Le programme n'impose pas la connaissance de cette démonstration.

Pour tout vecteur $\vec{X}$ du sous-espace G de E engendré par les $r - q$ vecteurs de $\mathcal{V}$

$$\vec{v}_{q+1}, \vec{v}_{q+2}, \ldots, \vec{v}_r,$$

les coordonnées $y_1, \ldots y_q, y_{r+1}, \ldots, y_n$ sont nulles; il en résulte $\Phi(\vec{X}) \leqslant 0$, l'inégalité étant stricte si $\vec{X} \neq \vec{0}$.

Or F et G ont en commun au moins un vecteur $\vec{X}_0 \neq \vec{0}$: en effet, s'il n'en était pas ainsi (I, 160), leur somme F + G serait un sous-espace vectoriel de E admettant pour dimension la somme des dimensions de F et G, soit

$$(p + n - r) + (r - q) = n + p - q,$$

ce qui est impossible puisque $n + p - q > n$.

$\Phi(\vec{X}_0)$ est à la fois positif (au moins au sens large) et négatif (au sens strict) ce qui constitue une contradiction.

Nous montrerions de même que l'hypothèse $q > p$ conduit à une contradiction. On a donc $p = q$ et le théorème d'inertie est démontré.

Remarque. — Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_i\}$ la base de E déduite de la base $\mathcal{U}$ considérée ci-dessus par

$$\begin{cases} \vec{u}_i = \sqrt{\lambda_i}\, \vec{e}_i \text{ si } i \in [1, p]; & \vec{u}_i = \sqrt{\mu_i}\, \vec{e}_i \text{ si } i \in [p+1, r]; \\ \vec{u}_i = \vec{e}_i \text{ si } i \in [r+1, n]. \end{cases}$$

Dans la base $\mathcal{E}$ de E qui est, elle aussi, formée de vecteurs deux à deux conjugués et qui est dite base *réduite;* la forme Φ est représentée par la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont successivement p éléments 1, $r - p$ éléments -1, $n - r$ éléments 0.

Exemple. — L'espace de la relativité restreinte est un espace affine réel attaché à un espace vectoriel réel E de dimension 4, muni d'une forme bilinéaire symétrique φ de signature (3, 1). On en déduit qu'il existe des bases *réduites* (cf. Remarque) de E, c'est-à-dire des bases $\mathcal{E}$ telles que

$$\Phi(\vec{X}) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 \qquad \text{avec} \qquad \vec{X} = \sum_1^4 \vec{e}_i\, \xi_i.$$

$\vec{X}$ est dit vecteur-espace si $\Phi(\vec{X}) > 0$, vecteur-temps si $\Phi(\vec{X}) < 0$, vecteur-lumière si $\Phi(\vec{X}) = 0$ (cf. exercice n° 7, page 28).

2° **Signature des formes réelles** φ **et** Φ. — Le couple $(p, r - p) \in \mathbb{N}^2$ qui rappelle que dans toute décomposition en carrés de la forme quadratique Φ il y a p coefficients positifs et $r - p$ coefficients négatifs, est appelé *signature* de Φ (et aussi de φ).

14. *Forme quadratique réelle positive.* — 1° Définition. — **Sur un espace vectoriel réel E, une forme quadratique non nulle, Φ, est dite positive si**

$$(1) \qquad \forall \vec{X} \in E, \qquad \Phi(\vec{X}) \geqslant 0.$$

2° **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** — THÉORÈME. — **Soit Φ une forme quadratique positive, sur l'espace vectoriel réel E, et φ la forme polaire de Φ. Pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs de E, on a l'inégalité, dite de Cauchy-Schwarz**

$$[\varphi(\vec{X}, \vec{Y})]^2 \leqslant \Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{Y}). \tag{2}$$

A tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs de E, nous pouvons associer l'application T de R dans R définie par

$$T(r) = \Phi(\vec{X} + r\vec{Y}), \qquad r \in R.$$

La formule de Taylor pour une forme quadratique (I, 2°) permet d'expliciter

$$T(r) = \Phi(\vec{Y}).r^2 + 2\,\varphi(\vec{X}, \vec{Y}).r + \Phi(\vec{X}).$$

La positivité de Φ fait que $T(r)$ ne peut prendre aucune valeur négative.

Supposons $\Phi(\vec{Y}) \neq 0$; $T(r)$ est un trinôme du second degré qui ne peut avoir deux zéros réels distincts, ce qui se traduit par l'inégalité (2).

Supposons $\Phi(\vec{Y}) = 0$; on a nécessairement $\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$ car, dans le cas contraire, $T(r)$ serait un polynôme du premier degré et prendrait des valeurs négatives; (2) est vérifiée, avec égalité des deux membres.

En résumé, l'inégalité (2) s'applique pour tout couple de vecteurs de E.

3° **Inégalité de Minkowski.** — THÉORÈME. — **Soit Φ une forme quadratique positive, sur l'espace vectoriel réel E. Pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs de E, on a l'inégalité, dite de Minkowski.**

$$\sqrt{\Phi(\vec{X} + \vec{Y})} \leqslant \sqrt{\Phi(\vec{X})} + \sqrt{\Phi(\vec{Y})}. \tag{3}$$

En effet, d'après la formule (4) du n° I,

$$\Phi(\vec{X} + \vec{Y}) = \Phi(\vec{X}) + 2\,\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \Phi(\vec{Y}). \tag{4}$$

D'autre part, nous pouvons écrire : $\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) \leqslant \sqrt{\Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{Y})}$ (5)

inégalité qui est triviale si $\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) \leqslant 0$ et qui n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas contraire.

Des relations (4) et (5), nous déduisons

$$\Phi(\vec{X} + \vec{Y}) \leqslant \Phi(\vec{X}) + 2\sqrt{\Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{Y})} + \Phi(\vec{Y}) \tag{6}$$

ou

$$\left(\sqrt{\Phi(\vec{X})} + \sqrt{\Phi(\vec{Y})}\right)^2.$$

Du fait de la positivité de Φ, les inégalités (6) et (3) sont équivalentes.

4° **Noyau.** — Soit Φ une forme quadratique réelle positive et φ sa forme polaire. Comme dans toute forme quadratique (6, 2°), un vecteur du noyau S de Φ (ou vecteur double) est un vecteur singulier.

Inversement, soit $\vec{A}$ un vecteur singulier de Φ, c'est-à-dire un vecteur tel que $\Phi(\vec{A}) = 0$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\forall \vec{X} \in E, \qquad [\varphi(\vec{X}, \vec{A})]^2 \leqslant \Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{A})$$

et par suite,

$$\forall \vec{X} \in E, \qquad \varphi(\vec{X}, \vec{A}) = 0.$$

Par définition, cela s'exprime par $\vec{A} \in S$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Pour une forme quadratique réelle positive, il y a identité entre le noyau et l'ensemble des vecteurs singuliers.**

Il en résulte qu'*une forme quadratique réelle positive est définie si, et seulement si, elle est non dégénérée.*

5° **Signature.** — THÉORÈME. — **Sur un espace vectoriel réel E, de dimension finie n, une forme quadratique Φ de rang r, est positive si, et seulement si, sa signature est** $(r, 0)$ (7).

Rapportons E à une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_i\}$ formée de n vecteurs deux à deux conjugués relativement à Φ.

Au vecteur générique, $\vec{X} = \sum_1^n \vec{e}_i.\xi_i$, Φ associe le scalaire réel (9)

$$(8) \qquad \Phi(\vec{X}) = \sum_1^n \theta_i \xi_i^2, \qquad \text{avec} \qquad \theta_i = \Phi(\vec{e}_i),$$

le nombre des θ_i non nuls étant égal au rang r.

a) Supposons que la forme Φ est positive; les r scalaires $\Phi(\vec{e}_i) = \theta_i$ non nuls sont alors strictement positifs; la signature de Φ a la forme (7).

b) Supposons maintenant que la signature de Φ a la forme (7); les r scalaires $\theta_i \neq 0$ sont alors strictement positifs et la relation (8) montre que

$$\forall \vec{X} \in E, \qquad \Phi(\vec{X}) \geqslant 0,$$

ce qui signifie que la forme Φ est positive.

15. ***Forme quadratique réelle, définie positive.*** — 1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit Φ une forme quadratique définie, sur l'espace vectoriel réel E. Le réel $\Phi\left(\vec{X}\right)$ a un signe fixe, quel que soit le vecteur non nul $\vec{X}$ de E. Selon que ce signe est + ou —, la forme Φ est dite définie positive ou définie négative.**

Rappelons d'abord que le fait que Φ est définie s'exprime par

$$\Phi\left(\vec{X}\right) = 0 \iff \vec{X} = \vec{0}.$$

Nous désignons par φ la forme polaire de Φ.

A tout couple $\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ de vecteurs non nuls de E, nous pouvons associer l'application T de R dans R définie par

$$T(r) = \Phi\left(\vec{X} + r\vec{Y}\right) = \Phi\left(\vec{Y}\right).r^2 + 2\,\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right).r + \Phi\left(\vec{X}\right).$$

Nous allons étudier les zéros de $T(r)$, qui est un trinôme du second degré puisque $\Phi\left(\vec{Y}\right) \neq 0$ $\left(\text{ce qui résulte du } \vec{Y} \neq \vec{0}\right)$.

$$T(r) = 0 \quad \text{ou} \quad \Phi\left(\vec{X} + r\vec{Y}\right) = 0 \iff \vec{X} + r\vec{Y} = \vec{0}.$$

Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ ne sont pas colinéaires, $T(r)$ n'admet aucun zéro.

Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si $\vec{X} = k\vec{Y}$, $T(r)$ admet un zéro et un seul $(r = -k)$.

Ainsi $T(r)$ admet au maximum un zéro, ce qui, compte tenu de $\Phi\left(\vec{X}\right).\Phi\left(\vec{Y}\right) \neq 0$, exige,

(1) $$\Phi\left(\vec{X}\right).\Phi\left(\vec{Y}\right) > 0.$$

Cela posé, il suffit de considérer que, $\vec{Y} \neq \vec{0}$ restant fixe, $\vec{X}$ parcourt l'ensemble des vecteurs non nuls de E pour obtenir la proposition.

REMARQUE. — Toute forme définie négative se ramène, par multiplication par -1, à une forme définie positive. Nous pouvons donc nous limiter à l'étude des formes définies positives.

2° **Complément sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz.** — Montrons que, pour une forme quadratique *définie positive*, l'égalité

$$\left[\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)\right]^2 = \Phi\left(\vec{X}\right).\Phi\left(\vec{Y}\right) \qquad (2')$$

a lieu si, et seulement si, $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ forment un système lié.

I. — Supposons $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ liés.

Si $\vec{X} = \vec{0}$, $\varphi\left(\vec{0}, \vec{Y}\right) = 0$, $\Phi\left(\vec{0}\right) = 0$, les deux membres de (2′) sont nuls.

Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ ne sont pas nuls, il existe un réel k tel que $\vec{X} = k\vec{Y}$; chacun des deux membres de (2′) est
$$k^2\left[\Phi\left(\vec{Y}\right)\right]^2.$$

II. — Supposons (2′) réalisée par hypothèse, $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ n'étant pas nuls; (2′) exprime que le discriminant de T (r) est nul; T (r) a une racine double r_0. Comme la forme Φ est définie, l'égalité $\Phi(\vec{X} + r_0\vec{Y}) = 0$ entraîne $\vec{X} + r_0\vec{Y} = \vec{0}$. $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ forment donc un système lié.

3° **Complément sur l'inégalité de Minkowski.** — Montrons que, pour une forme quadratique *définie positive*, l'égalité
$$\sqrt{\Phi\left(\vec{X} + \vec{Y}\right)} = \sqrt{\Phi\left(\vec{X}\right)} + \sqrt{\Phi\left(\vec{Y}\right)} \qquad (3')$$
où l'on suppose $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ non nuls, a lieu si, et seulement si, il existe $k > 0$ tel que
$$\vec{X} = k\vec{Y}.$$

En effet, (3′) équivaut à
$$\Phi\left(\vec{X} + \vec{Y}\right) = \Phi\left(\vec{X}\right) + 2\sqrt{\Phi\left(\vec{X}\right)}\sqrt{\Phi\left(\vec{Y}\right)} + \Phi\left(\vec{Y}\right)$$
et, compte tenu de la formule de Taylor pour $\Phi\left(\vec{X} + \vec{Y}\right)$,
$$(3') \iff \varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sqrt{\Phi\left(\vec{X}\right)}\sqrt{\Phi\left(\vec{Y}\right)}$$
$$(3') \iff \begin{cases} (2') \iff \exists\, k \quad \text{tel que} \quad \vec{X} = k\vec{Y} \\ \varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) > 0. \end{cases}$$

Mais alors la positivité de $\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ entraîne celle de $\varphi\left(k\vec{Y}, \vec{Y}\right) = k\Phi\left(\vec{Y}\right)$, et finalement celle de k.

4° **Signature.** — D'après le n° **14**, 4°, sur un espace vectoriel E de dimension finie n, une forme quadratique positive est définie si, et seulement si, elle est non dégénérée, c'est-à-dire si son rang est n.

En tenant compte du n° **14**, 5° on en déduit :

<u>Théorème.</u> — **Sur un espace vectoriel réel de dimension finie n, une forme quadratique est définie positive si, et seulement si sa signature est $(n, 0)$.**

EXERCICES

1. — *a*) Montrer qu'une forme bilinéaire antisymétrique, φ, sur un espace vectoriel E vérifie
$$\forall \vec{X} \in E, \qquad \varphi\left(\vec{X}, \vec{X}\right) = 0$$

b) En déduire la raison pour laquelle nous avons pu nous limiter à des formes bilinéaires symétriques pour engendrer des formes quadratiques.

2. — *a*) Dans l'espace vectoriel R^3 rapporté à une base, on considère la forme quadratique Φ associée au polynôme quadratique.

$$2X^2 - 2Y^2 - 6Z^2 + 7YZ - 4ZX + 3XY.$$

Déterminer les vecteurs singuliers, les vecteurs doubles, le noyau, le rang de Φ. En particulier, montrer que les vecteurs singuliers sont parallèles à l'un ou l'autre de deux plans.

b) Déterminer de même les vecteurs singuliers, les vecteurs doubles, le rang et le noyau de la forme quadratique associée, dans l'espace vectoriel C^4 rapporté à une base, au polynôme quadratique

$$X^2 + 2Y^2 - iZ^2 - 2iT^2 - iXY + (i-1)XZ + (1-2i)XT + (2i-1)YZ + (i-4)YT + ZT.$$

3. — On donne un espace vectoriel, E, de dimension n, une forme quadratique sur E, Φ, de rang n, enfin un sous-espace, E', de E, de dimension $n-1$. Existe-t-il des vecteurs de E admettant E' pour sous-espace conjugué?

4. — Soit $C_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes comprenant le polynôme nul et tous les polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n. Aux polynômes P et Q on associe le nombre complexe $\varphi(P, Q) = P(1)\, Q(1)$. Démontrer que φ est une forme bilinéaire sur $C_n[X]$. Quel est le noyau de φ? Quel est le rang de φ?

On rapporte C_n à la base $\{ 1, X, X^2, \dots, X^n \}$. Quelle est la matrice de la forme φ?

5. — Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur le corps R rapporté à une base $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$. Au vecteur $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ on associe le polynôme du second degré $T(\vec{V}) = at^2 + bt + c$, puis le nombre : $\Phi(\vec{V}) = 4ac - b^2$. Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{V}$; soit φ sa forme polaire. Quel est le rang de Φ?

a) Que peut-on dire du trinôme $T(\vec{V})$ si $\vec{V}$ est un vecteur singulier de Φ?

b) Que peut-on dire des trinômes $T(\vec{V})$ et $T(\vec{V'})$

α) si $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont conjugués relativement à Φ;

β) si $\varphi^2(\vec{V}, \vec{V'}) = \Phi(\vec{V})\Phi(\vec{V'})$?

c) La forme Φ a-t-elle des vecteurs doubles?

d) On donne le vecteur $\vec{A}(1, 0, -1)$. Démontrer qu'il existe une infinité de couples de vecteurs $(\vec{B}, \vec{C})$, dépendant d'un paramètre réel λ, et satisfaisant aux conditions suivantes : $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont conjugués de $\vec{A}$ et conjugués entre eux et leur première composante est 1.

Le système $\{ \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \}$ est-il une base de $\mathcal{V}$?

6. — A désigne une matrice donnée $(n, 1)$ non nulle. On pose $B = A\tilde{A}$

a) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $B(n, n)$ s'écrit

$$(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \operatorname{dét} (\tilde{A}A)$$

b) Montrer que la forme quadratique représentée par la matrice B est le carré d'une forme linéaire.

7. — *Groupe de Lorentz.* — On reprend les notations de l'exemple qui termine le n° 13, 1°. Déterminer tous les endomorphismes f de E tels que

$$\forall \vec{X}, \quad \Phi[f(\vec{X})] = \Phi(\vec{X}).$$

Démontrer que l'ensemble de ces endomorphismes est un groupe.

Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$. Calculer A^{-1}, puis $(\operatorname{dét} A)^2$.

8. — *a)* Montrer que l'ensemble des matrices (3, 3) à éléments entiers, représentant une transformation linéaire qui conserve le polynôme quadratique $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ est un groupe, dont trois éléments sont

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Montrer que l'on peut obtenir toutes les solutions de l'équation : $x^2 + y^2 = z^2$ qui sont formées de trois nombres entiers, positifs ou nuls, premiers entre eux dans leur ensemble, en utilisant les résultats suivants :

I. Si (x, y, z) est une solution, telle que $0 < x < y < z$, la relation

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

fournit une solution (X, Y, Z) telle que : $0 < X < Y < Z$ et $z < Z$.

II. A partir d'une solution arbitraire (x_0, y_0, z_0), on engendre des solutions par

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} |x_{k-1}| \\ |y_{k-1}| \\ |z_{k-1}| \end{bmatrix}$$

On aboutit ainsi nécessairement à l'une des solutions (1, 0, 1) ou (0, 1, 1).

9. — Le corps de base étant celui des réels, chacune des formes quadratiques représentées par les matrices

$$\begin{bmatrix} \sin 2\theta & \sin 3\theta & \sin 4\theta \\ \sin 3\theta & \sin 4\theta & \sin 5\theta \\ \sin 4\theta & \sin 5\theta & \sin 6\theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{ch}(a-b) & \mathrm{ch}(a-c) & \mathrm{ch}(a-d) \\ \mathrm{ch}(a-b) & 1 & \mathrm{ch}(b-c) & \mathrm{ch}(b-d) \\ \mathrm{ch}(a-c) & \mathrm{ch}(b-c) & 1 & \mathrm{ch}(c-d) \\ \mathrm{ch}(a-d) & \mathrm{ch}(b-d) & \mathrm{ch}(c-d) & 1 \end{bmatrix}$$

est le produit de deux formes linéaires.

10. — Le polynôme quadratique, à coefficients complexes,

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2\,byz + 2\,b'zx + 2\,b''xy, \quad (a \neq 0),$$

est le carré d'un polynôme linéaire si, et seulement si

$$aa' - b''^2 = 0, \quad aa'' - b'^2 = 0, \quad ab - b'b'' = 0.$$

La proposition reste-t-elle valable si le corps de base est celui des réels?

11. — On considère le polynôme :

$$U(x, y) = ax^3 + 3\,bx^2y + 3\,cxy^2 + dy^3$$

Démontrer que, pour que le polynôme quadratique

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} U''_{x^2} & U''_{xy} \\ U''_{xy} & U''_{y^2} \end{vmatrix}$$

soit le carré d'un polynôme linéaire, il faut et il suffit que l'équation $U(x, 1) = 0$ ait une racine double.

Comment se transforme H si on effectue la substitution

$$x = \alpha x_1 + \beta y_1 \qquad y = \gamma x_1 + \delta y_1? \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

12. — Décomposer en carrés les polynômes quadratiques suivants :

$$xy + zx + xt + tu + uv + vx$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,yz\cos\alpha + 2\,zx\cos\beta + 2\,xy\cos\gamma$$
$$(x + 2\,y + z)^2 + (x + 2\,y - 2\,z + t)(2\,x + 4\,y - z)$$
$$yz + zx + xy + \lambda(x + y + z)\,t + \mu t^2$$

13. — Décomposer en carrés les polynômes quadratiques suivants :

$$X[X + 2(Y + Z + T)] + 2\,Y[Y + 2(Z + T)] + 3\,Z(Z + 2\,T) + 4\,T^2$$

$$X[X + 2\,(Y + Z + T + U)] + 2\,Y[Y + 2\,(Z + T + U)] + 3\,Z[Z + 2\,(T + U)] + 4\,T(T + 2\,U) + 5\,U^2$$

Généraliser.

Écrire les matrices associées à ces polynômes quadratiques

14. — Montrer que le polynôme quadratique à coefficients réels

$$G(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} x_i x_j$$

s'écrit

$$G = Q_1^2 + \frac{3}{4} Q_2^2 + \ldots + \frac{p+1}{2\,p} Q_p^2,$$

les Q_k étant les polynômes linéaires, indépendants, déterminés par

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1, \ldots, x_p) \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_p(x_1, \ldots, x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \frac{1}{p} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

15. — On considère le polynôme quadratique à coefficients réels

$$F_a\,(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

I) Déterminer, *a priori*, le rang de F_a.

II) On se propose de trouver, pour toute valeur réelle de a, une décomposition de Gauss, du polynôme F_a, et d'en déduire le rang et la signature de la forme quadratique Φ_a associée à F_a.

a) Montrer que, pour $a > 0$ et pour $a < -n$, il existe une constante réelle $k(a)$ telle que :

$$F_a = a \sum_{i=1}^{n} (x_i + ku)^2, \quad \text{avec} \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

En déduire la solution du problème proposé, pour $a \geqslant 0$ et pour $a < -n$.

b) Si $a = -n$, la méthode utilisée en *a*), conduit à une égalité de la forme

$$F_{-n} = -n\left[\sum_{k=1}^{n-1} P_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)^2\right],$$

les P_k étant des polynômes linéaires indépendants que l'on explicitera. En utilisant l'exercice précédent, montrer que le problème est ainsi résolu dans le cas où $a = -n$

c) Traiter enfin le cas : $-n < a < 0$, en passant par l'intermédiaire de F_{-n}.

16. — Dans l'espace vectoriel R^n rapporté à une base $\mathcal{U} = \{\vec{u}_i\}$, étudier le rang de la forme quadratique Φ qui, au vecteur $\vec{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$ associe le nombre réel

$$\Phi(\vec{X}) = \sum_{i>j} (x_i - x_j)^2 \quad (i, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

17. — Soit E l'espace vectoriel des polynômes nul ou de degré au plus égal à n sur le corps commutatif K. Si A et B sont deux éléments de E, on pose :

$$\varphi(A, B) = A^{(n)}B - A^{(n-1)}B' + A^{(n-2)}B'' - \dots\dots + (-1)^n AB^{(n)}$$

a) Démontrer que φ est une forme bilinéaire sur E, et que si $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ sont les coordonnées de A et B dans la base $\mathcal{B} = \{1, C_n^1 x, C_n^2 x^2, \dots, C_n^n x^n\}$ de E, on a

$$\varphi(A, B) = n!\,(a - b)^{((n))}$$

$(a - b)^{((n))}$ étant développé comme $(a - b)^n$, mais en remplaçant les exposants par des indices.

b) Soit Φ la forme quadratique associée à φ. Que peut-on dire de Φ si n est impair? On suppose n pair : quelle est la matrice associée à Φ dans la base $\mathcal{B}$? ; quel est le rang de Φ?

c) Déterminer tous les polynômes conjugués par rapport à φ :

α) du polynôme x^k $(k \leqslant n)$;

β) d'un polynôme quelconque de E.

d) On suppose K = C et qu'un polynôme A, de degré n, appartenant à E, a tous ses zéros distincts $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Démontrer que tout polynôme B conjugué de A est de la forme :

$$B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x - \alpha_i)^n,$$

et que si B a lui-même ses n zéros distincts $\beta_1, \dots, \beta_n$, on a :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x - \beta_i)^n$$

18. — Le corps de base étant celui des complexes, on considère le polynôme quadratique

$$F_1(x, y) = Ax^2 + 2B''xy + A'y^2.$$

On le suppose de rang 2; il est donc la somme des carrés de deux polynômes linéaires indépendants :

$$F_1(x, y) = P^2 + Q^2.$$

a) On considère alors le polynôme quadratique

$$F_2(x, y, z) = F_1(x, y) + A''z^2 + 2z(B'x + By)$$

Démontrer qu'on peut trouver des nombres λ, μ, A''_1 tels que :

$$F_2(x, y, z) = (P + \lambda z)^2 + (Q + \mu z)^2 + A''_1 z^2.$$ Calculer A''_1.

b) On suppose que F_2 est de rang 3 et on écrit $F_2 = U^2 + V^2 + W^2$; (U, V, W sont des polynômes linéaires indépendants). On pose :

$$F_3(x, y, z, t) = F_2(x, y, z) + 2t(Cx + C'y + C''z) + Dt^2.$$

Démontrer qu'on peut trouver des nombres α, β, γ, D_1 tels que :

$$F_3(x, y, z, t) = (U + \alpha t)^2 + (V + \beta t)^2 + (W + \gamma t)^2 + D_1 t^2.$$

Calculer D_1.

19. — *a*) Soient (α, β) et (α', β') les racines des deux équations à coefficients complexes

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad a'x^2 + 2b'x + c' = 0.$$

Former une relation entre a, b, c, a', b', c' nécessaire et suffisante pour que les nombres $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, soient en proportion harmonique, c'est-à-dire pour que

$$2(\alpha\beta + \alpha'\beta') = (\alpha + \beta)(\alpha' + \beta')$$

b) On donne le polynôme à coefficients complexes

$$A_0x^4 + 4\,A_1x^3 + 6\,A_2x^2 + 4\,A_3x + A_4 = 0.$$

En utilisant la question *a*) démontrer que, pour que ses racines se séparent en deux couples conjugués harmoniques, il faut et il suffit que le polynôme quadratique

$$F(X, Y, Z) = A_0X^2 + A_2Y^2 + A_4Z^2 + 2\,A_3YZ + 2\,A_2ZX + 2\,A_1\,XY$$

soit le produit de deux polynômes linéaires. Traduire cette condition par une relation entre les coefficients de l'équation.

20. — *Transformation de Kronecker.* — *a*) Soit le polynôme quadratique

$$P(X,Y,Z) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2\,BYZ + 2\,B'ZX + 2\,B''XY$$

On le suppose de rang 2, avec $AA' - B''^2 \neq 0$.

Démontrer que si (X_0, Y_0, Z_0) est une solution non triviale du système

$$AX + B''Y + B'Z = 0 \qquad B''X + A'Y + BZ = 0,$$

et si on pose $x = X - X_0$, $y = Y - Y_0$, on a :

$$P = Ax^2 + 2\,B''xy + A'y^2.$$

b) *Généralisation.*

Soit $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un polynôme quadratique à n indéterminées, de rang $p < n$. On suppose que les polynômes linéaires

$$F'_{X_1}, F'_{X_2}, \ldots, F'_{X_p} \text{ sont indépendants.}$$

Démontrer qu'en désignant par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ une solution non triviale du système :

$$F'_{X_1} = 0,\ F'_{X_2} = 0,\ \ldots,\ F'_{X_p} = 0$$

F peut s'exprimer sous forme d'un polynôme quadratique aux p variables :

$$x_1 = X_1 - \xi_1,\quad x_2 = X_2 - \xi_2,\quad \ldots,\quad x_p = X_p - \xi_p.$$

CHAPITRE II

ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

I. PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

16. ***Espace vectoriel euclidien.*** — 1° DÉFINITIONS. — **Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels.**

a) **On dit que cet espace vectoriel est euclidien dès qu'il a été muni d'une forme bilinéaire, symétrique, dont la forme quadratique associée est définie positive.**

b) **L'image du couple $\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) \in E \times E$ par cette forme bilinéaire est appelée produit scalaire des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de E.**

Si φ désigne la forme bilinéaire choisie, l'image $\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ du couple $\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ est notée

$$\vec{X}.\vec{Y} \qquad \left(\text{ou} \qquad < \vec{X}, \vec{Y} >\right).$$

Par abus de langage, la forme bilinéaire φ est aussi appelée produit scalaire.

Un espace vectoriel n'étant qualifié *euclidien* que si le corps de base est celui des réels, nous dirons simplement, dans la suite, *espace vectoriel euclidien.*

2° **Axiomes du produit scalaire.** — La définition du 1° entraîne que le produit scalaire est caractérisé par les axiomes suivants :

quels que soient $\vec{X}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{Y}$ dans E, quel que soit λ dans R

$$\vec{Y}.\vec{X} = \vec{X}.\vec{Y} \qquad (\alpha)$$

$$\left(\vec{X}_1 + \vec{X}_2\right).\vec{Y} = \vec{X}_1.\vec{Y} + \vec{X}_2.\vec{Y} \qquad (\beta)$$

$$\left(\lambda\vec{X}\right).\vec{Y} = \lambda\left(\vec{X}.\vec{Y}\right) \qquad (\gamma)$$

$$\vec{X} \neq \vec{0} \implies \vec{X}.\vec{X} > 0 \qquad (\delta).$$

Les axiomes (α), (β) et (γ) sont ceux qui définissent une forme bilinéaire symétrique; l'axiome (δ) exprime que la forme quadratique associée est définie, positive.

Exemple. — Soit $E = R^2$, rapporté à sa base canonique $\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$. La forme quadratique Φ qui associe au vecteur générique $\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ de R^2 le réel

$$\Phi(\vec{X}) = ax_1^2 + 2\,bx_1x_2 + cx_2^2$$

est définie positive, quels que soient les réels a, b, c tels que $b^2 - ac < 0$ et $a > 0$.
Il lui correspond le produit scalaire

$$\vec{X}.\vec{Y} = ax_1\,y_1 + b\,(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

Il est donc possible, d'une infinité de manières, de munir R^2 d'une structure euclidienne.

3° **Norme euclidienne.** — Théorème et définition. — **L'espace vectoriel E, sur le corps des réels, ayant été muni d'une structure euclidienne par l'introduction sur E d'un produit scalaire $\vec{X}.\vec{Y}$, $\sqrt{\vec{X}.\vec{X}}$ est une norme sur E; elle est dite norme euclidienne.**

Montrons que $\sqrt{\vec{X}.\vec{X}}$, que nous écrivons $\|X\|$ vérifie les trois axiomes de la norme énoncés au n° 135, 2° du tome II.

a) La forme quadratique associée à un produit scalaire étant définie positive, $\vec{X}.\vec{X}$ est un réel positif si $\vec{X} \neq \vec{0}$, nul si $\vec{X} = \vec{0}$. Par suite

$$\|\vec{X}\| \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{X}\| = 0 \iff \vec{X} = \vec{0}.$$

b) L'inégalité de Minkowski appliquée à la forme quadratique $\vec{X}.\vec{X}$, positive, s'écrit

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\| \leqslant \|\vec{X}\| + \|\vec{Y}\|.$$

c) La formule $\Phi(\lambda\vec{X}) = \lambda^2\Phi(\vec{X})$, valable pour toute forme quadratique, s'écrit ici

$$\|\lambda\vec{X}\| = |\lambda|\,\|\vec{X}\|.$$

Définition. — Un vecteur dont le norme euclidienne est 1 est dit *unitaire.*

Remarque. — L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$|\vec{X}.\vec{Y}| \leqslant \|\vec{X}\| \times \|\vec{Y}\|,$$

l'égalité ayant lieu si, et seulement si, $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$ est un système lié.

APPLICATION. — La formule (3') du n° 1 appliquée dans le cas de $\Phi(\vec{X}) = \vec{X}.\vec{X}$ s'écrit

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\|^2 + \|\vec{X} - \vec{Y}\|^2 = 2\left(\|\vec{X}\|^2 + \|\vec{Y}\|^2\right).$$

En géométrie élémentaire, cette formule constitue ce qu'on appelle le *théorème de la médiane*.

4° Exemple d'un produit scalaire et d'une norme sur un espace vectoriel de dimension infinie. — Les fonctions réelles d'une variable réelle, continues sur un segment donné $[a, b]$, $a < b$, forment un espace vectoriel E, de dimensions infinie, sur le corps des réels (II, 150).

Nous pouvons associer à tout couple rangé (f, g) de fonctions de E le nombre réel

$$(1) \qquad < f, g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Il est aisé de vérifier que nous définissons ainsi un produit scalaire sur E. La norme euclidienne associée est

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'application des formules de Cauchy-Schwarz et de Minkowski permet d'énoncer :

THÉORÈME. — Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ on a

$$(2) \qquad \left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx . \int_a^b g^2(x)\, dx$$

$$(3) \qquad \left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

REMARQUE. — La démonstration de la formule (2) que nous donnons ici ne diffère pas de celle qui a été utilisée au tome II (n° 89, 8°) pour établir la même relation; notons que l'égalité a lieu dans cette formule si l'une des fonctions est nulle ou s'il existe un réel k tel que, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) = kg(x)$.

17. *Vecteurs orthogonaux*. — Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels, muni d'une structure euclidienne par l'introduction d'un produit scalaire $\vec{X}.\vec{Y}$.

1° DÉFINITION. — **Deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ d'un espace vectoriel euclidien sont dits orthogonaux si $\vec{X}.\vec{Y} = 0$.**

Autrement dit deux vecteurs orthogonaux sont deux vecteurs conjugués relativement à la forme bilinéaire symétrique (ou à la forme quadratique définie positive) utilisée pour introduire la structure euclidienne sur E. Comme la norme, l'orthogonalité éventuelle de deux vecteurs de E dépend donc du choix de cette forme (ce que confirme l'exemple qui suit). Par la suite il sera entendu que le choix de la forme est fait une fois pour toutes.

EXEMPLE. — Sur R^2 rapporté à sa base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ les deux formes quadratiques $x_1^2 + x_2^2$ et $x_1^2 + 2\,x_1x_2 + 3\,x_2^2$ sont définies positives.

Si nous adoptons le produit scalaire $\vec{X}.\vec{Y} = x_1y_1 + x_2y_2$ les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont unitaires et orthogonaux, alors qu'il n'en est rien si nous adoptons le produit scalaire

$$\vec{X}.\vec{Y} = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3\,x_2y_2.$$

En effet, dans ce second cas, $\|\vec{e_1}\| = 1$ mais $\|\vec{e_2}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{e_1}.\vec{e_2} = 1$.

2° Théorème I. — **Le vecteur nul d'un espace vectoriel euclidien E est le seul vecteur de E qui soit orthogonal à tout vecteur de E.**

a) Remarquons d'abord que $\vec{X}.\vec{0} = 0$ est vrai pour tout $\vec{X}$ de E (5, 2°, *a*).

b) Inversement, si $\vec{X}.\vec{A} = 0$ est vrai pour tout $\vec{X}$ de E, en particulier $\vec{A}.\vec{A} = 0$, ce qui s'écrit $\|\vec{A}\| = 0$ et équivaut à $\vec{A} = \vec{0}$.

Théorème II. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ d'un espace vectoriel euclidien soient orthogonaux est**

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 + \|\vec{Y}\|^2. \tag{1}$$

En effet, d'après une formule valable pour toutes les formes bilinéaires symétriques, nous avons

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 + 2\,\vec{X}.\vec{Y} + \|\vec{Y}\|^2 \tag{2}$$

pour tout couple de vecteurs de E, si bien que $\vec{X}.\vec{Y} = 0$ équivaut logiquement à (1).

Remarque. — Dans le cas de $E = R^2$, ce dernier résultat est appelé théorème de Pythagore.

18. *Systèmes orthonormés.* — 1° Définition. — **Un système $\mathcal{V}$ de vecteurs, extrait de l'espace vectoriel euclidien E, est dit orthogonal si deux vecteurs distincts quelconques de $\mathcal{V}$ sont orthogonaux.**

Un système de vecteurs est dit orthonormé (ou orthonormal) **s'il est orthogonal et si chacun des vecteurs est unitaire.**

Remarquons que si un système orthogonal $\mathcal{V}$ ne contient pas $\vec{0}$, on peut en déduire un système orthonormé : on remplace chaque vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ par le vecteur unitaire $\vec{u} = \dfrac{\pm\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. On dit que, ce faisant, on *norme* le système $\mathcal{V}$.

2° Théorème. — **Tout système orthogonal qui ne contient pas $\vec{0}$** (et par suite tout système orthonormé) **est libre.**

Soit $\mathcal{V} = \left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q \right\}$, avec $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_i . \vec{v}_j = 0$ si $i \neq j$. Supposons qu'existe une égalité vectorielle de la forme

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Pour tout entier j du segment $[1, q]$, nous en déduisons

$$\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \vec{v}_i \right) . \vec{v}_j = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \vec{v}_i . \vec{v}_j = 0,$$

ce qui se réduit à $\lambda_j \left\| \vec{v}_j \right\|^2 = 0$ et, compte-tenu de $\vec{v}_j \neq \vec{0}$, à

$$\lambda_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots q).$$

Le système $\mathcal{V}$ est donc libre.

3° **Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.** — <u>Théorème</u>. — **Si E est un espace vectoriel euclidien et E′ un sous-espace de E, de dimension finie p, il existe au moins une base orthonormée de E′.**

D'après le théorème fondamental du n° 9, il existe une base $\mathcal{V}$ de E′, formée de vecteurs deux à deux orthogonaux; il suffit de normer cette base pour obtenir une base $\mathcal{U}$ orthonormée.

La proposition étant ainsi démontrée, nous allons donner un procédé qui permet de construire pratiquement une base orthogonale $\mathcal{V}$ de E′.

Nous partons d'une base quelconque $\mathcal{E} = \left\{ \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p \right\}$ de E′.

Posons $\quad \vec{v}_1 = \vec{e}_1 \quad$ et, pour $\quad k = 2, 3, \ldots, p$,

$$\vec{v}_k = \vec{e}_k - \lambda_k^1 \vec{v}_1 - \lambda_k^2 \vec{v}_2 - \ldots - \lambda_k^{k-1} \vec{v}_{k-1},$$

(l'emplacement inhabituel du second indice tient à des commodités d'écriture).

Montrons qu'il est possible de déterminer les scalaires λ_k^j de façon que le système $\mathcal{V} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \right)$ soit orthogonal et ne contienne pas $\vec{0}$ (un tel système, qui est libre d'après le théorème du 2°, constitue une base orthogonale de E′).

a) $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ résulte de ce que $\vec{v}_1$ appartient à une base de E′.

b) Soit $\vec{v}_2 = \vec{e}_2 - \lambda_2^1 \vec{v}_1$. Compte-tenu de $\left\| \vec{e}_1 \right\| \neq 0$,

$$\vec{v}_2 . \vec{v}_1 = 0 \iff \lambda_2^1 = \frac{\vec{e}_2 . \vec{e}_1}{\left\| \vec{e}_1 \right\|^2}.$$

La condition $\vec{v}_2 . \vec{v}_1 = 0$ détermine donc $\vec{v}_2$ d'une manière unique; le vecteur obtenu n'est pas nul sinon $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ seraient liés (ce qui est incompatible avec le fait qu'il s'agit de deux vecteurs d'une même base de E′).

c) Supposons que pour une valeur donnée de k telle que $3 \leqslant k \leqslant p$, on ait construit le système $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1}\}$ orthogonal, formé de vecteurs non nuls. Montrons que l'on peut déterminer les scalaires λ_k^j ($j = 1, 2, \ldots, k-1$) de façon que le vecteur

$$\vec{v}_k = \vec{e}_k - \lambda_k^1 \vec{v}_1 - \lambda_k^2 \vec{v}_2 - \ldots - \lambda_k^{k-1} \vec{v}_{k-1} \quad \text{vérifie} \quad \vec{v}_k . \vec{v}_j = 0;$$

compte-tenu de $\vec{v}_i . \vec{v}_j = 0$ pour $i \neq j$, cette condition s'écrit

$$\vec{e}_k . \vec{v}_j - \lambda_k^j \left\| \vec{v}_j \right\|^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda_k^j = \frac{\vec{e}_k . \vec{v}_j}{\left\| \vec{v}_j \right\|^2}.$$

Les conditions $\vec{v}_k . \vec{v}_j = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, k-1$) déterminent donc $\vec{v}_k$ d'une manière unique; le vecteur obtenu n'est pas nul sinon $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ feraient liés.

d) Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont déterminées par *a*) et *b*); ensuite le calcul *c*) fournit successivement $\vec{v}_3, \vec{v}_4, \ldots, \vec{v}_p$.

4° Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée. — Supposons que E est un espace vectoriel de dimension finie n.

a) Si E a été muni d'une structure euclidienne par l'introduction du produit scalaire $\vec{X} . \vec{Y}$ et si $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormée de E, arbitrairement choisie, on a

$$\vec{X} . \vec{Y} = \left(\sum_i \vec{u}_i x_i\right) . \left(\sum_j \vec{u}_j y_j\right); \quad \text{ou} \quad \sum_{ij} x_i y_j \left(\vec{u}_i . \vec{u}_j\right).$$

Mais

$$\vec{u}_i . \vec{u}_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} = \delta_{ij} \quad \text{(symboles de Kronecker).}$$

Il en résulte :

$$\vec{X} . \vec{Y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \qquad \text{et} \qquad \left\| \vec{X} \right\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Autrement dit la matrice qui représente la forme bilinéaire $\vec{X} . \vec{Y}$ dans une base orthonormée arbitraire est la matrice unité d'ordre n. Si X et Y sont les matrices unicolonnes associées aux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ dans la base $\mathcal{U}$ orthonormée, on a

$$\vec{X} . \vec{Y} = \text{dét}\,(\tilde{X}Y) = \text{dét}\,(\tilde{Y}X) \qquad \text{et} \qquad \| \vec{X} \| = \text{dét}\,(\tilde{X}X).$$

b) Il en résulte que, l'espace vectoriel réel E, de dimension n, étant donné, on peut le munir de la structure euclidienne la plus générale en opérant de la façon suivante : on choisit arbitrairement une base $\mathcal{U}$ de E; on considère l'application de E $\times$ E dans R définie, dans la base $\mathcal{U}$, par

$$\vec{X}.\vec{Y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n;$$

on constate qu'il s'agit d'un produit scalaire qui munit E d'une structure euclidienne pour laquelle la base $\mathcal{U}$ est orthonormée.

Autrement dit, *pour munir* E *de la structure euclidienne la plus générale on choisit arbitrairement une base de* E *et on considère cette base comme orthonormée.* C'est ainsi que l'on désigne en général par *espace vectoriel* R^n *muni de sa structure euclidienne canonique*, ou en abrégé *espace vectoriel euclidien* R^n, l'espace vectoriel R^n dans lequel on considère que la base canonique est orthonormée.

c) Nous avons vu (I, 170) que l'on réalise un isomorphisme entre les espaces vectoriels E et F, sur le corps des réels, de même dimension n, en choisissant arbitrairement une base $\mathcal{U}$ de E, une base $\mathcal{V}$ de F et en associant au vecteur générique $\vec{X} = \sum \lambda_i \vec{u_i}$ de E le vecteur $f(\vec{X}) = \sum \lambda_i \vec{v_i}$ de F.

Si, en outre, E et F sont euclidiens, l'isomorphisme conserve également la structure euclidienne à condition de prendre soin d'associer des bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ orthonormées; dans ce cas

$$\forall \vec{X} \in E, \qquad \forall \vec{X}' \in E, \qquad f(\vec{X}).f(\vec{X}') = \vec{X}.\vec{X}'.$$

C'est ainsi que tout espace euclidien de dimension n est (d'une infinité de façons) isomorphe à l'espace vectoriel euclidien R^n défini au *b*).

19. ***Sous-espaces vectoriels orthogonaux.*** — 1° Soit Φ la forme quadratique sur l'espace vectoriel euclidien E telle que $\Phi(\vec{X}) = \vec{X}.\vec{X}$; l'application à Φ de l'étude faite au n° 5 conduit aux résultats suivants :

<u>THÉORÈME I ET DÉFINITION.</u> — **Soit E un espace vectoriel euclidien. L'ensemble E″ des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs d'un sous-espace vectoriel E′ de E est un sous-espace vectoriel de E; on dit que E″ est le sous-espace vectoriel orthogonal de E′.**

<u>THÉORÈME II.</u> — **Si un vecteur $\vec{V}$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une partie $\mathcal{A}$ de E, $\vec{V}$ est orthogonal à tout vecteur du sous-espace vectoriel E′ de E qui est engendré par $\mathcal{A}$.**

Nous allons maintenant démontrer une propriété qui tient à ce que la forme quadratique Φ utilisée ici est définie.

2° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension finie n, et si E″ est le sous-espace orthogonal du sous-espace E′, le sous-espace orthogonal de E″ est E′ ; E′ et E″ sont supplémentaires; ils sont dits sous-espaces orthogonaux.**

D'après le n° 17, 3°, le sous-espace vectoriel E′ de E, de dimension $p \leqslant n$, possède une base orthonormée $\mathcal{U}' = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$. Le théorème de la base incomplète permet de déduire de $\mathcal{U}'$ une base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ de E, à partir de laquelle on peut construire, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ de E.

Le vecteur $\vec{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$ de E est orthogonal à tous les vecteurs de E′ si, et seulement si, (n° 5, 3°), $\vec{X}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{U}'$, c'est-à-dire si

$$\vec{X}.\vec{u}_j = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i.\vec{u}_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p).$$

Compte-tenu de $\vec{u}_i.\vec{u}_j = \delta_{ij}$, la condition précédente s'écrit

$$x_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p).$$

Autrement dit, le sous-espace E″ orthogonal de E′ est engendré par $\{\vec{u}_{p+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$; E′ et E″ sont supplémentaires.

De même, le vecteur $\vec{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$ est orthogonal à tous les vecteurs de E″ si, et seulement si,

$$x_k = 0 \qquad (k = p + 1, \ldots n).$$

Le sous-espace orthogonal de E″ est E′. La proposition est ainsi démontrée.

Il en résulte que tout vecteur $\vec{X}$ de E s'écrit, d'une façon et d'une seule

$$\vec{X} = \vec{X}' + \vec{X}'', \qquad \vec{X}' \in E', \qquad \vec{X}'' \in E''.$$

On dit que $\vec{X}'$ (resp. $\vec{X}''$) est la *projection orthogonale* de $\vec{X}$ sur E′ (resp. E″).

II. GROUPES ORTHOGONAUX

Jusqu'à la fin du chapitre, E est un espace vectoriel sur un corps commutatif K, Φ est une forme quadratique sur E, *non dégénérée*, choisie une fois pour toutes, φ est la forme polaire de Φ. Il peut se faire que E soit un espace vectoriel euclidien (alors φ en sera le produit scalaire), mais il ne s'agit alors que d'un simple cas particulier.

20. ***Extension de certaines propriétés du produit scalaire.*** — Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, dans le contexte que nous venons de définir :

1° Tout système de vecteurs deux à deux conjugués dont aucun n'est $\vec{0}$ est libre;

2° Dans le cas où E est de dimension finie n :

a) le procédé de Schmidt permet de construire des bases formées de vecteurs deux à deux conjugués;

b) si K est algébriquement clos (mais aussi — en particulier — si E est euclidien) il existe des bases réduites (cf. **10**,I, 2°) de E dans lesquelles φ et Φ sont représentées par la matrice-unité I_n; si $\mathcal{U} = \{\vec{u}_i\}$ est une telle base,

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n] \qquad \varphi(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \delta_{ij}.$$

Pour harmoniser le langage, nous dirons que ces bases sont *orthonormées relativement à* φ;

c) le sous-espace conjugué de E′ étant E″, celui de E″ est E′ et $E' \oplus E'' = E$.

21. ***Opérateurs orthogonaux.*** — 1° Théorème et définition. — **Soit E un espace vectoriel sur lequel on donne une forme quadratique Φ et la forme polaire associée φ. Les deux propriétés suivantes d'un endomorphisme f de E sont équivalentes :**

$$(\alpha) \quad (\forall \vec{X} \in E) \qquad \Phi[f(\vec{X})] = \Phi(\vec{X})$$

$$(\beta) \quad (\forall (\vec{X}, \vec{Y}) \in E^2) \qquad \varphi[f(\vec{X}), f(\vec{Y})] = \varphi(\vec{X}, \vec{Y}).$$

Quand f possède ces propriétés, on dit que f conserve Φ (et φ).

I. $(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$ résulte de la définition de Φ à partir de φ.

II. Supposons (α) vraie. L'application ψ de E^2 dans K qui à $(\vec{X}, \vec{Y})$ associe $\varphi[f(\vec{X}), f(\vec{Y})]$ est une forme bilinéaire symétrique; d'après (α), la forme quadratique associée à ψ est Φ et par suite (**I**, 4°), $\psi = \varphi$; (β) est vraie.

2° **Opérateur orthogonal.** — Définition. — **Tout automorphisme f de E conservant la forme quadratique Φ est dit opérateur orthogonal de E, relativement à Φ** (ou encore relativement à la forme polaire φ de Φ.)

Dans le cas où E est un espace vectoriel euclidien, de produit scalaire φ, f est dit *isométrie.*

Théorème et définition. — **L'ensemble $O_\varphi(E)$ des opérateurs orthogonaux de E, relativement à la forme bilinéaire symétrique φ, est un sous-groupe du groupe linéaire GL (E); on dit que $O_\varphi(E)$ est le groupe orthogonal de E relativement à φ.**

a) $O_\varphi(E)$, dont un élément est l'identité e de E, est une partie non vide de GL (E).

b) f et g étant deux éléments de $O_\varphi(E)$, $g \circ f$ conserve Φ, c'est donc un élément de $O_\varphi(E)$.

c) Soit $f \in O_\varphi(E)$ et soit f^{-1} l'automorphisme réciproque. Pour tout $\vec{X} \in E$, on a $\Phi\left[f^{-1}\left(\vec{X}\right)\right] = \Phi\left[f\left(f^{-1}\left(\vec{X}\right)\right)\right]$ c'est-à-dire $\Phi\left(\vec{X}\right)$.
Il en résulte : $f^{-1} \in O_\varphi(E)$.
Les propriétés *a*), *b*), *c*) justifient le théorème.

REMARQUE. — L'hypothèse selon laquelle Φ est non dégénérée n'a pas été utilisée au 1° et au 2°.

3° **Cas où E a une dimension finie** n. — *a*) THÉORÈME. — **Tout endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n conservant la forme quadratique Φ est un opérateur orthogonal.**

Montrons que f est alors bijectif. Soit $\vec{N} \in \operatorname{Ker} f$. D'après l'hypothèse

$$\left(\forall \vec{X} \in E\right), \quad \varphi\left(\vec{X}, \vec{N}\right) = \varphi\left[f\left(\vec{X}\right), f\left(\vec{N}\right)\right] = 0 \qquad \text{car} \qquad f\left(\vec{N}\right) = \vec{0}.$$

Il en résulte que $\vec{N} \in \operatorname{Ker} \varphi$, et puisque la forme Φ est supposée non dégénérée, $\vec{N} = \vec{0}$. f est ainsi injectif, et par suite bijectif puisque E a une dimension finie (I, 170, 4°).

b) ***Représentation matricielle.*** — THÉORÈME. — **Soit $\mathfrak{U}$ une base de E dans laquelle φ est représentée par la matrice symétrique Ω. L'endomorphisme f de E est un opérateur orthogonal relativement à φ si, et seulement si la matrice S qui représente f dans la base $\mathfrak{U}$ vérifie**

$$(1) \qquad \Omega = \tilde{S}\,\Omega\,S.$$

X et Y étant les matrices unicolonnes des coordonnées de $\vec{X}$ et $\vec{Y} = f\left(\vec{X}\right)$ dans la base $\mathfrak{U}$, $\Phi\left(\vec{X}\right) = \text{dét}\,(\tilde{X}\,\Omega\,X)$; en tenant compte de $Y = SX$

$$\Phi\left(\vec{Y}\right) = \text{dét}\,(\tilde{X}\tilde{S}\,\Omega\,SX).$$

f conserve Φ si, et seulement si les formes quadratiques représentées dans $\mathfrak{U}$ par Ω et $\tilde{S}\,\Omega\,S$ sont égales, ce qui s'exprime par (1).

COROLLAIRE I. — Si E possède des bases orthonormées et si $\mathfrak{U}$ est une telle base, alors Ω est la matrice-unité I_n (cf. 20, 2°). Énonçons : **E étant rapporté à une base orthonormée, la matrice S représente un opérateur orthogonal de E si et seulement si $\tilde{S}S = I_n$.**

COROLLAIRE II. — **Le déterminant d'un opérateur orthogonal est $+1$ ou -1.**
L'égalité (1) entraîne dét Ω = dét Ω (dét S)^2;

φ étant non dégénérée, dét $\Omega \neq 0$, d'où le résultat énoncé.

Notons que $+1$ et -1 sont des éléments distincts de K, ce corps n'ayant pas la caractéristique 2 d'après les hypothèses générales de la page 1.

c) Théorème et définition. — **L'ensemble SO_φ (E) des opérateurs orthogonaux de E, relativement à φ, dont le déterminant est $+1$ est un sous-groupe distingué du groupe orthogonal $O_\varphi(E)$; on dit que $SO_\varphi(E)$ est le groupe orthogonal spécial de E, relativement à φ.**

Le lecteur établira le début du théorème par analogie avec le 2°. Pour tout $f \in SO_\varphi$ (E) et pour tout $u \in O_\varphi$ (E), il montrera ensuite, en cherchant son déterminant, que :

$$u \circ f \circ u^{-1} \in SO_\varphi \text{ (E)}.$$

d) ***Transformation d'une base orthonormée.*** — Théorème. — **Si $\mathfrak{U} = \{ \vec{u_i} \}$ est une base orthonormée de E relativement à φ, un endomorphisme f de E est un opérateur orthogonal (relativement à φ) si et seulement si $f(\mathfrak{U}) = \{ f(\vec{u_i}) \}$ est une base orthonormée de E.**

On a vu au I, 220, 4° que $f(\mathfrak{U})$ est une base de E si et seulement si f est un automorphisme; c'est ce que nous supposons maintenant.

Dans la base $\mathfrak{U}$, φ est représentée par la matrice I_n, f par une matrice S. S est la matrice de passage de la base $\mathfrak{U}$ à la base $f(\mathfrak{U})$; dans la base $f(\mathfrak{U})$ φ est représentée par la matrice $\Omega' = \tilde{S}\, I_n S$, qui s'écrit $\Omega' = \tilde{S}\, S$.

Si f est orthogonal, $\tilde{S}\, S = I_n$, par suite $\Omega' = I_n$, et $f(\mathfrak{U})$ est une base orthonormée de E.

Si $f(\mathfrak{U})$ est une base orthonormée de E, $\Omega' = I_n$ et par suite $\tilde{S}\, S = I_n$, et f est un opérateur orthogonal (cf. *b*, corollaire I).

e) L'étude précédente permet aussi d'énoncer :

Théorème. — **Si $\mathfrak{U}$ est une base orthonormée de E et S la matrice de passage de $\mathfrak{U}$ à une autre base $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}'$ est orthogonale, si et seulement si $\tilde{S}\, S$ est la matrice-unité.**

Il suffit de considérer l'automorphisme f qui admet S pour matrice, et on est ramené au *d*).

22. *Matrices orthogonales.* — 1° Théorème et définition. — **Pour une matrice carrée S d'ordre n, sur le corps commutatif K, les trois conditions suivantes (où I désigne la matrice-unité d'ordre n) sont équivalentes :**

(1) $\tilde{S}\, S = I$; (2) $S\, \tilde{S} = I$; (3) S **est inversible et** $\tilde{S} = S^{-1}$.

On dit d'une matrice qui possède ces propriétés qu'elle est orthogonale.

Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'étude de l'inverse d'une matrice carrée qui a été faite au n° 201 du tome I.

Remarques. — *a*) S est orthogonale si et seulement si $\tilde{S}$ est orthogonale.

b) I est orthogonale.

COROLLAIRE. — En comparant avec le nº 21, 3º, *b* on peut énoncer : **E étant rapporté à une base orthonormée, la matrice S représente un opérateur orthogonal de E si et seulement si S est orthogonale.**

2º **Étude directe des matrices orthogonales.** — *a*) *Expression d'une matrice orthogonale.* — Désignons par δ_{ij}, s_{ij} et σ_{ij} les éléments de K qui se trouvent à l'intersection de la *i*-ième ligne et de la *j*-ième colonne respectivement dans les matrices I, S et $\tilde{S}$. Nous savons que

$$\sigma_{ij} = s_{ji} \qquad \text{et} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} \quad \text{(symboles de Kronecker),}$$

0 et 1 désignent respectivement les éléments neutres de l'addition et de la multiplication dans le corps K.

Dans la matrice produit $\tilde{S}S$ l'élément (i, j) est (I, 178) :

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} s_{kj} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=1}^{n} s_{ki} s_{kj}.$$

Il en résulte que

$$\tilde{S}S = I \iff \sum_{k=1}^{n} s_{ki} s_{kj} = \delta_{ij} \begin{cases} \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \\ \forall\, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

ou encore que

$$\text{S orthogonale} \iff \begin{cases} \forall\, i & s_{1i}^2 + s_{2i}^2 + \ldots + s_{ni}^2 = 1, \\ \forall\, i \neq j & s_{1i}s_{1j} + s_{2i}s_{2j} + \ldots + s_{ni}s_{nj} = 0. \end{cases}$$

En transposant S et $\tilde{S}$ nous obtenons

$$S\tilde{S} = I \iff \sum_{k=1}^{n} s_{ik} s_{jk} = \delta_{ij} \begin{cases} \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \\ \forall\, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

ou encore

$$\text{S orthogonale} \iff \begin{cases} \forall\, i & s_{i1}^2 + s_{i2}^2 + \ldots + s_{in}^2 = 1, \\ \forall\, i \neq j & s_{i1}s_{j1} + s_{i2}s_{j2} + \ldots + s_{in}s_{jn} = 0. \end{cases}$$

Une matrice carrée orthogonale est caractérisée ainsi : **la somme des carrés des éléments de toute colonne** (resp. **ligne**) **est 1 et la somme des produits des éléments correspondants de deux colonnes** (resp. **lignes**) **est 0** (cf. aussi le 3º).

b) *Déterminant d'une matrice orthogonale.* — Nous avons vu que

$$\text{S orthogonale} \implies (\text{dét S})^2 = 1.$$

La réciproque est fausse; c'est ainsi que, sur R, la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

vérifie $(\text{dét S})^2 = 1$, sans être orthogonale.

c) *Matrices orthogonales droites, gauches.* — La relation

$$(\text{dét } S)^2 = 1 \quad \text{s'écrit} \quad \text{dét } S = \pm 1.$$

En effet, sur un corps commutatif quelconque l'équation du second degré $x^2 = 1$ admet au maximum deux racines distinctes (I, 103); d'autre part, puisque nous avons excepté un corps de caractéristique deux, l'équation $x^2 = 1$ est vérifiée par les éléments distincts 1 et -1 de K.

Nous distinguerons les *matrices orthogonales droites* (dét S $= +1$), et les *matrices orthogonales gauches* (dét S $= -1$). C'est ainsi que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sont respectivement une matrice orthogonale droite et une matrice orthogonale gauche.

En désignant, comme d'habitude, par S_{ij} le cofacteur de s_{ij} dans la matrice S, écrivons que l'élément (j, i) de $\tilde{S}$, qui est s_{ij}, est égal à l'élément (j, i) de S^{-1}, qui est $\frac{1}{\text{dét } S} S_{ij}$. Nous obtenons

$$S_{ij} = \text{dét } S . s_{ij}.$$

Autrement dit :

Théorème. — Dans une matrice orthogonale droite (resp. gauche) chaque élément est égal (resp. opposé) à son cofacteur.

d) *Groupe des matrices orthogonales d'ordre* n. — Théorème. — **Sur un corps commutatif K, l'ensemble $\mathcal{O}$ des matrices orthogonales d'ordre donné n, muni de la multiplication des matrices, constitue un groupe.**

α) $\mathcal{O}$ dont un élément est la matrice-unité I, est une partie non vide du groupe $\mathcal{G}$ des matrices inversibles d'ordre n, sur K.

β) *Le produit* $P = S_2S_1$ *de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.* En effet $\tilde{P} = \tilde{S}_1\tilde{S}_2$ ou $S_1^{-1}S_2^{-1}$ ou $(S_2S_1)^{-1}$, ou enfin P^{-1}.

γ) *L'inverse* S^{-1} *d'une matrice orthogonale* S *est orthogonale.* En effet, l'hypothèse $\tilde{S}S = I$ entraîne $S^{-1}(\tilde{S})^{-1} = I$ ou encore (I, 201, 4°) $S^{-1}(\widetilde{S^{-1}}) = I$. Les propriétés α), β), γ) justifient le théorème.

Le lecteur vérifiera que l'*ensemble* $\mathcal{S}\mathcal{O}$ *des matrices orthogonales droites d'ordre n, sur le corps commutatif* K, *est un sous-groupe distingué du groupe* $\mathcal{O}$ *des matrices orthogonales d'ordre n sur* K (cf. 21, 3°, *c*).

3° **Étude indirecte des matrices orthogonales.** — *a*) Considérons K^n comme espace vectoriel sur K et sa base canonique $\mathcal{E} = \{\vec{e}_i\}$. Soit h la forme bilinéaire symétrique sur K^n représentée par la matrice I dans la base $\mathcal{E}$; la forme quadratique associée H est non dégénérée; nous dirons

que h est la forme bilinéaire canonique sur K^n; la base $\mathcal{E}$ est orthonormée relativement à h.

Nous avons appelé (I, 172, 3°) vecteurs-colonnes et vecteurs-lignes de $S = [s_{ij}]$, matrice (n, n) sur K, respectivement les vecteurs de K^n :

$$\vec{C}_p = \sum_{k=1}^{n} s_{kp}\, \vec{e}_k,\ p \in [1, n]; \qquad \vec{L}_q = \sum_{k=1}^{n} s_{qk}\, \vec{e}_k,\ q \in [1, n].$$

Par suite

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ki}\, s_{kj} = h\left(\vec{C}_i, \vec{C}_j\right); \qquad \sum_{k=1}^{n} s_{ik}\, s_{jk} = h\left(\vec{L}_i, \vec{L}_j\right),$$

Le résultat obtenu au 1° a) s'énonce alors de la façon suivante :

THÉORÈME. — **Une matrice (n, n) sur K est orthogonale si, et seulement si ses vecteurs-colonnes (resp. lignes) forment une base orthonormée de l'espace vectoriel K^n muni de sa forme bilinéaire canonique.**

b) Soit f un opérateur orthogonal de K^n, relativement à la forme bilinéaire canonique h; soit S (n, n) la matrice sur K qui représente f dans la base canonique $\mathcal{E}$; S est orthogonale (22, 1°). En associant S à f, nous créons une bijection de $O_h(K^n)$, ensemble des opérateurs orthogonaux de K^n, sur $\mathcal{O}$, ensemble des matrices (n, n) orthogonales, sur K.

Cette bijection permet de déduire :

α) la structure de groupe de $\mathcal{O}$ de celle de $O_h(K^n)$;

β) la structure de sous-groupe distingué de $\mathcal{SO}$ de celle de $SO_h(K^n)$;

γ) le résultat des 2° a) et 3° a) du théorème du n° 21, 3°, d);

δ) les résultats du 2° b) et 2° c) de ceux du n° 21, 3°, b).

23. *Changement de bases orthonormées dans un espace vectoriel euclidien.*

— Soit E un espace vectoriel, de dimension finie n, muni d'une structure euclidienne.

1° **Matrice de passage orthogonale.** — Soit S la matrice de passage d'une base $\mathcal{U}$ à une base $\mathcal{U}'$ de E. Le théorème du n° 21, 3°, e) et la définition du n° 22, 1° permettent d'énoncer :

THÉORÈME. — **Dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie, une matrice de passage transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée si et seulement si elle est orthogonale.**

2° **Questions d'orientation.** — Orientons E, ce qui est possible puisqu'il s'agit d'un espace vectoriel sur R (I, 224, 3°) : nous choisissons arbitrairement une base $\mathcal{U}_0$ de E comme *base de référence*, toute autre base $\mathcal{U}$ de E étant dite positive ou négative selon que le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{U}_0$ à $\mathcal{U}$ est positif ou négatif.

Deux bases orthonormées $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ de E ont la même orientation ou des

orientations contraires suivant que $P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'}$ est orthogonale droite ou orthogonale gauche.

DÉFINITION. — **Dans un espace vectoriel euclidien, toute notion qui dépend de l'orientation est dite axiale.**

Le sens d'une base est une notion axiale; le produit scalaire n'est pas une notion axiale.

EXERCICES

1. — On se propose d'établir une réciproque pour le théorème « de la médiane », signalé au n° 16 pour un espace vectoriel euclidien.

On donne un espace vectoriel E sur le corps des réels R. On suppose que sur E est définie une norme N (II, 135); on suppose de plus que :

$$(\forall \vec{X}, \vec{Y} \in E), \quad N^2(\vec{X}+\vec{Y}) + N^2(\vec{X}-\vec{Y}) = 2\,N^2(\vec{X}) + 2\,N^2(\vec{Y}).$$

Montrer que l'application φ de $E \times E$ dans R définie par

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{4}\left[N^2(\vec{X}+\vec{Y}) - N^2(\vec{X}-\vec{Y})\right]$$

vérifie les axiomes du produit scalaire (n° 16, 2°) et permet de munir E d'une structure euclidienne.

(Pour démontrer que l'on a $\varphi(\lambda\vec{X}, \vec{Y}) = \lambda\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$ on examinera successivement les cas où λ est : entier, rationnel, réel quelconque.)

2. — *a*) En géométrie élémentaire, démontrer, en utilisant une inversion, que les longueurs des côtés d'un tétraèdre ABCD vérifient l'inégalité

$$AC \times BD \leqslant AB \times CD + BC \times AD$$

b) Montrer que quatre vecteurs quelconques $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ d'un espace vectoriel euclidien vérifient l'inégalité

$$\|\vec{A}-\vec{C}\| \times \|\vec{B}-\vec{D}\| \leqslant \|\vec{A}-\vec{B}\| \times \|\vec{C}-\vec{D}\| + \|\vec{B}-\vec{C}\| \times \|\vec{A}-\vec{D}\|$$

On se ramènera au cas où $\vec{A}$ est le vecteur nul $\vec{0}$ et on utilisera l'application de $E - \{\vec{0}\}$ dans lui-même qui au vecteur $\vec{X}$ associe le vecteur $\dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|^2}$.

3. — $a, b, c, d, a', b', c', d'$ sont des nombres réels.

1° On donne les matrices.

$$\mathfrak{L} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \qquad \mathfrak{M} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

Calculer les produits $\mathfrak{L}\tilde{\mathfrak{L}}$ et $\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}}$.

Calculer les déterminants des matrices $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$.

Résoudre les systèmes

$$\text{(I)}\quad \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} = \mathcal{L} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \qquad \text{et (II)}\quad \begin{bmatrix} a' \\ b \\ c' \\ d' \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

lorsqu'ils sont des systèmes de Cramer (on calculera effectivement x, y, z, t sans les laisser sous forme de déterminant ou sous forme matricielle).

Trouver a', b', c', d' pour que les deux systèmes aient la même solution quels que soient a, b, c, d (on suppose a, b, c, d non tous nuls).

2° Former le polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$ de la matrice $\mathcal{L}$. En supposant dans toute la suite $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, montrer qu'il existe deux valeurs propres, complexes, doubles, pour $\mathcal{L}$.

Les vecteurs propres (x, y, z, t) associés à chaque valeur propre engendrent un espace vectoriel de dimension 2 (on calculera x et y en fonction de z et de t).

Dans le cas où $a = b = c = d = 1$, donner, pour chaque valeur propre, les vecteurs propres pour lesquels $t = 0$, $z = 1$ d'une part, $t = 1$, $z = 0$ d'autre part.

4. — On considère la transformation linéaire

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \dfrac{3}{2}x + y; \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

a) Former la transposée $\tilde{A}$ et calculer les produits $A\tilde{A}$ et $\tilde{A}A$.

b) Montrer que $B = A\tilde{A}$ est de la forme PCP^{-1}, où C est une matrice diagonale d'ordre 2, et où P est une matrice orthogonale; calculer P et C.

c) Prouver qu'il existe des matrices carrées D d'ordre 2 telles que $D^2 = C$, et les déterminer.

d) Prouver qu'il existe des matrices symétriques H telle que $H^2 = B$ et les déterminer.

e) Prouver qu'il existe une matrice orthogonale U telle que $A = HU$ et la déterminer.

5. — Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Montrer que la valeur absolue du déterminant Δ de la matrice des coordonnées de n vecteurs de E, dans une base orthonormée $\mathcal{U}$, est indépendante du choix de $\mathcal{U}$; $|\Delta|$ est au plus égale au produit des normes des vecteurs.

6. — Montrer que la matrice

$$S = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

est orthogonale

7. — Les éléments d'une matrice orthogonale d'ordre impair sont des fonctions de la variable réelle définies et dérivables sur $]-\infty, +\infty[$.

Montrer que la dérivée de cette matrice (cf. exercice 20, chapitre XII du tome I) est une matrice singulière.

8. — L'espace vectoriel euclidien $A = R^6$ est rapporté à une base orthonormée $\mathcal{U}$. Soit Φ la forme quadratique qui, au vecteur $\vec{X}$ de composantes x_i dans $\mathcal{U}$, associe le nombre :

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{X}) = {} & 3\,x_1^2 - 2\,x_1x_2 + 6\,x_1x_3 - 2\,x_1x_4 \\ & + 7\,x_2^2 - 2\,x_2x_3 - 2\,x_2x_4 - 8\,x_2x_5 - 8\,x_2x_6 \\ & + 3\,x_3^2 - 2\,x_3x_4 \\ & + 7\,x_4^2 + 8\,x_4x_5 + 8\,x_4x_6 \\ & + 4\,x_5^2 + 8\,x_5x_6 + 4\,x_6^2\end{aligned}$$

a) Démontrer que la forme Φ est positive. Déterminer le sous-espace B où elle s'annule et le sous-espace C orthogonal à B. Démontrer que $\Phi(\vec{X})$ ne dépend pas de la projection de $\vec{X}$ sur B parallèlement à C.

b) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{V}$(resp. $\mathcal{W}$) pour le sous-espace B (resp. C). Quelle est l'expression de $\Phi(\vec{X})$ dans la base $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ de A?

c) En utilisant *b*) donner une expression réduite de $\Phi(\vec{X})$.

9. — Montrer que l'ensemble E des fonctions réelles de deux variables réelles x et y, admettant des dérivées partielles continues sur le cercle C de centre O, de rayon 1, et prenant la valeur 0 sur la circonférence du cercle est un espace vectoriel sur R.

Aux deux fonctions f et g de E on associe le réel

$$< f, g > = \iint_C \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy.$$

Montrer que l'on munit ainsi E d'une structure euclidienne.

10. — Soit E l'espace vectoriel sur R, de dimension 2, constitué (II, 249) par les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2\,y' \cos\alpha + y = 0, \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

A l'élément générique f de E on associe le réel

$$\Phi(f) = \int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx.$$

Montrer que l'on obtient ainsi une forme quadratique sur E, définie positive, et déterminer une base orthonormée de E.

11. — Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur R, nul ou de degrés au plus égaux à n.

a) A deux éléments A et B de E on associe le réel

$$< A, B > = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} A(x)B(x)\,dx$$

Montrer que E est ainsi muni d'une structure euclidienne.

b) Utiliser la méthode de Schmidt pour démontrer l'existence d'une, et une seule, base orthonormée $\mathcal{U} = \{ U_0, U_1, \ldots, U_n \}$, dans laquelle U_k est un polynôme normalisé (I, 93), de degré k.

• Déterminer explicitement U_0, U_1, U_2, U_3, U_4.

c) Soient f et g deux fonctions réelles de la variable réelle, admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n sur $[-1, +1]$. Démontrer la formule :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)g^{(n)}(x)\,dx = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f^{(i)}(x)\,g^{(n-i-1)}(x)\right]_{-1}^{+1} + (-1)^n \int_{-1}^{+1} f^{(n)}(x)\,g(x)\,dx$$

En déduire que le polynôme U_k est, à un facteur près λ_k que l'on déterminera, la dérivée d'ordre k du polynôme $(x^2 - 1)^k$.

12. — *Matrice de Gram.* — Dans un espace vectoriel euclidien, on appelle matrice de Gram attachée au système de vecteurs $\mathcal{G} = \{ \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_p \}$ la matrice (n, n)

$$G = [g_{ij}] \qquad \text{avec} \qquad g_{ij} = \vec{X}_i . \vec{X}_j.$$

Montrer que le déterminant de G est un nombre réel, strictement positif si $\mathcal{G}$ est libre, nul si $\mathcal{G}$ est lié.

13. — *Distance d'un vecteur à un sous-espace.* — Soit E un espace vectoriel euclidien; on appelle distance de deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de E la norme du vecteur $\vec{X} - \vec{Y}$ (cf. II, 135).

On donne un vecteur $\vec{A}$ et un sous-espace F de E; on désigne par F* l'ensemble des vecteurs de F dont la distance à $\vec{A}$ est minimale. Montrer que :

a) Un vecteur $\vec{X}$ de F appartient à F* si, et seulement si, $\vec{A} - \vec{X}$ est orthogonal à tous les vecteurs de F.

b) F* contient au plus un élément.

c) Si E est de dimension finie, F* contient effectivement un élément $\vec{B}$, on dit alors que $\| \vec{A} - \vec{B} \|$ est la distance du vecteur $\vec{A}$ au sous-espace F.

Montrer que le carré de cette distance est le quotient des déterminants des matrices de Gram (cf. ex. 12) des systèmes $\mathcal{G} = \{ \vec{A}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p \}$ et $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p \}$ ce dernier désignant une base (orthogonale ou non), arbitrairement choisie, de F.

d) F* contient encore un élément si, E étant de dimension infinie, F est *complet*, ce qui signifie que toute suite de Cauchy sur F est convergente.

On désignera par α la borne inférieure de $\| \vec{A} - \vec{X} \|$ quand $\vec{X}$ parcourt F. On montrera que l'on peut extraire de F une suite de vecteurs, $\{ \vec{X}_n \}$, telle que la suite de réels, $\{ \| \vec{A} - \vec{X}_n \| \}$, admet la limite α; que $\{ \vec{X}_n \}$ admet une limite $\vec{B}$ (on utilisera le théorème de Cauchy); enfin que $\vec{B}$ répond à la question.

14. — Aux deux polynômes P et Q, à coefficients réels, on associe le réel

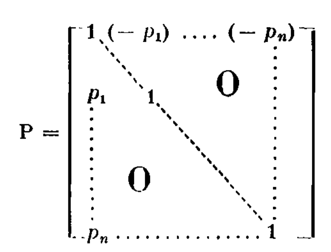
$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{4} [P(1) Q(1) + 2 P(0) Q(0) + P(-1) Q(-1)].$$

a) φ est-il un produit scalaire sur l'espace vectoriel R $[x]$?

b) Montrer que φ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E des polynômes de R $[x$ dont le degré n'excède pas 2 (auxquels on a adjoint le polynôme nul).

c) Déterminer une base orthonormée de E, rendu euclidien par l'adoption du produit scalaire φ.

15. — Aux n réels $p_1, \ldots, p_n$ on associe les matrices carrées d'ordre $n + 1$, P et $Q = P^{-1} \tilde{P}$, avec



$$P = \begin{bmatrix} 1 & (-p_1) & \cdots & (-p_n) \\ p_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calculer dét P.

b) Montrer que Q est orthogonale.

c) Soient A et B les matrices $(n + 1, 1)$ dont les éléments sont respectivement $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Peut-on leur associer $p, \ldots, p_n$ de façon à avoir $QA = B$?

16. — Soit E l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré donné n, c'est-à-dire l'ensemble des applications f de R dans R de la forme

$$f(t) = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} \alpha_{kl} \cos^k t \sin^l t.$$

d) Montrer que E est un espace vectoriel sur R. Quelle est sa dimension?

e) Aux éléments f et g de E on associe le réel

$$< f, g > = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Montrer que E est ainsi muni d'une structure euclidienne.

Montrer qu'une base orthonormée de E est :

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt \right\}.$$

c) Montrer que l'on définit une loi $(*)$ interne sur E en associant aux éléments f et g de E l'élément $f * g$ déterminé par

$$(f * g)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(t - x)\, dx.$$

Calculer les coordonnées de $f * g$ dans la base $\mathcal{E}$, en fonction des coordonnées de f et g.

Montrer que la loi $(*)$ est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et qu'elle admet un élément neutre e, que l'on explicitera.

d) Montrer qu'il existe un élément d de E tel que

$$(\forall f \in E) \qquad d * f = f', \qquad (f' : \text{dérivée de } f)$$

17. — On donne un espace vectoriel E, sur un corps commutatif K, et une forme bilinéaire sur E, φ, symétrique et non dégénérée. Montrer que toute application surjective f de E sur E qui « conserve φ », ce qui signifie

$$\left(\forall (\vec{X}, \vec{Y}) \in E^2\right) \qquad \varphi\left[f(\vec{X}), f(\vec{Y})\right] = \varphi(\vec{X}, \vec{Y}),$$

est un opérateur orthogonal de E.

18. — Soit Φ une forme quadratique sur un espace vectoriel euclidien E, de dimension finie n. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que

$$\left(\forall \vec{X} \in E\right) \qquad \alpha \|\vec{X}\|^2 \leqslant \Phi(\vec{X}) \leqslant \beta \|\vec{X}\|^2.$$

(Cet exercice fait appel à l'étude de la topologie d'un espace métrique : tome II, appendice I).

19. — Sur f une forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien E, de dimension finie n. Trouver les bornes supérieure et inférieure de l'application g de E dans R déterminée par

$$g(\vec{X}) = f(\vec{X}) \exp\left(-\frac{1}{2}\|\vec{X}\|^2\right).$$

20. — *a*) Montrer qu'étant donné un espace vectoriel euclidien E et une base quelconque $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, il existe une et une seule base orthonormée $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n\}$ telle que

$$(\forall j \in [1, n]) \qquad \vec{u}_j = p_{1j}\vec{e}_1 + \ldots + p_{jj}\vec{e}_j, \qquad p_{jj} > 0.$$

b) Montrer qu'à toute matrice carrée réelle A, d'ordre n, inversible, on peut associer un et un seul couple (S, T) de matrices carrées d'ordre n telles que :
A = ST; S est orthogonale; T est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

CHAPITRE III

ESPACES VECTORIELS HERMITIENS

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des espaces vectoriels complexes.

Nous nous proposons de définir, sur un espace vectoriel complexe, une structure qui rappelle la structure euclidienne introduite sur un espace vectoriel réel par le choix d'une forme quadratique définie positive.

Nous nous heurtons à la difficulté suivante : étant donné un espace vectoriel complexe E, les formes quadratiques sur E prennent leurs valeurs dans C, et non dans R. Cela va nous conduire à définir des « formes hermitiennes (1) » sur E, qui, elles, prendront leurs valeurs dans R; notre étude reposera essentiellement sur le fait que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, le nombre $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2$ est réel, ce qui n'est en général pas le cas pour $z_1 z_2$; nos définitions sont choisies de telle façon que, si on se restreint à la partie R de C, on retrouve les notions étudiées aux chapitres I et II.

24. *Matrices liées à une matrice donnée, à éléments complexes.* —

Dans tout ce chapitre le corps de base est celui des complexes; z et $\bar{z}$ désignent deux nombres complexes conjugués.

1° <u>Définition.</u> — **Étant donné une matrice** $A = [a_{ij}]$, **à éléments complexes, on appelle**

matrice transposée de A **la matrice** $\tilde{A} = [b_{ij}]$, **avec** $b_{ij} = a_{ji}$;

matrice conjuguée de A **la matrice** $\bar{A} = [c_{ij}]$, **avec** $c_{ij} = \bar{a}_{ij}$;

matrice transconjuguée (2) de A **la matrice** $A^{\dagger} = [d_{ij}]$, **avec** $d_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

---

(1) Du nom du mathématicien français Charles Hermite (1822-1901).

(2) Certains auteurs disent *matrice adjointe* (au lieu de matrice transconjuguée) et utilisent la notation A* (au lieu de $A^{\dagger}$).

Le symbole $A^\dagger$ se lit « A dague ».

La matrice $A^\dagger$ est aussi bien la conjuguée de $\tilde{A}$ que la transposée de $\bar{A}$; la conjuguée de $\bar{A}$ est A; la transconjuguée de $A^\dagger$ est A. Autrement dit :

$$A^\dagger = \bar{\tilde{A}} = \tilde{\bar{A}}; \qquad \bar{\bar{A}} = A; \qquad (A^\dagger)^\dagger = A.$$

Les matrices transposées ont déjà été étudiées au n° 181 du tome I. Nous savons que les transposées de A + B, λA (λ ∈ C), AB sont respectivement

$$\tilde{A} + \tilde{B},\ \lambda\tilde{A},\ \tilde{B}\tilde{A}.$$

En utilisant les lois de formation des termes généraux de A + B, λA (λ ∈ C) AB, nous constatons que les conjuguées de ces matrices sont respectivement

$$\bar{A} + \bar{B},\ \bar{\lambda}\bar{A},\ \bar{A}\bar{B}.$$

Il en résulte que les transconjuguées des matrices A + B, λA (λ ∈ C), AB sont respectivement $A^\dagger + B^\dagger$, $\bar{\lambda}A^\dagger$, $B^\dagger A^\dagger$. Autrement dit :

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger; \qquad (\lambda A)^\dagger = \bar{\lambda}A^\dagger; \qquad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

2° **Égalité des rangs des matrices** A, $\tilde{A}$, $\bar{A}$ **et** $A^\dagger$. — Nous savons déjà (I, 204) que deux matrices transposées ont le même rang.

La correspondance entre un nombre complexe et son conjugué étant un automorphisme du corps C (I, 77), deux matrices carrées conjuguées ont pour déterminants des nombres complexes conjugués; elles sont donc simultanément nulles ou non nulles.

En se reportant à la définition du rang d'une matrice (I, 204), on en déduit que deux matrices conjuguées ont le même rang.

Finalement les quatre matrices A, $\tilde{A}$, $\bar{A}$ et $A^\dagger$ ont le même rang.

3° **Matrices inverses de** A, $\tilde{A}$, $\bar{A}$ **et** $A^\dagger$. — Nous supposons ici que A est une matrice carrée régulière.

Il résulte du 2° que les matrices carrées $\tilde{A}$, $\bar{A}$ et $A^\dagger$ sont régulières. Comparons leurs matrices inverses à celle de A, que nous désignons par A^{-1}.

a) Nous avons déjà montré (I, 223, 4°) que l'inverse de $\tilde{A}$ est la transposée de A^{-1}.

b) Soit

$$A = [a_{ij}] \quad \text{et} \quad \text{dét}\, A = \Delta,$$

nous avons

$$\bar{A} = [\overline{a_{ij}}] \quad \text{et} \quad \text{dét}\, \bar{A} = \bar{\Delta}.$$

Les cofacteurs de a_{ij} dans A et de $\overline{a_{ij}}$ dans $\bar{A}$ sont les déterminants de deux matrices conjuguées; ce sont donc deux nombres complexes conjugués, A_{ij} et $\overline{A_{ij}}$.

Les termes généraux des matrices inverses de A et $\bar{A}$ sont respectivement

$$b_{ij} = \frac{1}{\Delta} A_{ji} \qquad \text{et} \qquad b'_{ij} = \frac{1}{\bar{\Delta}} \bar{A}_{ji}.$$

Nous avons $b'_{ij} = \overline{b_{ij}}$. L'inverse de $\bar{A}$ est la conjuguée de A^{-1}.

c) En utilisant *a*) et *b*) nous constatons que l'inverse de $A^{\dagger}$ est la transconjuguée de A^{-1}.

Ainsi *prendre l'inverse d'une matrice régulière et prendre soit sa transposée, soit sa conjuguée, soit sa transconjuguée sont deux opérations permutables.* Autrement dit :

$$(\bar{A})^{-1} = (\overline{A^{-1}}); \qquad (A^{\dagger})^{-1} = (A^{-1})^{\dagger}.$$

4° **Relations entre les polynômes caractéristiques des matrices A, $\tilde{A}$, $\bar{A}$ et $A^{\dagger}$.** — Rappelons que le polynôme caractéristique de la matrice carrée A est, par définition,

$$\Delta(\lambda) = \text{dét}\,(A - \lambda I), \qquad (I : \text{matrice unité d'ordre } n).$$

La matrice $\tilde{A} - \lambda I$ est la transposée de la matrice $A - \lambda I$; d'où l'égalité des déterminants; *les matrices A et $\tilde{A}$ admettent le même polynôme caractéristique.*

On passe de la matrice $A - \lambda I$ à la matrice $\bar{A} - \lambda I$ en remplaçant chacun des a_{ij} par le nombre complexe conjugué, sans toucher à λ, ce qui équivaut à remplacer dans le polynôme caractéristique de A, $\Delta(\lambda)$, ordonné suivant les puissances de λ, chacun des coefficients par le nombre complexe conjugué. $\bar{\Delta}(\lambda)$, ainsi obtenu, est aussi bien le polynôme caractéristique de $A^{\dagger}$ que celui de $\bar{A}$.

5° **Matrices hermitiennes.** — DÉFINITION. — **Une matrice carrée, à éléments complexes, est dite hermitienne si elle coïncide avec sa transconjuguée.**

Autrement dit, $A = [a_{ij}]$, carrée, est hermitienne si et seulement si

$$\forall\,(i, j), \qquad a_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

Notons que $A = A^{\dagger}$ équivaut, par transposition, à $\tilde{A} = \bar{A}$.

REMARQUE I. — Une matrice symétrique réelle est une matrice hermitienne particulière.

REMARQUE II. — Si A et B sont deux matrices hermitiennes de même ordre, les matrices suivantes sont aussi hermitiennes :
$A + B$, λA (à condition que λ soit réel), AB (à condition que A et B commutent), A^{-1} (à condition que A soit régulière). Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

Il en résulte que *les matrices réelles symétriques, d'ordre donné, forment un espace vectoriel sur* R mais que les matrices hermitiennes ne forment pas un espace vectoriel sur C.

I. FORMES SESQUILINÉAIRES (1)

25. *Définition d'une forme sesquilinéaire.* — 1° Définition I. — **E et F étant deux espaces vectoriels complexes, une application f de E dans E est dite semi-linéaire si, quels que soient $\vec{X}$ et $\vec{X}'$ dans E et λ dans C,**

$$f(\vec{X} + \vec{X}') = f(\vec{X}) + f(\vec{X}'); \qquad f(\lambda \vec{X}) = \bar{\lambda} f(\vec{X}).$$

Définition II. — **E et F étant deux espaces vectoriels complexes, une application φ de $E \times F$ dans C est dite sesquilinéaire à droite (2) sur $E \times F$ si elle satisfait aux critères de linéarité pour les éléments de E et aux critères de semi-linéarité pour les éléments de F, c'est-à-dire si, quels que soient $\vec{X}$ et $\vec{X}'$ dans E, $\vec{Y}$ et $\vec{Y}'$, dans F, et λ dans C**

$$\varphi(\vec{X} + \vec{X}', \vec{Y}) = \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \varphi(\vec{X}', \vec{Y}); \qquad \varphi(\lambda \vec{X}, \vec{Y}) = \lambda \varphi(\vec{X}, \vec{Y})$$

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y} + \vec{Y}') = \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \varphi(\vec{X}, \vec{Y}'); \qquad \varphi(\vec{X}, \lambda \vec{Y}) = \bar{\lambda} \varphi(\vec{X}, \vec{Y}).$$

2° Il est possible de munir l'ensemble des formes sesquilinéaires sur $E \times F$ d'une structure d'espace vectoriel sur le corps C (I, 187, 2°).

3° **Double structure d'espace vectoriel complexe.** — Soit $E = (\Gamma, +, T)$ l'espace vectoriel sur C obtenu en munissant un ensemble Γ, initialement amorphe, d'une loi interne (+) de groupe abélien, et d'une loi externe (T); on note $\lambda\vec{X}$ pour $\lambda T \vec{X}$. Soit ($\perp$) la loi externe sur Γ telle que

$$(\lambda, \vec{X}) \in C \times \Gamma \longrightarrow \lambda \perp \vec{X} = \bar{\lambda} T \vec{X} \quad (\text{ou } \bar{\lambda}\vec{X})$$

Le lecteur vérifiera que $\bar{E} = (\Gamma, +, \perp)$ est un espace vectoriel complexe et que

- une partie de Γ est sous-espace vectoriel de $\bar{E}$ si et seulement si elle l'est de E;
- une famille de vecteurs de Γ est libre (resp. génératrice, resp. base) dans $\bar{E}$ si et seulement si elle l'est dans E; dans la même base $\mathfrak{U}$ pour E et $\bar{E}$, le vecteur générique a des coordonnées respectivement conjuguées;
- une application f de Γ dans un espace vectoriel complexe F est linéaire au titre d'application de $\bar{E}$ dans F si et seulement si elle est semi-linéaire au titre d'application de E dans F.

4° **Liaison entre formes linéaires et formes sesquilinéaires.** — Théorème. — **Soient E et F deux espaces vectoriels complexes, obtenus à partir d'ensembles amorphes Γ et Δ. Une application de $\Gamma \times \Delta$ dans C est une forme sesquilinéaire au titre d'application de $E \times F$ dans C si et seulement si elle est forme bilinéaire au titre d'application de $E \times \bar{F}$ dans C.**

Ce théorème, dont la démonstration est immédiate, permettrait d'obtenir à partir de l'étude des formes bilinéaires certains des résultats que nous allons établir directement.

---

(1) Nous ferons, dans ce sous-chapitre, de fréquents renvois à la théorie des formes bilinéaires (I, 188 à 190); *sesqui* signifie *une fois et demi.*

(2) Dans toute la suite, nous dirons *forme sesquilinéaire* pour *forme sesquilinéaire à droite;* mais l'on pourrait étudier des formes sesquilinéaires à gauche.

26. *Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire.*

Supposons maintenant dim E $= n$, dim F $= p$, et supposons connues des bases E et F : $\mathcal{U} = \{\vec{u}_i\}$, $\mathcal{V} = \{\vec{v}_j\}$.

1° Expression d'une forme sesquilinéaire φ. — L'élément générique de E $\times$ F est $(\vec{X}, \vec{Y})$ avec $\vec{X} = \sum_i x_i \vec{u}_i$, $\vec{Y} = \sum_j y_j \vec{v}_j$. On calcule :

$$\varphi\left(x_i \vec{u}_i,\ y_j \vec{v}_j\right) = x_i \varphi\left(\vec{u}_i, y_j \vec{v}_j\right) = x_i \varphi\left(\vec{u}_i, \vec{v}_j\right) \bar{y}_j.$$

Il en résulte :
$$\boxed{\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sum_i \sum_j x_i \varphi\left(\vec{u}_i, \vec{v}_j\right) \bar{y}_j}$$

En posant
$$\varphi\left(\vec{u}_i, \vec{v}_j\right) = \omega_{ij}, \qquad \Omega = [\omega_{ij}],$$

et en désignant par X et Y les matrices unicolonnes qui admettent respectivement pour éléments les x_i et les y_j, nous sommes conduits à l'expression matricielle

$$(1) \qquad \boxed{\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \text{dét}\left(\tilde{X}\,\Omega\,\bar{Y}\right).}$$

Remarque. — Une fois choisies les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, la bijection $\varphi \leftarrow\!\ominus\!\rightarrow \Omega$ est un isomorphisme de l'ensemble des formes sesquilinéaires sur E $\times$ F et de l'ensemble des matrices (n, p) sur le corps C, chacun d'eux étant muni de sa structure d'espace vectoriel.

2° Changement de bases. — Considérons une seconde base, $\mathcal{U}'$, de E et une seconde base, $\mathcal{V}'$, de F; soit P la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$, Q la matrice de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}'$, X′ et Y′ les matrices unicolonnes des nouvelles coordonnées de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$. Nous savons que X $=$ PX′, Y $=$ QY′; il en résulte

$$\tilde{X} = \tilde{X}'\tilde{P}, \qquad \bar{Y} = \bar{Q}\bar{Y}'.$$

La nouvelle expression de φ est ainsi

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \text{dét}\left(\tilde{X}'\tilde{P}\,\Omega\,\bar{Q}\bar{Y}'\right).$$

La matrice Ω' qui représente φ dans les nouvelles bases est donc

$$\Omega' = \tilde{P}\,\Omega\,\bar{Q}.$$

3° Rang d'une forme sesquilinéaire. — Les matrices de passage P et Q sont régulières; les matrices $\tilde{P}$ et $\bar{Q}$, dont les rangs sont ceux de P et Q (24, 2°) sont aussi régulières. Comme la multiplication par une matrice régulière n'altère pas le rang (I, 209), les matrices Ω et Ω' ont le même rang.

Nous sommes ainsi conduits à poser la définition suivante.

Définition. — **On appelle rang d'une forme sesquilinéaire φ sur E $\times$ F le rang commun de toutes les matrices qui déterminent φ dans les diverses bases de E et de F.**

II. FORMES HERMITIENNES (1)

27. ***Forme sesquilinéaire, à symétrie hermitienne.*** — Soit E un espace vectoriel complexe; toute forme sesquilinéaire sur $E \times E$ est appelée forme sesquilinéaire sur E.

DÉFINITION. — **On dit que la forme sesquilinéaire φ, sur l'espace vectoriel complexe E, possède la symétrie hermitienne si**

$$\varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = \overline{\varphi(\vec{X}, \vec{Y})}$$

quels que soient $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ dans E.

28. ***Forme hermitienne engendrée par une forme sesquilinéaire, à symétrie hermitienne.*** — Soit E un espace vectoriel complexe et φ une forme sesquilinéaire sur E, qui possède la symétrie hermitienne; d'après la définition du n° 27,

$$\forall \vec{X} \in E, \qquad \varphi(\vec{X}, \vec{X}) = \overline{\varphi(\vec{X}, \vec{X})}.$$

Le nombre complexe $\varphi(\vec{X}, \vec{X})$, qui est égal à son conjugué, est nécessairement réel.

1° DÉFINITION. — **Étant donnée la forme sesquilinéaire φ à symétrie hermitienne, sur l'espace vectoriel complexe E, on appelle forme hermitienne engendrée par la forme sesquilinéaire φ, l'application Φ de E dans R qui à tout vecteur $\vec{X}$ de E associe le nombre réel, noté $\Phi(\vec{X})$, déterminé par $\Phi(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}, \vec{X})$.**

On dit que φ est la forme polaire de Φ.

2° **Égalités fondamentales.** — *a*) Nous avons, pour tout vecteur $\vec{X}$ de E et pour tout nombre complexe λ,

$$\varphi(\lambda\vec{X}, \lambda\vec{X}) = \lambda\,\varphi(\vec{X}, \lambda\vec{X}) = \lambda\bar{\lambda}\,\varphi(\vec{X}, \vec{X}),$$

que nous écrirons

$$(1) \qquad \boxed{\Phi(\lambda\vec{X}) = |\lambda|^2\Phi(\vec{X}).}$$

En particulier, $\Phi(-\vec{X}) = \Phi(\vec{X})$, $\Phi(\vec{0}) = 0$ et $\Phi(i\vec{X}) = \Phi(\vec{X})$.

(1) Nous ferons, au cours de ce sous-chapitre, de fréquents renvois à la théorie des formes quadratiques (chapitre I).

b) Nous avons, pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de E × E (cf. I, 2°, *b*)

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = \Phi(\vec{X} + \vec{Y}) - \Phi(\vec{X}) - \Phi(\vec{Y}).$$

En remplaçant $\vec{Y}$ par $i\vec{Y}$ et en utilisant

$$\varphi(\vec{X}, i\vec{Y}) = -i\varphi(\vec{X}, \vec{Y}), \qquad \varphi(i\vec{Y}, \vec{X}) = i\varphi(\vec{Y}, \vec{X}), \qquad \Phi(i\vec{Y}) = \Phi(\vec{Y}),$$

on en déduit, après multiplication par i,

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) - \varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = i\left[\Phi(\vec{X} + i\vec{Y}) - \Phi(\vec{X}) - \Phi(\vec{Y})\right].$$

D'où, par addition,

$$\text{(2)} \quad \boxed{2\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{X} + \vec{Y}) + i\Phi(\vec{X} + i\vec{Y}) - (1 + i)\left(\Phi(\vec{X}) + \Phi(\vec{Y})\right).}$$

En remplaçant $\vec{Y}$ par $-\vec{Y}$ dans (2), on obtient

$$-2\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{X} - \vec{Y}) + i\Phi(\vec{X} - i\vec{Y}) - (1 + i)\left(\Phi(\vec{X}) + \Phi(\vec{Y})\right),$$

et, par soustraction ,

$$\text{(3)} \quad \boxed{4\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{X} + \vec{Y}) - \Phi(\vec{X} - \vec{Y}) + i\Phi(\vec{X} + i\vec{Y}) - i\Phi(\vec{X} - i\vec{Y}).}$$

c) *Formule de Taylor.* — A partir de

$$\Phi(\lambda\vec{X} + \mu\vec{Y}) = \Phi(\lambda\vec{X}) + \varphi(\lambda\vec{X}, \mu\vec{Y}) + \varphi(\mu\vec{Y}, \lambda\vec{X}) + \Phi(\mu\vec{Y}),$$

on obtient

$$\text{(4)} \quad \boxed{\Phi(\lambda\vec{X} + \mu\vec{Y}) = |\lambda|^2\Phi(\vec{X}) + \lambda\bar{\mu}\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \bar{\lambda}\mu\varphi(\vec{Y}, \vec{X}) + |\mu|^2\Phi(\vec{Y}).}$$

Application. — En faisant, dans (4), successivement $\lambda = 1$, $\mu = 1$ et $\lambda = 1$, $\mu = -1$, on obtient, par addition,

$$\text{(5)} \qquad \Phi(\vec{X} + \vec{Y}) + \Phi(\vec{X} - \vec{Y}) = 2\left[\Phi(\vec{X}) + \Phi(\vec{Y})\right].$$

3° Définition II. — **Soit E un espace vectoriel complexe. On dit qu'une application Φ de E dans R est une forme hermitienne sur E si**

α) $$\forall \vec{X} \in E, \quad \forall \lambda \in C \quad \Phi(\lambda\vec{X}) = |\lambda|^2\Phi(\vec{X}) \qquad (1)$$

β) **L'application φ de E × E dans C définie par**

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{4}\left[\Phi(\vec{X} + \vec{Y}) - \Phi(\vec{X} - \vec{Y}) + i\Phi(\vec{X} + i\vec{Y}) - i\Phi(\vec{X} - i\vec{Y})\right] \qquad (3)$$

est une forme sesquilinéaire sur E.

On dit que φ est la *forme polaire* de Φ. On vérifie que cette forme admet la symétrie hermitienne en observant que

$$(1) \qquad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{Y} - \vec{X}) = \Phi(\vec{X} - \vec{Y}) \\ \Phi(\vec{Y} + i\vec{X}) = \Phi[i(\vec{X} - i\vec{Y})] = \Phi(\vec{X} - i\vec{Y}). \end{array} \right.$$

4° **Équivalence des deux définitions I et II.** — *a*) Une forme hermitienne, au sens de la définition I, vérifie (1) et (3) c'est donc une forme hermitienne au sens de la définition II.

b) Inversement, soit Φ une forme hermitienne, au sens de la définition II, et φ la forme polaire de Φ. D'après (β) nous avons, pour tout $\vec{X}$ de E

$$4\varphi(\vec{X}, \vec{X}) = \Phi(2\vec{X}) - \Phi(\vec{0}) + i\Phi[(1+i)\vec{X}] - i\Phi[(1-i)\vec{X}].$$

D'après (α)

$$\Phi(2\vec{X}) = 4\,\Phi(\vec{X}), \qquad \Phi(\vec{0}) = 0, \qquad \Phi[(1+i)\vec{X}] = \Phi[(1-i)\vec{X}] = 2\,\Phi(\vec{X}).$$

Finalement $\Phi(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}, \vec{X})$; Φ est une forme hermitienne au sens de la définition I.

5° On déduit de cette étude l'existence d'un isomorphisme entre les deux espaces vectoriels réels constitués : l'un par les formes sesquilinéaires sur E qui possèdent la symétrie hermitienne, l'autre par les formes hermitiennes sur E.

29. ***Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, et d'une forme hermitienne. Rang.*** — Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel complexe, de dimension finie n.

1° <u>Théorème.</u> — **Une forme sesquilinéaire sur l'espace vectoriel complexe E possède la symétrie hermitienne si, et seulement si, la matrice qui la représente, dans une base quelconque de E, est hermitienne.**

Soit φ une forme sesquilinéaire sur E et $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_i\}$ une base arbitrairement choisie de E, dans laquelle φ est représentée (26) par la matrice carrée d'ordre n, sur C,

$$\Omega = [\omega_{ij}] \qquad \text{avec} \qquad \omega_{ij} = \varphi(\vec{u}_i, \vec{u}_j).$$

a) Si la forme φ possède la symétrie hermitienne, nous avons, en particulier,

$$\forall\, i, j, \qquad \varphi(\vec{u}_j, \vec{u}_i) = \overline{\varphi(\vec{u}_i, \vec{u}_j)} \qquad \text{ou} \qquad \omega_{ji} = \overline{\omega_{ij}},$$

et la matrice Ω est hermitienne.

b) Réciproquement, si la matrice Ω est hermitienne, écrivons

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\Omega\,\overline{Y}) \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = \text{dét}(\tilde{Y}\,\Omega\,\overline{X}).$$

Calculons $\overline{\varphi(\vec{X}, \vec{Y})} = \text{dét}(X^{\dagger}\,\Omega\,Y)$.

La matrice $X^{\dagger}\,\overline{\Omega}\,Y$ n'ayant qu'un seul élément, elle est identique à sa transposée qui est $\tilde{Y}\,\Omega^{\dagger}\,\overline{X}$ ou $\tilde{Y}\,\Omega\,\overline{X}$, puisque $\Omega^{\dagger} = \Omega$; par suite

$$\varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = \overline{\varphi(\vec{X}, \vec{Y})}.$$

et la forme φ possède la symétrie hermitienne.

2° **Formes hermitiennes et matrices hermitiennes.** — La base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_i\}$ de E ayant été choisie, soit

a) Φ une forme hermitienne quelconque sur E et φ la forme polaire de Φ,

b) $\Omega = [\omega_{ij}]$ une matrice (n, n) quelconque sur C, hermitienne.

Les relations $\omega_{ij} = \varphi(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$ établissent une bijection entre φ et Ω et par suite entre Φ et Ω. On a, avec les notations habituelles,

$$(1) \qquad \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\Omega\,\overline{Y}) \quad \text{et} \quad \Phi(\vec{X}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\Omega\,\overline{X}).$$

On peut être amené à expliciter

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{i} \omega_{ii} x_i \overline{y_i} + \sum_{i<j} (\omega_{ij} x_i \overline{y_j} + \overline{\omega_{ij}} x_j \overline{y_i}).$$

3° **Rang.** — Quand on passe de la base $\mathfrak{U}$ de E à la base $\mathfrak{U}'$, par la matrice de passage P, on doit remplacer (**26**, 2°) la matrice hermitienne Ω, qui représente la forme hermitienne Φ et sa forme polaire φ, par la matrice $\Omega' = \tilde{P}\,\Omega\,\overline{P}$, Ω et Ω' admettent le même rang et leurs déterminants sont liés par

$$(2) \qquad \text{dét}\,\Omega' = \text{dét}\,\Omega\,|\,\text{dét}\,P\,|^2.$$

Bien entendu, la matrice Ω' est, elle aussi, hermitienne, ce que l'on vérifie, d'ailleurs, en calculant

$$(\Omega')^{\dagger} = \tilde{P}\,\Omega^{\dagger}\,\overline{P} \quad \text{ou} \quad \tilde{P}\,\Omega\,\overline{P} \quad \text{ou} \quad \Omega' \quad (\text{puisque } \Omega^{\dagger} = \Omega).$$

Nous sommes ainsi conduits à étendre à une forme hermitienne les notions de rang et de discriminant introduites au n° **2**, 2° pour une forme quadratique :

$$\text{rg}\,\varphi = \text{rg}\,\Phi = \text{rg}\,\Omega,$$

$$\text{discriminant de } \varphi = \text{discriminant de } \Phi = \text{dét}\,\Omega.$$

30. *Vecteurs singuliers (ou isotropes). Formes définies.* — DÉFINITION I. — **Un vecteur $\vec{\sigma}$ de E est dit singulier (ou isotrope) relativement à la forme hermitienne Φ si $\Phi(\vec{\sigma}) = 0$.**

C'est ainsi que $\vec{0}$ est singulier, ce qui résulte de $\Phi(\lambda\vec{X}) = \lambda\bar{\lambda}\Phi(\vec{X})$, avec $\lambda = 0$.

DÉFINITION II. — **Une forme hermitienne est dite définie si elle n'admet pas d'autre vecteur singulier que le vecteur nul**; dans le cas contraire la forme est dite *singulière*.

31. *Vecteurs conjugués (ou orthogonaux).* — 1° DÉFINITION. **On dit que deux vecteurs $\vec{X}$ $\vec{Y}$ de E sont conjugués (ou orthogonaux) relativement à la forme sesquilinéaire φ à symétrie hermitienne** (ou à la forme hermitienne Φ associée) **si**

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = 0.$$

D'après $\varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = \overline{\varphi(\vec{X}, \vec{Y})}$, cette condition équivaut à $\varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = 0$; elle est donc symétrique.

2° **Conséquences de la définition.** — Tout ce qui a été dit au n° **5**, 2° s'applique ici.

3° **Sous espace conjugué d'un sous-espace vectoriel de E.** — Tout ce qui a été dit au n° **5**, 3° s'applique ici : *l'ensemble* E″ *des vecteurs conjugués de tous les vecteurs d'un sous-espace vectoriel donné* E′ *de* E *est un sous-espace vectoriel de* E, *qui est appelé sous-espace conjugué de* E′ (on dit aussi que E″ est *orthogonal* à E′)

32. — *Vecteurs doubles. Noyau. Formes non dégénérées.* — DÉFINITION. **On appelle noyau de la forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne φ sur** E, **et de la forme hermitienne Φ engendrée par φ, le sous-espace conjugué de** E.

Le noyau est l'ensemble des vecteurs de E qui sont conjugués de tout vecteur de E; tout élément du noyau est dit *vecteur double* pour φ et Φ.

Les formes φ et Φ sont dites non dégénérées si leur noyau se réduit au vecteur nul.

Comme dans le cas d'une forme quadratique, *tout vecteur double est singulier, toute forme définie est non dégénérée,* mais les réciproques de ces propriétés ne sont pas vraies.

33. *Diagonalisation de la matrice représentative d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel de dimension finie.* — 1° THÉORÈME FONDAMENTAL. — **Étant donnés la forme hermitienne Φ sur l'espace vectoriel complexe E et un sous-espace E′ de E, de dimension finie, on peut trouver au moins une base de E′ formée de vecteurs deux à deux conjugués relativement à Φ.** Une telle base est dite parfois *orthogonale*.

La démonstration donnée au n° **8** s'applique sans modification.

2° **Diagonalisation.** — Soient Φ une forme hermitienne sur un espace vectoriel complexe E de dimension finie n, φ la forme polaire de Φ, r le rang de φ et Φ, S leur noyau.

D'après le théorème précédent, appliqué à E′ = E, il existe une base $\mathcal{E} = \{\vec{e_i}\}$ de E formée de vecteurs deux à deux conjugués relativement à φ et à Φ :

$$\forall\, i \neq j, \qquad \varphi(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = 0.$$

La matrice qui représente les formes φ et Φ dans la base $\mathcal{E}$ est la matrice diagonale Θ dont les éléments diagonaux sont les nombres réels $\theta_i = \Phi(\vec{e_i})$.

En effectuant, s'il y a lieu, une substitution sur les vecteurs de $\mathcal{E}$, nous pouvons supposer que $\theta_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, r$; $\theta_i = 0$ pour $i = r+1, \ldots, n$,

et écrire $$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_1^r \theta_i\, x_i\, \bar{y}_i \qquad \text{et} \qquad \Phi(\vec{X}) = \sum_1^r \theta_i\, |x_i|^2.$$

Le nombre p des réels θ_i positifs et le nombre $r - p$ des réels θ_i négatifs sont indépendants du choix de $\mathcal{E}$; c'est le *théorème d'inertie de Sylvester* que l'on démontre en procédant comme au nº **13**. On dit que le couple $(p, r-p)$ est la *signature* des formes φ et Φ.

3º **Relation entre le rang et le noyau.** — L'étude faite au nº **11** reste valable, à cela près que, ici,

$$\varphi(\vec{X}, \vec{s}) = 0 \qquad \text{s'écrit} \qquad \sum_1^r \theta_i x_i \bar{s}_i = 0.$$

Il en résulte :

$\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\Phi = \dim E - \dim S$
Φ non dégénérée $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg}\Phi = \dim E$
Φ dégénérée $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg}\Phi < \dim E$.

34. ***Forme hermitienne positive.*** — 1º DÉFINITION. — **La forme hermitienne Φ, application de E dans R, est dite positive si**

(1) $$\forall \vec{X} \in E \qquad \Phi(\vec{X}) \geqslant 0.$$

2º **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** — THÉORÈME. — **Soit Φ une forme hermitienne positive sur l'espace vectoriel complexe E, et φ la forme polaire de Φ. Pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs de E, on a l'inégalité, dite de Cauchy-Schwarz,**

(2) $$\left|\varphi(\vec{X}, \vec{Y})\right|^2 \leqslant \Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{Y}).$$

A tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs de E, nous pouvons associer l'application T_0 de C dans R définie par

$$T_0(\lambda) = \Phi(\vec{X} + \lambda\vec{Y}), \qquad \lambda \in C.$$

La formule de Taylor pour une forme hermitienne (28) permet d'expliciter

$$T_0(\lambda) = \lambda\bar{\lambda}\Phi(\vec{Y}) + \bar{\lambda}\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \lambda\varphi(\vec{Y}, \vec{X}) + \Phi(\vec{X}).$$

Désignons par ρ le module et par θ l'argument du nombre complexe $\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$:

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \rho e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = \rho e^{-i\theta}.$$

En nous astreignant à ne considérer que des nombres complexes λ de la forme

$$\lambda = re^{i\theta} \quad (r \in R),$$

nous associons au couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs de E l'application T de R dans R définie par

$$T(r) = \Phi(\vec{X} + re^{i\theta}\vec{Y}) = \Phi(\vec{Y}).r^2 + 2\rho r + \Phi(\vec{X}).$$

La positivité de Φ fait que $T(r)$ ne peut prendre aucune valeur négative.

Supposons $\Phi(\vec{Y}) \neq 0$; $T(r)$ est un trinôme du second degré qui ne peut avoir deux zéros distincts, ce qui se traduit par l'inégalité (2).

Supposons $\Phi(\vec{Y}) = 0$; on a nécessairement $\rho = 0$ car, dans le cas contraire, $T(r)$ serait un polynôme du premier degré et prendrait des valeurs négatives; (2) est vérifiée avec égalité des deux membres.

3° **Inégalité de Minkowski.** — THÉORÈME. — **Soit une forme hermitienne positive, sur l'espace vectoriel complexe E. Pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs de E, on a l'inégalité, dite de Minkowski,**

$$\sqrt{\Phi(\vec{X}+\vec{Y})} \leqslant \sqrt{\Phi(\vec{X})} + \sqrt{\Phi(\vec{Y})}. \tag{3}$$

En effet, nous avons, en utilisant la notation du 2°

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) + \varphi(\vec{Y}, \vec{X}) = \rho e^{i\theta} + \rho e^{-i\theta} \quad \text{ou} \quad 2\rho\cos\theta,$$

et, par suite,

$$\Phi(\vec{X}+\vec{Y}) = \Phi(\vec{X}) + 2\rho\cos\theta + \Phi(\vec{Y}). \tag{4}$$

D'autre part l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\rho \leqslant \sqrt{\Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{Y})}$, permet d'écrire, quel que soit le signe de $\cos\theta$,

$$\rho\cos\theta \leqslant \sqrt{\Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{Y})}. \tag{5}$$

Des relations (4) et (5), nous déduisons

$$\Phi(\vec{X}+\vec{Y}) \leqslant \Phi(\vec{X}) + 2\sqrt{\Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{Y})} + \Phi(\vec{Y}) \quad \text{ou} \quad \left(\sqrt{\Phi(\vec{X})} + \sqrt{\Phi(\vec{Y})}\right)^2 \tag{6}$$

Du fait de la positivité de Φ, les inégalités (6) et (3) sont équivalentes.

4° THÉORÈME. — **Pour une forme hermitienne positive, il y a identité entre le noyau et l'ensemble des vecteurs singuliers;** *une telle forme est définie si, et seulement si, elle est non dégénérée.*

La démonstration donnée au n° **14**, 4°, à propos des formes quadratiques réelles positives, est valable.

35. *Forme hermitienne définie positive.*

— 1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit Φ une forme hermitienne définie, sur l'espace vectoriel complexe E. Le réel $\Phi(\vec{X})$ a un signe fixe quel que soit le vecteur non nul $\vec{X}$ de E. Selon que ce signe est + ou —, la forme Φ est dite définie positive ou définie négative.**

Reprenons les notations du n° **34**, 2°, en nous limitant à un couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ formé de vecteurs non nuls. Compte tenu de $\Phi(\vec{Y}) \neq 0$,

$$T(r) = \Phi(\vec{X} + re^{i\theta}\vec{Y}) = \Phi(\vec{Y}).r^2 + 2\rho r + \Phi(\vec{X}) \qquad (r \in \mathrm{R}),$$

est un trinôme du second degré.

$$T(r) = 0 \iff \vec{X} + re^{i\theta}\vec{Y} = \vec{0}.$$

Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ ne sont pas colinéaires, $T(r)$ n'admet aucun zéro réel.

Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si $\vec{X} = k\vec{Y}$ ($k \in C$) on a, compte-tenu de $\Phi(\vec{Y}) \neq 0$,

$$\rho e^{i\theta} = \varphi(k\vec{Y}, \vec{Y}) = k\Phi(\vec{Y}) \quad \text{ou} \quad k = \rho e^{i\theta}\frac{1}{\Phi(\vec{Y})},$$

ce qui prouve que $T(r)$ admet le zéro unique

$$r = \frac{|\varphi(\vec{X}, \vec{Y})|}{\Phi(\vec{Y})}.$$

Ainsi $T(r)$ admet au maximum un zéro, ce qui exige $\Phi(\vec{X}).\Phi(\vec{Y}) > 0$.

En considérant que $\vec{Y} \neq \vec{0}$ reste fixe et que $\vec{X}$ parcourt l'ensemble des vecteurs non nuls de E, on obtient la proposition.

2° Dans le cas d'une forme définie, l'égalité dans la formule de Cauchy-Schwarz (34, 2°) a lieu, si, et seulement si, $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ forment un système lié (la démonstration donnée au n° 15, 2° reste valable).

Dans le cas d'une forme définie positive, l'égalité dans la formule de Minkowski (34 3°) a lieu si, et seulement si, $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont non nuls et liés par $\vec{X} = k\vec{Y}$, k réel et positif.

En effet, l'égalité dans la formule de Minkowski, compte tenu de la formule de Taylor, équivaut, avec les notations du n° 34, à

$$\rho\cos\theta > 0, \qquad \rho^2\cos^2\theta = \Phi(\vec{X})\,\Phi(\vec{Y}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\rho^2 \leqslant \rho^2\cos^2\theta$$

donne nécessairement

$$\cos\theta = 1.$$

L'égalité étant alors réalisée dans cette formule, il existe un complexe k tel que $\vec{X} = k\vec{Y}$;

or

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \rho = \varphi(k\vec{Y}, \vec{Y}) = k\Phi(\vec{Y})$$

montre que k est réel positif, ρ et $\Phi(\vec{Y})$ étant eux-mêmes réels positifs.

III. PRODUIT SCALAIRE HERMITIEN ET ORTHOGONALITÉ

36. ***Espace vectoriel hermitien.*** — 1° DÉFINITIONS. — **Soit E un espace vectoriel complexe.**

a) **On dit que cet espace vectoriel est hermitien dès qu'il a été muni d'une forme sesquilinéaire, possédant la symétrie hermitienne, dont la forme hermitienne associée est définie positive.**

b) **L'image du couple $(\vec{X}, \vec{Y}) \in E \times E$ par cette forme sesquilinéaire est appelée produit scalaire hermitien des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de E.**

Si φ désigne la forme sesquilinéaire choisie, l'image $\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$ du couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ est notée

$$\vec{X}.\vec{Y} \quad (\text{ou} \quad < \vec{X}, \vec{Y} >).$$

Par abus de langage, la forme sesquilinéaire φ est aussi appelée produit scalaire hermitien.

2° Axiomes du produit scalaire hermitien. — La définition du 1° entraîne que le produit scalaire hermitien est caractérisé par les axiomes suivants

quels que soient $\vec{X}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{Y}$ dans E, quel que soit λ dans C

$$\begin{cases} \vec{Y}.\vec{X} = \overline{\vec{X}.\vec{Y}} & (\alpha) \\ \left(\vec{X}_1 + \vec{X}_2\right).\vec{Y} = \vec{X}_1.\vec{Y} + \vec{X}_2.\vec{Y} & (\beta) \\ \left(\lambda\vec{X}\right).\vec{Y} = \lambda\left(\vec{X}.\vec{Y}\right) & (\gamma) \\ \vec{X} \neq \vec{0} \implies \vec{X}.\vec{X} > 0 & (\delta) \end{cases}$$

Les axiomes (α), (β), (γ) sont ceux qui définissent une forme sesquilinéaire qui possède la symétrie hermitienne. En effet, d'après (α) et (β)

$$\begin{aligned} \vec{X}.\left(\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2\right) &= \overline{\left(\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2\right).\vec{X}} = \overline{\vec{Y}_1.\vec{X}} + \overline{\vec{Y}_2.\vec{X}} \\ &= \vec{X}.\vec{Y}_1 + \vec{X}.\vec{Y}_2. \end{aligned}$$

D'après (α) et (γ)

$$\begin{aligned} \vec{X}.\left(\lambda\vec{Y}\right) &= \overline{\left(\lambda\vec{Y}\right).\vec{X}} = \overline{\lambda\left(\vec{Y}.\vec{X}\right)} = \bar{\lambda}\,\overline{\vec{Y}.\vec{X}} \\ &= \bar{\lambda}\left(\vec{X}.\vec{Y}\right) \end{aligned}$$

et l'on constate la semi-linéarité par rapport à $\vec{Y}$ (**25**, 1°).

L'axiome (δ) exprime que la forme hermitienne associée à $\vec{X}.\vec{Y}$ est définie, positive.

Exemple I. — Soit E = C^2, rapporté à sa base canonique $\left\{ \vec{e}_1 = (1,0),\ \vec{e}_2 = (0,1) \right\}$. Au couple rangé $\left(\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2,\ \vec{Y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2\right)$ associons le nombre complexe

$$\vec{X}.\vec{Y} = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \frac{1}{2}\left(x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_1\right). \tag{1}$$

Le lecteur constatera que les trois axiomes (α), (β), (γ) sont satisfaits. Étudions maintenant

$$\vec{X}.\vec{X} = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \frac{1}{2}\left(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1\right)$$

ou, en posant $x_1 = \alpha + i\beta$ et $x_2 = \alpha' + i\beta'$

$$\vec{X}.\vec{X} = (\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2) + (\beta^2 + \beta\beta' + \beta'^2).$$

Les formes quadratiques associées aux polynômes $\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2$ et $\beta^2 + \beta\beta' + \beta'^2$ sont définies positives; par suite

$$\vec{X} \neq \vec{0} \implies \vec{X}.\vec{X} \neq 0.$$

L'axiome (δ) est, lui aussi, vérifié; (1) est l'expression d'un produit scalaire hermitien.

Exemple II. — Les fonctions d'une variable réelle, à valeurs complexes, continues sur un segment donné $[a, b]$, $a < b$, forment un espace vectoriel E, sur le corps C.

A toute fonction g de E, associons la fonction $\bar{g}$ de E déterminée par

$$\forall x \in [a, b], \qquad \bar{g}(x) = \overline{g(x)}.$$

A tout couple rangé (f, g) de fonctions de E associons le nombre complexe

$$< f, g > = \int_a^b f(x)\, \bar{g}(x)\, dx.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que nous définissons ainsi un produit scalaire hermitien sur E.

*Remarque. — Certains auteurs font la distinction suivante :
Un espace vectoriel complexe muni d'une forme hermitienne positive s'appelle un *espace préhilbertien.* Si la forme est définie (c'est-à-dire non dégénérée), ou encore s'il s'agit de ce que nous venons d'appeler espace hermitien, l'espace préhilbertien est dit *séparé.*

3° **Norme hermitienne.** — La notion de norme peut être étendue à un espace vectoriel E sur le corps des complexes; les axiomes de définition sont ceux qui ont été énoncés au n° 135, 2° du tome III, à cela près que $|\lambda|$ désigne le module du nombre complexe λ (et non la valeur absolue du nombre réel λ)

En utilisant la même démonstration qu'au n° 16, 3° on obtient

Théorème et définition. — **L'espace vectoriel complexe E ayant été muni d'une structure hermitienne par l'introduction sur E, d'un produit scalaire hermitien $\vec{X}.\vec{Y}$, $\sqrt{\vec{X}.\vec{X}}$ est une norme sur E; elle est dite norme hermitienne** (ou encore *norme hilbertienne*). On la représente par $\|\vec{X}\|$.

Exemple I. — Au produit scalaire hermitien donné dans l'exemple du 2° est associée la norme

$$\left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exemple II. — La formule (5) du n° 28, 2°, appliquée dans le cas de $\Phi(\vec{X}) = \vec{X}.\vec{X}$ s'écrit (théorème de la médiane)

$$\|\vec{X}+\vec{Y}\|^2 + \|\vec{X}-\vec{Y}\|^2 = 2(\|\vec{X}\|^2 + \|\vec{Y}\|^2).$$

37. ***Vecteurs orthogonaux.*** — Soit E un espace vectoriel complexe, muni d'une structure hermitienne par l'introduction d'un produit scalaire hermitien, choisi une fois pour toutes et désigné par $\vec{X}.\vec{Y}$.

1° Définition. — **Deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de E sont dits orthogonaux si**

$$\vec{X}.\vec{Y} = 0.$$

Notons que, d'après $\vec{Y}.\vec{X} = \overline{\vec{X}.\vec{Y}}$, l'orthogonalité de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ s'exprime également par $\vec{Y}.\vec{X} = 0$.

2° Théorème I. — **Le vecteur nul de E est le seul vecteur de E qui soit orthogonal à tout vecteur de E.**

Théorème II. — **Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de E soient orthogonaux est**

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 + \|\vec{Y}\|^2. \tag{1}$$

Le lecteur se reportera aux démonstrations du n° 17, 2°; ici on a

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 + \vec{X}.\vec{Y} + \vec{Y}.\vec{X} + \|\vec{Y}\|^2; \tag{2}$$

$\vec{X}.\vec{Y} = 0$ entraîne (1), mais la réciproque n'est pas vraie, (1) permettant seulement d'affirmer que la partie réelle du nombre complexe $\vec{X}.\vec{Y}$ est nulle.

3° **Sous-espaces vectoriels orthogonaux.** — L'étude faite au n° 19 s'applique à condition de remplacer *quadratique* par *hermitienne* et *euclidien* par *hermitien*. En particulier : dans un espace vectoriel hermitien de dimension finie, si E″ est le sous-espace orthogonal au sous-espace E′, alors E′ est le sous-espace orthogonal à E″; E′ et E″ sont supplémentaires; ils sont dits sous-espaces orthogonaux.

38. ***Systèmes orthonormés.*** — 1° L'étude faite au n° 18, s'applique (en particulier le procédé de Schmidt) à condition de remplacer *euclidien* par *hermitien* et de considérer que les scalaires qui interviennent sont des nombres complexes.

2° **Expression du produit scalaire hermitien et de la norme hermitienne dans une base orthonormée.** — *a*) L'espace vectoriel hermitien E de dimension finie n étant rapporté à l'une quelconque de ses bases orthonormées $\mathcal{U}$, on a (18, 4°, *a*) avec les notations habituelles,

$$\vec{X}.\vec{Y} = x_1\overline{y_1} + \dots + x_n\overline{y_n} \qquad \text{et} \qquad \|\vec{X}\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

ou $\quad \vec{X}.\vec{Y} = \text{dét}(\tilde{X}\overline{Y}) \quad$ qui s'écrit aussi $\quad \vec{X}.\vec{Y} = \text{dét}(Y^{\dagger}X)$

b) L'espace vectoriel complexe E, de dimension finie, étant donné on le munit de la structure hermitienne la plus générale en choisissant arbitrairement une base de E et en considérant cette base comme orthonormée (18, 4° *b*).

On appelle *espace vectoriel hermitien* C^n l'espace vectoriel C^n dans lequel on considère que la base canonique est orthonormée.

c) Deux espaces vectoriels hermitiens de même dimension peuvent être rendus isomorphes, avec conservation du produit scalaire hermitien (18, 4° *c*).

IV. LE GROUPE UNITAIRE

39. ***Opérateurs unitaires.*** — 1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Les deux propriétés suivantes d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel hermitien E sont équivalentes :**

$$(\alpha) \qquad (\forall \vec{X} \in E), \qquad \| f(\vec{X}) \| = \| \vec{X} \|$$

$$(\beta) \qquad (\forall (\vec{X}, \vec{Y}) \in E^2), \qquad f(\vec{X}) . f(\vec{Y}) = \vec{X} . \vec{Y}.$$

Quand f possède ces propriétés, on dit que f conserve la norme hermitienne (et le produit scalaire hermitien).

La démonstration du n° 21, 1° s'applique, φ et ψ étant ici $\vec{X} . \vec{Y}$ et $f(\vec{X}) . f(\vec{Y})$, c'est-à-dire des formes sesquilinéaires à symétrie hermitienne, et Φ la forme hermitienne associée à φ, c'est-à-dire $\Phi(\vec{X}) = \vec{X} . \vec{X} = \| \vec{X} \|^2$.

2° **Opérateur unitaire.** — DÉFINITION. — **Tout automorphisme f d'un espace vectoriel hermitien qui conserve la norme hermitienne est dit opérateur unitaire.**

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **L'ensemble U(E) des opérateurs unitaires d'un espace vectoriel hermitien E est un sous-groupe du groupe linéaire GL(E); on dit que U(E) est le groupe unitaire de E.**

Le lecteur se reportera à la démonstration analogue du n° 21, 2°.

THÉORÈME. — **Si λ est une valeur propre de f, opérateur unitaire de E, alors** $|\lambda| = 1$.

Soit $\vec{V}$ un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ :

$$\left\{ f(\vec{V}) = \lambda \vec{V} \quad \text{et} \quad \| f(\vec{V}) \| = \| \vec{V} \| \right\} \implies |\lambda| \| \vec{V} \| = \| \vec{V} \|$$

et comme un vecteur propre n'est pas nul, $|\lambda| = 1$.

REMARQUE. — Le même raisonnement, appliqué à une isométrie f d'un espace vectoriel euclidien E, montre que si le réel λ est valeur propre de f, alors λ est égal à $+1$ ou à -1.

3° **Cas où** E **a une dimension finie.** — *a*) THÉORÈME. — **Tout endomorphisme f d'un espace vectoriel hermitien E, de dimension finie n, conservant la norme hermitienne, est un opérateur unitaire.**

Comme au n° 21, 3°, on montrera que f est alors bijectif.

b) *Représentation matricielle.* — THÉORÈME. — **Soit $\mathfrak{U}$ une base de E dans laquelle φ est représentée par la matrice hermitienne Ω. L'endomorphisme f de E est un opérateur unitaire si et seulement si la matrice S qui représente f dans la base $\mathfrak{U}$ vérifie**

$$(1) \qquad \Omega = \tilde{S} \, \Omega \, \bar{S}.$$

X et Y étant les matrices unicolonnes des coordonnées de $\vec{X}$ et $\vec{Y} = f(\vec{X})$ dans la base $\mathfrak{U}$,

$$\|\vec{X}\|^2 = \Phi(\vec{X}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\Omega\,\bar{X})$$

En tenant compte de $Y = SX$,

$$\|\vec{Y}\|^2 = \Phi(\vec{Y}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\tilde{S}\,\Omega\,\bar{S}\,\bar{X})$$

f conserve Φ si et seulement si les formes hermitiennes représentées dans la base $\mathfrak{U}$ par Ω et $\tilde{S}\,\Omega\,\bar{S}$ sont égales, ce qui donne (1).

Corollaire I. — Si $\mathfrak{U}$ est une base orthonormée de E, alors $\Omega = I_n$. Énonçons : E **étant rapporté à une base orthonormée, la matrice** S **représente un opérateur unitaire si et seulement si :** $\tilde{S}\,\bar{S} = I_n$.

Cette condition équivaut, par conjugaison, à $S^{\dagger}\,S = I_n$.

Corollaire II. — **Si** S **est un opérateur unitaire**

$$|\text{dét}\,S|^2 = 1.$$

L'égalité (1) entraîne $\text{dét}\,\Omega = \text{dét}\,\Omega . \text{dét}\,S .\,\text{dét}\,\bar{S}$. Or $\text{dét}\,\Omega \neq 0$, car φ n'est pas dégénérée, et $\text{dét}\,\bar{S}$ est conjugué de dét S.

c) Théorème et définition. — **L'ensemble** S U (E) **des opérateurs unitaires de** E **dont le déterminant est** 1 **est un sous-groupe distingué du groupe unitaire** U (E)**; il est appelé groupe unitaire spécial.**

La démonstration est la même que celle du n° **21**, 3°, *c*).

40. ***Matrices unitaires.*** — 1° Théorème et définition. — **Pour une matrice carrée** S **d'ordre** n, **à éléments complexes, les conditions suivantes (où** I **désigne la matrice unité d'ordre** n**) sont équivalentes :**

(1) $\tilde{S}\,\bar{S} = I$; (2) $S^{\dagger}S = I$; (3) $SS^{\dagger} = I$; (4) S **est inversible et** $S^{\dagger} = S^{-1}$.

Une matrice S **qui possède ces propriétés est dite unitaire.**

(1) et (2) sont équivalentes par conjugaison.

(2) (ou (3)) entraîne que S est inversible.

Alors (2) (ou (3)) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longleftrightarrow$ $\tilde{S} = (\bar{S})^{-1}$

Remarques. — *a*) S est unitaire si et seulement si $S^{\dagger}$ est unitaire;

b) I est unitaire;

c) Toute matrice orthogonale à éléments réels est unitaire et inversement toute matrice unitaire à éléments réels est orthogonale réelle.

Corollaire. — En comparant avec le n° **39**, 3°, *b*) on peut énoncer : **E étant rapporté à une base orthonormée, la matrice** S **représente un opérateur unitaire de** E **si et seulement si** S **est une matrice unitaire.**

2° **Propriétés des matrices unitaires.** — *a*) Théorème. — **Sur C, une matrice (n, n) est unitaire si, et seulement si ses vecteurs-colonnes (resp. lignes) forment une base orthonormée de l'espace hermitien C^n.**

En effet, en raisonnant comme au n° 22 (2°, *a* et 3°, *a*), avec cette fois S' au lieu de $\tilde{S}$ et $\sigma_{ij} = \overline{s_{ji}}$ au lieu de $\sigma_{ij} = s_{ji}$, on obtient

$$S \text{ unitaire} \iff \sum_{k=1}^{n} \overline{s_{ki}}\, s_{kj} = \delta_{ij} \iff \sum_{k=1}^{n} s_{ik}\, \overline{s_{jk}} = \delta_{ij}.$$

b) Nous avons ici (cf. 22, 2°, *b*),

$$|\text{dét } S| = 1 \qquad \text{et} \qquad S_{ij} = \text{dét } S \,.\, \overline{s_{ij}}.$$

c) Théorème. — **L'ensemble des matrices unitaires d'ordre donné n, muni de la multiplication des matrices, constitue un groupe.**

La démonstration est analogue à celle du n° 22, 2°, *d*) en remplaçant K par C, et « orthogonal » par « unitaire ». On peut aussi se reporter au n° 22, 3°, *b*).

L'ensemble des matrices unitaires d'ordre n dont le déterminant est $+ 1$ constitue un sous-groupe distingué du groupe des matrices unitaires d'ordre n.

Ce sous-groupe est isomorphe au groupe unitaire spécial de C^n (cf. 38, 2°, *b*).

d) Théorème. — **Une matrice unitaire ne peut admettre pour valeurs propres que des nombres complexes de module 1.**

La propriété résulte du n° 39, 2°. Elle s'applique, en particulier, à toute matrice orthogonale à éléments réels étudiée sur le corps C.

41. ***Changement de bases orthonormées dans un espace vectoriel hermitien.*** — En opérant comme au n° 23, 1°, on obtient :

Théorème. — **Dans un espace vectoriel hermitien de dimension finie, une matrice de passage transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée si, et seulement si, elle est unitaire.**

CHAPITRE IV

MATRICES HERMITIENNES MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n(1)

hermitien	euclidien
(sur le corps C)	(sur le corps R)

On y a fait choix, une fois pour toutes, d'un

produit scalaire hermitien	produit scalaire.

Nous n'envisagerons, dans E, que des bases orthonormées.

Une base ayant été choisie dans E, il y a isomorphisme entre l'anneau des endomorphismes de E et l'anneau des matrices carrées (n, n); elle justifie que nous donnions simultanément des définitions générales intrinsèques sur certains endomorphismes, et les propriétés correspondantes des matrices associées.

42. ***Endomorphisme adjoint*** (resp. ***symétrique) d'un endomorphisme donné.*** — 1° DÉFINITION. — **Étant donné un endomorphisme f de E, un endomorphisme g de E est dit**

adjoint	**symétrique**

de f si

(1) $$\forall \vec{X} \in E, \quad \forall \vec{Y} \in E \quad \vec{X}.g(\vec{Y}) = f(\vec{X}).\vec{Y}.$$

Dans cette définition, f et g jouent un rôle symétrique. En effet, en utilisant

$\vec{U}.\vec{V} = \overline{\vec{V}.\vec{U}}$	$\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$

(1) Les définitions données aux nos 42, 1° et 43, 1° sont cependant valables si E est de dimension infinie.

et en transposant $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ on constate que (1) équivaut à

$$\forall \vec{X} \in E, \quad \forall \vec{Y} \in E, \qquad g(\vec{X}).\vec{Y} = \vec{X}.f(\vec{Y}).$$

2° <u>Théorème.</u> — **Dans toute base orthonormée $\mathcal{U}$ de E,**

deux endomorphismes f et g sont

adjoints	**symétriques**

si et seulement si les matrices A et B qui les représentent sont

transconjuguées	**transposées.**

Soit en effet X et Y les matrices $(n, 1)$ des coordonnées des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ de E, dans la base $\mathcal{U}$.

Le vecteur $f(\vec{X})$, et le vecteur $g(\vec{Y})$ sont respectivement associés aux matrices unicolonnes AX et BY.

$\vec{X}.g(\vec{Y}) = \text{dét}\left[\tilde{X}(\overline{BY})\right]$	$\vec{X}.g(\vec{Y}) = \text{dét}\left[\tilde{X}(BY)\right]$
$f(\vec{X}).\vec{Y} = \text{dét}\left[(\text{tr}\, AX)\overline{Y}\right]$	$f(\vec{X}).\vec{Y} = \text{dét}\left[(\text{tr}\, AX)\, Y\right]$

La relation (1) équivaut alors à

(2) $\quad \tilde{X}\bar{B}\bar{Y} = \tilde{X}\tilde{A}\bar{Y}$	$\tilde{X}BY = \tilde{X}\tilde{A}Y,$

ce qui s'écrit

(3) $\quad \tilde{X}\bar{B}Y = \tilde{X}\tilde{A}Y$	$\tilde{X}BY = \tilde{X}\tilde{A}Y,$

relation valable quelles que soient les matrices unicolonnes X et Y.

On reconnaît l'égalité des deux formes bilinéaires représentées, dans la base $\mathcal{U}$, par

$\bar{B}$ et $\tilde{A}$.	B et $\tilde{A}$.

Cette égalité équivaut à l'égalité des matrices correspondantes; la proposition en résulte.

Corollaire. — Si E est de dimension finie, tout endomorphisme f de E admet un, et un seul, endomorphisme adjoint (resp. symétrique), qu'il est commode de désigner par $f^{\dagger}$ (resp. $\tilde{f}$). Nous expliquerons au n° 113, 3° qu'il n'est pas contradictoire de désigner par le même symbole l'endomorphisme transposé (I, 186) et l'endomorphisme symétrique de f.

Si E est de dimension infinie, on peut seulement démontrer (cf. exercice n° 17) que si f admet un adjoint (resp. symétrique), ce dernier est unique.

3° Théorème. — **Un automorphisme f de E est**

unitaire	**orthogonal**

si et seulement s'il admet f^{-1} pour

adjoint	**symétrique.**

I. Supposons que f soit un automorphisme de E qui conserve le produit scalaire; f^{-1} jouit de la même propriété :

$$\left(\forall\left(\vec{X},\ \vec{Y}\right) \in E^2\right) \qquad f\left(\vec{X}\right).\vec{Y} = f^{-1}\left[f\left(\vec{X}\right)\right].f^{-1}\left(\vec{Y}\right) \qquad \text{ou} \qquad \vec{X}.f^{-1}\left(\vec{Y}\right)$$

ce qui montre que f admet f^{-1} pour adjoint (resp. symétrique).

II. Supposons (dans le cas hermitien) que $f^{\dagger}$ soit aussi f^{-1}

$$\left(\forall\left(\vec{X},\ \vec{Y}\right) \in E^2\right) \qquad f\left(\vec{X}\right).\vec{Y} = \vec{X}.f^{\dagger}\left(\vec{Y}\right)$$

En remplaçant $\vec{Y}$ par $f\left(\vec{X}\right)$:

$$f\left(\vec{X}\right).f\left(\vec{X}\right) = \vec{X}.f^{\dagger}\left(f\left(\vec{X}\right)\right) \qquad \text{ou} \qquad \vec{X}.\vec{X}$$

f conserve la norme, f est inversible, donc f est un opérateur unitaire.

43. — ***Endomorphisme auto-adjoint*** (resp. ***auto-symétrique***).

1° Définition. — **Un endomorphisme f de E est dit**

auto-adjoint	**auto-symétrique**

s'il est son propre

adjoint	**symétrique,**

c'est-à-dire si

$$\forall \vec{X} \in E,\ \forall \vec{Y} \in E \qquad \vec{X}.f\left(\vec{Y}\right) = f\left(\vec{X}\right).\vec{Y}.$$

Remarque. — Si f et f_1 sont deux endomorphismes

auto-adjoints	auto-symétriques

il en est de même pour $f + f_1$, pour λf (à condition que λ soit réel), pour $f_1 \circ f$ (à condition que f et f_1 commutent), pour f^{-1} (à condition que f soit injectif). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ces propriétés et d'en déduire que

les endomorphismes auto-adjoints d'un espace vectoriel hermitien forment un espace vectoriel sur R.	*les endomorphismes auto-symétriques d'un espace vectoriel euclidien forment un espace vectoriel sur* R.

2° Théorème. — **Dans toute base orthonormée de E, un endomorphisme de E est**

auto-adjoint	**auto-symétrique**

si, et seulement si, la matrice qui le représente est

hermitienne	**symétrique**

En effet, il faut et il suffit (42, 2°) que cette matrice coïncide avec sa

transconjuguée	transposée.

Notons que certains auteurs utilisent le vocable d'endomorphisme *hermitien* (resp. *symétrique*) au lieu d'endomorphisme *auto-adjoint* (resp. *auto-symétrique*).

REMARQUE. — Le fait, pour un endomorphisme de E, d'être représenté par une matrice

hermitienne | symétrique

est donc invariant dans un changement de base orthonormée.

3° **Valeurs propres. Vecteurs propres.** — Soit f un endomorphisme de E

auto-adjoint | auto-symétrique,

soient $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ deux vecteurs propres de f,

associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

$$f\left(\vec{X}_1\right) = \lambda_1\vec{X}_1 \quad \text{et} \quad f\left(\vec{X}_2\right) = \lambda_2\vec{X}_2.$$

Par hypothèse

$$\vec{X}_1 . f\left(\vec{X}_2\right) = f\left(\vec{X}_1\right) . \vec{X}_2, \quad \text{ce qui s'écrit}$$

$$\overline{\lambda_2}\left(\vec{X}_1 . \vec{X}_2\right) = \lambda_1\left(\vec{X}_1 . \vec{X}_2\right) \quad \text{ou}$$

(1) $$\left(\overline{\lambda_2} - \lambda_1\right)\left(\vec{X}_1 . \vec{X}_2\right) = 0$$

a) En particulier, pour $\vec{X}_1 = \vec{X}_2$, ce qui entraîne $\lambda_1 = \lambda_2$, (1) s'écrit

$$\left(\overline{\lambda_1} - \lambda_1\right)\left\|\vec{X}_1\right\|^2 = 0.$$

Un vecteur propre n'étant pas nul, cela exige $\overline{\lambda_1} = \lambda_1$ et on peut énoncer :

THÉORÈME I. — **Sur un espace vectoriel hermitien, les valeurs propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont des nombres réels.**

$$\lambda_2\left(\vec{X}_1 . \vec{X}_2\right) = \lambda_1\left(\vec{X}_1 . \vec{X}_2\right) \quad \text{ou}$$

(1) $$(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\vec{X}_1 . \vec{X}_2\right) = 0.$$

Naturellement, un espace vectoriel euclidien n'étant défini que sur le corps des réels, les valeurs propres d'un endomorphisme auto-symétrique ne sauraient être que des nombres réels.

b) Supposons maintenant $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

ce qui entraîne $\overline{\lambda_2} \neq \lambda_1$ (théorème I). |

L'égalité (1) exige $\vec{X}_1 . \vec{X}_2 = 0$ et nous pouvons énoncer :

THÉORÈME II. — **Dans tout endomorphisme**

auto-adjoint | auto-symétrique,

deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

4° **Application aux matrices.** — I. Soit une matrice hermitienne A d'ordre n. Nous pouvons considérer que A traduit un endomorphisme auto-adjoint f dans un espace vectoriel hermitien rapporté à une base orthonormée. Les valeurs propres de f, qui sont aussi celles de A, sont les n zéros, distincts ou confondus, du polynôme caractéristique (de degré n)

$$\Delta(\lambda) = \text{dét}\,(A - \lambda I).$$

D'après le théorème I du 3°, ces valeurs propres sont réelles, et nous pouvons énoncer :

Théorème. — **Toute matrice hermitienne d'ordre n admet n valeurs propres réelles, distinctes ou confondues.**

Notons que le polynôme $\Delta(\lambda)$ dans lequel le coefficient de λ^n est $(-1)^n$ et dont les zéros sont réels est à coefficients réels.

II. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n; étudiée sur le corps C, A est une matrice hermitienne, et le résultat obtenu au I précédent permet d'énoncer :

Théorème. — **Toute matrice symétrique réelle d'ordre n admet n valeurs propres réelles, distinctes ou confondues.**

Il en résulte que, sur un espace vectoriel euclidien de dimension n, tout endomorphisme auto-symétrique admet n valeurs propres réelles, distinctes ou confondues.

Nous avons déjà utilisé le fait que tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe admet au moins un vecteur propre (I, n° **231**).

44. ***Diagonalisation d'un endomorphisme auto-adjoint*** (resp. ***auto-symétrique)***. — 1° Lemme. — **Le sous-espace orthogonal d'un vecteur propre d'un endomorphisme f.**

auto-adjoint	**auto-symétrique**

est stable pour f.

Soit $\vec{V}$ un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ, et E′ le sous-espace orthogonal de $\vec{V}$. Pour tout vecteur $\vec{X}$ de E′, nous avons

$$\vec{V}.f(\vec{X}) = f(\vec{V}).\vec{X} \quad \text{ou} \quad \lambda\vec{V}.\vec{X}; \quad \text{or} \quad \vec{V}.\vec{X} = 0,$$

par suite $\quad \vec{V}.(\vec{X}) = 0 \quad$ ou $\quad f(\vec{X}) \in E'.$

Ainsi l'image par f de tout vecteur de E′ est dans E′; c'est ce que nous traduisons en disant que E′ est stable pour f.

La restriction, $\hat{f}$, de f à E′ est un endomorphisme de E′, évidemment

auto-adjoint | auto-symétrique,

la relation $$\vec{X}.f(\vec{Y}) = f(\vec{X}).\vec{Y}$$

étant vraie, en particulier, pour tout couple de vecteurs de E′.

2° Théorème. — **Soit f un endomorphisme de E**

auto-adjoint | auto-symétrique.

Tout sous-espace, E′, de E, qui est stable pour f, possède au moins une base orthonormée formée de vecteurs propres de f.

Nous démontrerons cette proposition par récurrence sur la dimension de E′.

I. Soit E′ un sous-espace de E de dimension 1, supposé stable pour f; pour tout vecteur non nul, $\vec{X}$, de E′, $f(\vec{X})$ est un vecteur de E′, c'est-à-dire un vecteur de la forme $\lambda\vec{X}$; $\vec{X}$ est donc un vecteur propre de f et le vecteur $\dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ constitue une base orthonormée de E′ formée d'un vecteur propre de f.

II. Supposons que le théorème est vrai pour tout sous-espace de dimension $p - 1$, stable pour f, et considérons le sous-espace E′ de dimension $p \geqslant 2$, stable pour f.

La restriction $\hat{f}$ de f à E′, qui est (d'après le lemme) un endomorphisme

auto-adjoint | auto-symétrique,

de E′ admet au moins un vecteur propre (43) et par suite un vecteur propre unitaire, $\vec{e}_p$, qui est d'ailleurs vecteur propre unitaire de f.

Dans E′, $\vec{e}_p$ admet un sous-espace orthogonal, E″, de dimension $p - 1$; E″ est (d'après le lemme) stable pour $\hat{f}$, et par suite pour f. D'après l'hypothèse de récurrence, E″ admet une base orthonormée $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{p-1}\}$ formée de vecteurs propres de f; E″ étant supplémentaire, dans E′, du sous-espace de dimension 1 engendré par $\vec{e}_p$, il en résulte que $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{p-1}, \vec{e}_p\}$ est une base de E′; on constate que cette base est orthonormée et formée de vecteurs propres de f.

3° Corollaire. — **Soit f un endomorphisme de E**

auto-adjoint | auto-symétrique.

On peut trouver au moins une base orthonormée de E, formée de vecteurs propres de f.

Il suffit d'appliquer le 2° à l'espace vectoriel E lui-même, puisqu'il peut être considéré comme sous-espace vectoriel de E stable pour f.

4° **Diagonalisation.** — THÉORÈME. — **Étant donnée une matrice A**

hermitienne	**symétrique réelle**

il existe au moins une matrice S

unitaire	**orthogonale réelle**

telle que la matrice $A' = S^{-1}AS$ **soit diagonale, réelle.**

Nous pouvons considérer que A traduit un endomorphisme f

auto-adjoint	auto-symétrique

dans un espace vectoriel E, de dimension finie, rapporté à une base orthonormée $\mathcal{U}$. D'après le 3°, il existe une base orthonormée $\mathcal{U}'$ de E formée de vecteurs propres de f.

Dans la base $\mathcal{U}'$, f est représenté (I, 233 et 234) par une matrice diagonale A' dont les n éléments diagonaux sont les n valeurs propres λ_k, réelles, distinctes ou confondues, de A.

La matrice de passage, S, de la base orthonormée $\mathcal{U}$ à la base orthonormée $\mathcal{U}'$ répond à la question; or S est une matrice

unitaire (n° 41)	orthogonale réelle (n° 23)

45. ***Réduction d'une forme quadratique réelle dans le groupe orthogonal.*** — Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et Φ une forme quadratique sur E.

E est rapporté initialement à une base orthonormée $\mathcal{U} = \{\vec{u}_k\}$; dans cette base, Φ est représentée par une matrice symétrique Ω, et l'on a

$$\Phi(\vec{X}) = \text{dét}\left(\tilde{X}\,\Omega\,X\right),$$

X étant la matrice unicolonne des coordonnées du vecteur $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{U}$.

Appliquons la diagonalisation d'une matrice symétrique réelle. Nous savons qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{U}' = \{\vec{u}'_k\}$ de E, formée de vecteurs propres de Ω, telle que, S désignant la matrice (orthogonale) de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$, la matrice

$$\Lambda = S^{-1}\Omega S$$

soit une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les n valeurs propres λ_k, réelles, distinctes ou confondues, de Ω.

Comme S est orthogonale, $S^{-1} = \tilde{S}$ et $\Lambda = \tilde{S}\,\Omega\,S$; il en résulte que Λ représente Φ dans la base $\mathcal{U}'$ et que, finalement, X' étant la matrice unicolonne des coordonnées de $\vec{X}$ dans $\mathcal{U}'$,

$$\Phi(\vec{X}) = \text{dét}\left(\tilde{X}'\,\Lambda\,X'\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k'^2, \qquad \text{avec} \qquad \vec{X} = \sum_{k=1}^{n} x'_k \vec{u}'_k.$$

Remarque. — **Pour qu'une forme quadratique soit définie positive, il faut et il suffit que les valeurs propres de la matrice représentative dans une base orthonormée quelconque soient toutes strictement positives.**

Exemple. — On donne l'espace vectoriel euclidien E, de dimension 3, rapporté à la base orthonormée $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_3\}$.

Soit $\vec{X} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ un vecteur de E. On demande de réduire la forme quadratique réelle Φ donnée par

$$\Phi(\vec{X}) = x_1^2 + 3\,x_2^2 - 3\,x_3^2 - 8\,x_2x_3 + 2\,x_3x_1 - 4\,x_1x_2.$$

Nous avons ici

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-6)(\lambda+5).$$

Les valeurs propres de Ω sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -5$. A chacune d'elles correspond une direction propre, fournie par un système de rang 2, dont nous retenons seulement

$$\begin{cases} (1-\lambda_k)x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0 \\ -2\,x_1 + (3-\lambda_k)x_2 - 4\,x_3 = 0. \end{cases}$$

D'où les vecteurs propres unitaires, respectivement associés à λ_1, λ_2, λ_3

$$\vec{u}'_1\left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}\right); \quad \vec{u}'_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right); \quad \vec{u}'_3\left(0, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right).$$

Nous avons

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \vec{u}'_3 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ u_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{array} = S \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Dans la base $\mathfrak{U}' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3\}$, la forme Φ associe au vecteur

$$\vec{X} = x'_1\vec{u}'_1 + x'_2\vec{u}'_2 + x'_3\vec{u}'_3,$$

le scalaire
$$\Phi(\vec{X}) = 6\,(x'_2)^2 - 5\,(x'_3)^2.$$

46. *Réduction d'une forme hermitienne dans le groupe unitaire.*

— Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie n et $\Phi(\vec{X})$ une forme hermitienne sur E.

Initialement E est rapporté à une base orthonormée $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_k\}$; Φ est représentée par une matrice hermitienne Ω. Nous avons (29, 2°)

(1) $$\Phi(\vec{X}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\Omega\,\overline{X}).$$

Nous allons appliquer la diagonalisation d'une matrice hermitienne (**44**, 4°) non pas à Ω (1), mais à sa transposée $\tilde{\Omega}$, qui est aussi $\overline{\Omega}$.

Nous savons qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{U}' = \{ \vec{u}'_k \}$ de E, formée de vecteurs propres de $\tilde{\Omega}$, telle que (S désignant la matrice (unitaire) de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$), la matrice $S^{-1}\tilde{\Omega}S$ est une matrice diagonale Λ dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres réelles λ_k communes à $\tilde{\Omega}$ et à Ω.

Comme S est unitaire, $S^{-1} = S^\dagger$ et $\Lambda = S^\dagger \tilde{\Omega} S$ ou $\tilde{\Lambda} = \tilde{S}\,\Omega\,\overline{S}$; il en résulte que $\tilde{\Lambda}$, qui n'est autre que Λ, représente Φ dans la base $\mathcal{U}'$; d'où, en désignant par X' la matrice unicolonne des coordonnées de $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{U}'$,

$$\Phi(\vec{X}) = \text{dét}\left(\tilde{X}' \Lambda \overline{X'}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x'_k|^2, \qquad \text{avec} \qquad \vec{X} = \sum_{k=1}^{n} x'_k \vec{u}'_k.$$

Application. — On en déduit que *pour qu'une forme hermitienne soit définie positive il faut et il suffit que les valeurs propres de la matrice représentative, dans une base orthonormée quelconque, soient toutes strictement positives.*

Exemple. — On donne l'espace vectoriel hermitien E, de dimension 3, rapporté à la base orthonormée $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \}$.

Soit $\vec{X} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ un vecteur de E.

On demande de réduire la forme hermitienne Φ donnée par

$$\Phi(\vec{X}) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 - ix_1\bar{x}_2 + ix_2\bar{x}_1.$$

Nous avons ici

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique commun à Ω et $\tilde{\Omega}$ est $\Delta(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)$.

A la valeur propre $\lambda = 0$ correspondent, pour $\tilde{\Omega}$, des vecteurs propres donnés par $x_1 + ix_2 = 0$; il s'agit de tous les vecteurs de la forme $(1, i, x_3)$ et $(0, 0, x_3)$ parmi eux choisissons deux vecteurs unitaires orthogonaux, par exemple $\vec{u}'_1(0, 0, 1)$ et $\vec{u}'_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

A la valeur propre $\lambda = 2$ correspondent, pour $\tilde{\Omega}$, des vecteurs propres donnés par

$$\begin{cases} -x_1 + ix_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

(1) Le lecteur observera que les vecteurs propres qui interviennent sont ceux de $\tilde{\Omega}$, (et non ceux de Ω). Cela tient à ce que, comme dans la majorité des ouvrages récents, nous avons défini les formes hermitiennes à partir de formes sesquilinéaires à droite (et non à gauche).

Choisissons parmi eux le vecteur unitaire $\vec{u}'_3\left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Nous avons

$$\begin{array}{c|c} & \vec{u}'_1 \quad \vec{u}'_2 \quad \vec{u}'_3 \\ \hline \begin{array}{c} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{S} \qquad \text{et} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dans la base $\mathcal{U}' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3\}$, la forme hermitienne a pour expression

$$\Phi(\vec{X}) = 2\, x'_3 \overline{x'_3}, \qquad \left(\text{avec} \quad \vec{X} = x'_1\vec{u}'_1 + x'_2\vec{u}'_2 + x'_3\vec{u}'_3\right).$$

47. ***Endomorphismes auto-adjoints*** (resp. ***auto-symétriques) et formes hermitiennes*** (resp. ***quadratiques***).

1° Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie n. Désignons par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ l'ensemble des endomorphismes h auto-adjoints de E et l'ensemble des formes hermitiennes Φ sur E; il s'agit d'espaces vectoriels sur R (cf. **28**, 5° et **44**, 1°). On vérifie aisément que l'application w de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ déterminée par :

« $\Phi = w(h)$ signifie : $\quad (\forall \vec{X} \in E) \qquad \Phi(\vec{X}) = h(\vec{X}).\vec{X}$ »

est un homomorphisme d'espaces vectoriels réels.

Si A et Ω sont les matrices hermitiennes qui représentent respectivement h et Φ dans une base orthonormée, arbitraire, de E, on a :

$$h(\vec{X}).\vec{X} = \text{dét}(\tilde{X}\,\tilde{A}\,\overline{X}); \qquad \Phi(\vec{X}) = \text{dét}(\tilde{X}\,\Omega\,\overline{X}).$$

$\Phi = w(h)$ équivaut donc à : $\qquad \tilde{A} = \Omega.$

En résumé, dans toute base orthonormée de E, h et $\Phi = w(h)$ sont représentés par des matrices hermitiennes transposées (et aussi bien conjuguées) l'une de l'autre. Il en résulte que w est bijectif : w est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

L'une des matrices Ω et Ω est diagonale réelle si et seulement si l'autre l'est, les deux matrices étant alors égales; la diagonalisation d'un endomorphisme auto-adjoint et celle d'une forme hermitienne ne sont que deux aspects d'un même problème.

2° **Diagonalisation simultanée de deux formes hermitiennes** (resp. **quadratiques**). — Dans cette étude, E est un espace vectoriel complexe de dimension n. Soient Φ et Ψ deux formes hermitiennes sur E, de formes polaires φ et ψ; supposons Φ définie positive.

Munissons E d'une structure hermitienne en adoptant φ pour produit scalaire; il existe des bases de E orthonormées pour le produit scalaire φ (Φ y est représentée par la matrice-unité I_n) dans lesquelles Ψ est représentée par une matrice diagonale réelle. Ces bases orthonormées de E diagonalisent l'endomorphisme auto-adjoint $h = w^{-1}(\Psi)$, ce qui permettra de les déterminer. Dans chacune d'elles Ψ et h sont représentés par une même matrice diagonale réelle, dont les éléments diagonaux, qui sont les valeurs propres de h, sont connus *a priori*; on les appelle invariants de Ψ par rapport à Φ.

Dans la pratique, Φ et Ψ sont données par les matrices hermitiennes A et B (A étant inversible) qui les représentent dans une base arbitrairement choisie, $\mathcal{U}$, de E.

$$\Psi(\vec{X}) = \text{dét}(\tilde{X} B \bar{X}) \qquad \vec{X}.\vec{Y} = \text{dét}(\tilde{X} A \bar{Y}).$$

La matrice C qui représente h dans $\mathcal{U}$ s'obtient grâce à

$$\Psi(\vec{X}) = h(\vec{X}).\vec{X},$$

$h(\vec{X})$ étant représenté par la matrice CX. On a donc

$$\Psi(\vec{X}) = \text{dét}(\tilde{X}\tilde{C} A \bar{X}).$$

Par suite $B = \tilde{C}A$ d'où $\tilde{C} = BA^{-1}$ et aussi, par transconjugaison, $\bar{C} = A^{-1}B$. On commence par calculer les invariants λ_i au titre de valeurs propres de C. On cherche ensuite les bases orthonormées relativement à φ formées de vecteurs propres de h, c'est-à-dire les bases $\mathcal{E}$ qui vérifient

$$\begin{cases} (\forall (k, l) \in [1, n]^2), & \varphi(\vec{e_k}, \vec{e_l}) = \delta_{kl} \\ (\forall k \in [1, n]), & h(\vec{e_k}) = \lambda_k \vec{e_k}. \end{cases}$$

Dans une de ces bases

$$\Phi(\vec{X}) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\xi_k}, \qquad \Psi(\vec{X}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k \overline{\xi_k}.$$

Remarque. — On montre, de la même façon, que l'on peut diagonaliser simultanément deux formes quadratiques sur un espace vectoriel réel, dans la mesure où l'une d'elles est définie positive.

EXERCICES
(Chapitres III et IV)

1. — *a*) Soient A et B deux matrices (n, n) à éléments réels. Montrer que si A est symétrique et B antisymétrique, $A + iB$ est une matrice hermitienne. Étudier la réciproque.

b) Toute matrice $M(n, n)$ à éléments complexes s'écrit d'une, et une seule, façon $M = A + iA'$, A et A' désignant des matrices hermitiennes.

2. — La somme des carrés des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle est égale à la somme des carrés des éléments de cette matrice.

3. — Pour chacune des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3i \\ 3i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

chercher les valeurs propres, les vecteurs propres et vérifier qu'il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres.

4. — A toute matrice (n, n), $A = [a_{ij}]$, à éléments complexes, on associe le réel

$$\|A\| = (\Sigma\, a_{ij}\overline{a_{ij}})^{\frac{1}{2}}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur l'ensemble E des matrices (n, n) à éléments complexes, considéré comme espace vectoriel sur C.

b) Établir les relations

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\| \qquad \text{et} \qquad \|A\|^2 = \text{trace}\,(AA^\dagger) = \text{trace}\,(A^\dagger A).$$

c) Dans le cas où A est hermitienne, exprimer $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A.

5. — Par une transformation orthogonale que l'on précisera, réduire la forme quadratique f de l'espace euclidien R^3 donnée par

$$f(x_1, x_2, x_3) = k(x_1^2 + x_2^2) + \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} - x_3\right)^2$$

$$(k \in R).$$

6. — Par une transformation orthogonale que l'on précisera, réduire la forme quadratique f de l'espace euclidien R^4 donnée par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2.$$

7. — On donne la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \cos u \cos v - i \sin u \sin v & -\sin u \cos v - i \cos u \sin v \\ \sin u \cos v - i \cos u \sin v & \cos u \cos v + i \sin u \sin v \end{bmatrix} \qquad (u, v \in R)$$

a) Démontrer que A est une matrice unitaire. Déterminer ses valeurs propres λ et μ; vérifier que $|\lambda| = |\mu| = 1$

b) Calculer A^{-1}.

8. — Reprendre l'exercice 2 du chapitre II et le traiter dans l'hypothèse où les vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ du *b*) sont des éléments d'un espace vectoriel hermitien.

9. — *Matrice de Gram.* Reprendre l'exercice 12 du chapitre II dans un espace vectoriel hermitien.

10. — Reprendre l'exercice 13 du chapitre II dans un espace vectoriel hermitien.

11. — A toute suite $\{ x_n \}$, sur le corps des complexes, on associe la série $\sum_1^\infty |x_n|^2$ et on considère l'ensemble E formé par les suites $\{ x_n \}$ dont la série associée est convergente.

a) Montrer que E est un espace vectoriel sur C.

b) A deux éléments, $\{ x_n \}$ et $\{ y_n \}$, de E on associe la série $\sum_1^\infty x_n \overline{y_n}$. Montrer que cette série est absolument convergente.

Montrer que l'application de E × E dans C qui associe aux deux suites $\{ x_n \}$ et $\{ y_n \}$ la somme de la série $\sum_1^\infty x_n \overline{y_n}$ est un produit scalaire hermitien qui permet de munir E d'une structure d'espace vectoriel hermitien.

12. — Soit A une matrice hermitienne et I la matrice unité de même ordre. Montrer que :

a) Les matrices $A + iI$ et $A - iI$ sont régulières;

b) La matrice $B = (A + iI)(A - iI)^{-1}$ est unitaire.

13. — Soit $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle d'ordre 6, dont la 1re ligne et la 1re colonne sont respectivement

$$\{ 0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \} \quad \text{et} \quad \{ 0, -x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5 \},$$

les autres éléments de la matrice étant des constantes.

Montrer que le polynôme quadratique F est le produit de deux polynômes linéaires, aux indéterminées x_k, $(k = 1, \ldots, 5)$.

14. — L'espace vectoriel réel E des fonctions réelles de la variable réelle continues sur le segment $[a, b]$ $(a < b)$ a été rendu euclidien par l'adoption du produit scalaire (cf. n° 16)

$$< f, g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Soit K (x, y) une fonction réelle de deux variables réelles, continue sur le carré $x \in [a, b]$, $y \in [a, b]$, telle que : $K(y, x) = K(x, y)$ en tout point du carré.

A toute fonction f de E on associe la fonction $f_1 = \tau(f)$ de E déterminée par

$$\forall x \in [a, b], \quad f_1(x) = \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy.$$

Montrer que τ est un endomorphisme auto-symétrique de E.

15. — Un espace vectoriel hermitien E, de dimension finie n, est rapporté à une base $\mathfrak{U} = \{ \vec{u}_k \}$, orthonormée ou non. On désigne par G la matrice dont les éléments sont les produits scalaires hermitiens $g_{ij} = \vec{u}_i . \vec{u}_j$, (matrice de Gram, cf. ex. 9).

Montrer que l'endomorphisme f de E, traduit dans la base $\mathfrak{U}$ par la matrice A, est auto-adjoint si, et seulement si, A vérifie la relation : $GA = A^\dagger G$.

16. — Dans un espace vectoriel hermitien E, on considère un endomorphisme auto-adjoint f tel que le réel $f(\vec{X}).\vec{X}$ soit positif ou nul, pour tout vecteur $\vec{X}$ de E. Montrer que

$$\forall \vec{X} \in E, \quad \| f(\vec{X}) \|^4 \leqslant [f(\vec{X}).\vec{X}] \times [f^2(\vec{X}).f(\vec{X})].$$

17. — Soit E un espace vectoriel hermitien (resp. euclidien) de dimension infinie. Montrer que :

a) Si un endomorphisme f de E admet un endomorphisme adjoint (resp. symétrique), ce dernier est unique.

b) Si deux endomorphismes f et g de E admettent chacun un endomorphisme adjoint (resp. symétrique), il en est de même pour $f + g$ et $f \circ g$.

18. — *Endomorphisme normal.* — Dans un espace vectoriel hermitien E, on appelle normal tout endomorphisme f qui admet un endomorphisme adjoint g tel que f et g commutent :

a) Montrer qu'un endomorphisme normal et l'endomorphisme adjoint admettent les mêmes vecteurs propres et des valeurs propres deux à deux conjuguées.

b) Montrer que les vecteurs propres d'un endomorphisme normal qui correspondent à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

c) Montrer qu'étant donné un espace vectoriel hermitien E de dimension finie :

α) à tout endomorphisme normal f de E on peut associer au moins une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f,

β) si un endomorphisme f de E est représenté dans une base orthonormée de E par une matrice diagonale, f est normal.

(on s'inspirera de l'étude des endomorphismes auto-adjoints, nos 44 et 45).

19. — Dans l'espace vectoriel hermitien C^n, rapporté à sa base canonique, on donne les deux formes hermitiennes positives, Φ et Ψ de rangs p et q, déterminées par

$$\Phi(\vec{X}) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i \overline{x_j} \qquad \text{et} \qquad \Psi(\vec{X}) = \sum_{i,j} b_{ij}\, x_i \overline{x_j}$$

Montrer que les formes hermitiennes Π et E déterminées dans la même base par

$$\Pi(\vec{X}) = \sum_{i,j} a_{ij}\, b_{ij}\, x_i \overline{x_j} \qquad \text{et} \qquad E(\vec{X}) = \sum_{i,j} e^{a_{ij}}\, x_i \overline{x_j}.$$

sont, elles aussi, positives.

On montrera que l'on peut écrire Φ et Ψ sous la forme

$$\Phi(\vec{X}) = \sum_{k=1}^{p} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} x_i \right|^2 \qquad \text{et} \qquad \Psi(\vec{X}) = \sum_{l=1}^{q} \left| \sum_{i=1}^{n} \beta_{li} x_i \right|^2$$

et on en déduira une expression de Π de la forme

$$\Pi(\vec{X}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \left| \sum_{i=1}^{n} \gamma_{kli} x_i \right|^2.$$

20. — On considère l'ensemble G des matrices de la forme

$$g(a, b, c, u, v, w) = \begin{bmatrix} ia & w & \overline{v} \\ -\overline{w} & ib & u \\ -v & -\overline{u} & ic \end{bmatrix}$$

dans lesquelles a, b, c désignent trois nombres réels et u, v, w trois nombres complexes.

a) Montrer que la transconjuguée d'une matrice g est égale à son opposée et que le carré d'une matrice g est une matrice hermitienne.

b) Trouver les matrices g qui commutent

α) avec la matrice donnée $g(a', b', c', 0, 0, 0)$

β) avec la matrice donnée $g(0, 0, 0, u', v', w')$.

c) Montrer que l'on peut munir l'ensemble G d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels. A deux éléments quelconques de G, g et g', on associe

$$< g, g' > = -\,\text{trace}\,(gg').$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire et une structure euclidienne sur G.

d) On désigne par H, M_1, M_2, M_3 les parties de G respectivement formées par les matrices

$$g(a, b, c, 0, 0, 0); \quad g(0, 0, 0, u, 0, 0); \quad g(0, 0, 0, 0, v, 0); \quad g(0, 0, 0, 0, 0, w).$$

Montrer que deux éléments de G appartenant à deux de ces quatre parties sont orthogonaux et que G est la somme directe de H, M_1, M_2, M_3.

21. — *Endomorphisme antisymétrique.* — *a*) Dans un espace vectoriel euclidien E, un endomorphisme f est dit *antisymétrique* quand il admet un endomorphisme symétrique qui est, en même temps, son opposé. f est antisymétrique si, et seulement si, il transforme tout vecteur de E en un vecteur orthogonal.

b) Dans ce qui suit on suppose que E a une dimension finie n (on le note E_n) et est rapporté à une base orthonormée; montrer que la matrice A d'un endomorphisme antisymétrique f est antisymétrique (I, n° 182).

Montrer que si f admet une valeur propre, celle-ci est zéro.

c) Si n est impair, A est singulière. Étudier le noyau et l'image de f.

En considérant la restriction de f à $f(E_n)$, montrer que le rang de f est pair.

d) Soit e l'endomorphisme identique en E_n; montrer que les endomorphismes

$$g = se - f; \qquad g' = se + f$$

sont des automorphismes, quel que soit s réel, non nul; g et g' sont commutables.

e) On désigne par I_n la matrice unité d'ordre n; démontrer que la matrice

$$\Omega = (sI_n - A)(sI_n + A)^{-1} \tag{1}$$

est orthogonale droite et n'admet pas la valeur propre -1.

f) Démontrer que, réciproquement, si une matrice orthogonale droite n'admet pas pour valeur propre -1, elle peut se mettre sous la forme (1), A étant une matrice antisymétrique.

22. — Soit A une matrice (4, 4) antisymétrique, à éléments réels; on lui associe, sur l'espace vectoriel C^4 rapporté à une base donnée un endomorphisme f.

a) Montrer que iA est une matrice hermitienne, en déduire que les valeurs propres de f sont nulles ou imaginaires pures.

b) En supposant que les valeurs propres de f sont distinctes, non nulles, montrer que, par le choix de bases convenables, on peut représenter f par l'une ou l'autre des matrices réduites

$$\begin{bmatrix} i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels})$$

23. — *a*) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E, de dimension finie n.

Soit g l'endomorphisme symétrique; on pose $g \circ f = h$.

Montrer que l'endomorphisme h est autosymétrique et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

b) On se propose de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de matrice (n, n), réelle, A telle que $\tilde{A}A - A\tilde{A}$ soit la matrice unité I_n d'ordre n.

On fait pour cela l'hypothèse (H) suivante : on pose $k = f o g$, et on suppose

$$h - k = e \quad (e : \text{endomorphisme identique de E}).$$

Montrer que h admet alors une valeur propre λ strictement positive.

Montrer que, si $\vec{V}$ désigne un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ, le vecteur $\vec{V}_p = f^{(p)}(\vec{V})$ vérifie, pour tout entier naturel p,

$$h(\vec{V}_p) = (\lambda + p)\,\vec{V}_p \qquad \text{et} \qquad \vec{V}_p \neq \vec{0}.$$

En déduire que $\lambda + p$ est une valeur propre de h.

Montrer que l'hypothèse (H) conduit à une contradiction et conclure.

c) Étendre à un corps quelconque le résultat obtenu en *b*, en étudiant la trace de la matrice $\tilde{A}A - A\tilde{A}$.

24. — Dans l'espace vectoriel euclidien E_n rapporté à une base orthonormée, une forme quadratique Φ s'écrit :

$$\Phi(\vec{X}) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j \qquad (a_{ji} = a_{ij})$$

On désigne par Δ_k le déterminant

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Montrer que Φ est définie positive si, et seulement si,

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \dots,\ \Delta_n > 0 \qquad \text{(inégalités strictes).}$$

25. — On considère les polynômes quadratiques

$F(x_1, x_2, x_3) = 3\,x_1^2 + x_2^2 + 3\,x_3^2 - 2\,x_3x_1 \qquad G(x_1, x_2, x_3) = 2\,x_2^2 - 3\,x_3^2 + 2\,x_3\,x_1.$

Appliquer la théorie de la réduction simultanée de deux formes quadratiques à la détermination des bornes du quotient de $G(x_1, x_2, x_3)$ par $F(x_1, x_2, x_3)$ quand (x_1, x_2, x_3) parcourt $R^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

26. — *Endomorphismes définis positifs.* — On garde les notations du n° 47, 1°; on dit que h est un endomorphisme défini positif quand la forme $\Phi = w(h)$ est définie positive. Montrer que :

a) Un endomorphisme auto-symétrique (resp. auto-adjoint) est défini positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.

b) Si h est un endomorphisme défini positif : α) il en est de même pour h^2; β) il existe un, et un seul endomorphisme positif k tel que $k^2 = h$.

c) Si h et h_1, représentés par les matrices H et H_1 sont définis positifs, la matrice HH_1 a une trace positive.

d) Étudier, de façon analogue, les endomorphismes positifs.

27. — *Décomposition polaire d'un automorphisme.* — Soit f un automorphisme d'un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien) E, de dimension finie. On se propose de démontrer que f peut être considéré, d'une façon et d'une seule, comme le composé (à l'ordre près), d'une isométrie (resp. endomorphisme unitaire) par un endomorphisme défini positif (cf. exercice précédent).

Pour cela, on montrera successivement que, g désignant l'endomorphisme symétrique (resp. adjoint) de f :

a) Les endomorphismes $h = g \circ f$ et $h_1 = f \circ g$ sont définis positifs.

b) k et k_1 désignant les endomorphismes définis positifs déterminés sans ambiguïté par $k^2 = h$ et $k_1^2 = h_1$, les produits $\sigma = f \circ k^{-1}$ et $\sigma_1 = k_1^{-1} \circ f$ sont des isométries (resp. endomorphismes unitaires).

c) Les décompositions : $f = \sigma \circ k$ et $f = k_1 \circ \sigma_1$ répondent à la question, et sont les seules à répondre à la question.

28. — *Fonctions de type positif.* — Soit f une application d'un groupe additif G dans le corps des complexes.

A tout système $\mathcal{S} = \{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ d'éléments de G on associe la forme hermitienne sur C^p qui est déterminée dans la base canonique de C^p par

$$\Phi_{\mathcal{S}}(\vec{X}) = \sum_{i,j} f(\xi_i - \xi_j)x_i\bar{x}_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, p)$$

Si, pour tout système $\mathcal{S}$, la forme $\Phi_{\mathcal{S}}$ est positive, on dit que la fonction f est de type positif.

a) Montrer qu'une fonction f de type positif a les propriétés suivantes :

I. $f(0)$ est un réel positif.

II. $f(-\xi) = \overline{f(\xi)}$

III. $\forall \xi \in G, \quad |f(\xi)| \leqslant f(0)$.

b) Montrer que, pour $G = R$, la fonction $f(\xi) = e^{-ia\xi}$, $(a \in R)$, est de type positif.

CHAPITRE V

ESPACES AFFINES

Pour la clarté, nous avons surligné d'une flèche les symboles qui concernent des espaces vectoriels.

I. DÉFINITION. PROPRIÉTÉS

48. ***Notion d'espace affine.*** — 1° **Définition.** — Soient d'une part un espace vectoriel $\vec{E}$ (sur un corps commutatif K), dont les éléments $\vec{T}, \vec{S}, \vec{V}, \dots$ sont appelés *vecteurs* et d'autre part un ensemble non vide E dont les éléments A, P, M ... sont appelés *points.* **On dit que E est un espace affine attaché à $\vec{E}$ s'il existe une application de $E \times E$ dans $\vec{E}$, associant au couple générique** (P, Q) **de $E \times E$, appelé bipoint de E, un vecteur de $\vec{E}$, noté $\vec{PQ}$, de façon que les trois axiomes suivants soient vérifiés :**

I. *Quels que soient le point* P *de* E *et le vecteur* $\vec{T}$ *de* $\vec{E}$, *il existe au moins un point* Q *de* E *tel que* $\vec{PQ} = \vec{T}$.

II. *Si* $\vec{0}$ *est le vecteur nul de* $\vec{E}$, $\vec{PQ} = \vec{0} \implies Q = P$.

III. *Quels que soient les points* P, Q, R, *de* E,

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \qquad \text{(relation de Chasles).}$$

Si l'espace vectoriel $\vec{E}$ est de dimension finie n, on dit que E est un espace affine de dimension n. Un espace affine de dimension 1 (resp. 2) est appelé *droite affine* (resp. *plan affine*).

2° **Propriétés d'un espace affine.** — *a*) La réciproque de l'axiome II est vraie :

$$\forall P \in E, \qquad \vec{PP} = \vec{0}.$$

En effet, en faisant Q = P et R = P dans l'axiome III, nous obtenons

$$\vec{PP} = \vec{0}.$$

b) $\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}.$

On s'en assure en faisant R = P dans l'axiome III, et en utilisant $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.

c) Le point Q qui vérifie l'axiome I, pour un couple $(P, \vec{T}) \in E \times \vec{E}$ donné, est unique.

En effet s'il existait un second point, Q', on aurait $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ}$.

Comme, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'} - \overrightarrow{PQ}$, il en résulterait

$$\overrightarrow{QQ'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad Q' = Q.$$

d) Nous écrirons dorénavant

$$(1) \qquad Q = P + \vec{T} \quad \text{au lieu de} \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{T},$$

étant entendu que le signe + doit être compris ici comme le symbole d'une loi externe sur E, l'ensemble des opérateurs étant $\vec{E}$.

Étant donné que $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$, (1) équivaut à

$$P = Q + \left(-\vec{T}\right).$$

Cela posé, considérons un troisième point R défini par

$$(2) \qquad R = Q + \vec{S} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{QR} = \vec{S}.$$

Compte tenu de ce que la relation de Chasles donne $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ ou $\vec{T} + \vec{S}$, la relation $R = P + \overrightarrow{PR}$ devient $R = P + \left(\vec{T} + \vec{S}\right)$.

Ainsi :

$$\forall P \in E, \quad \forall \left(\vec{T}, \vec{S}\right) \in \vec{E} \times \vec{E}, \quad \left(P + \vec{T}\right) + \vec{S} = P + \left(\vec{T} + \vec{S}\right).$$

3° **Les translations.** — DÉFINITION. — **A tout vecteur fixé, $\vec{T}$, de $\vec{E}$, on peut associer l'application, $\Psi_{\vec{T}}$, de E sur lui-même qui transforme le point générique M de E en le point $M + \vec{T}$ de E; cette application est dite translation de vecteur $\vec{T}$.**

Il s'agit d'une bijection; en effet tout point M' de E est l'image par $\Psi_{\vec{T}}$ d'un, et d'un seul, point de E, déterminé par $M = M' + \left(-\vec{T}\right)$.

Autrement dit la translation $\Psi_{\vec{T}}$ admet pour application réciproque la translation $\Psi_{-\vec{T}}$.

THÉORÈME. — **La composition des applications munit l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations d'un espace affine E d'une structure de groupe abélien.**

Il s'agit d'une loi interne partout définie sur $\mathcal{T}$.

En utilisant le 2°, *d*, on obtient

$$\Psi_{\vec{S}} \circ \Psi_{\vec{T}} = \Psi_{\vec{T}+\vec{S}}$$

et on constate que la correspondance biunivoque

$$\vec{T} \in \vec{E} \quad \leftarrow\ominus\rightarrow \quad \Psi_{\vec{T}} \in \mathcal{T}$$

est un isomorphisme de $\vec{E}$ muni de la loi + sur $\mathcal{T}$ muni de la loi $\circ$. La loi + étant une loi se groupe abélien sur $\vec{E}$, il en est de même pour la loi $\circ$ sur $\mathcal{T}$.

4° **L'équipollence.** — DÉFINITION. — **Deux bipoints de E sont dits équipollents quand l'application qui sert à définir l'espace affine E leur associe le même vecteur de $\vec{E}$.**

Il résulte de cette définition que l'équipollence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints de E; une classe d'équivalence est l'ensemble des bipoints de E auxquels est associé un vecteur donné de $\vec{E}$; cet ensemble est appelé, quelquefois *vecteur libre* de l'espace affine E, un bipoint de E étant qualifié de *vecteur lié*.

THÉORÈME. — **Les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents si et seulement si les bipoints (A, C) et (B, D) sont équipollents.**

En effet en écrivant, pour quatre points quelconques A, B, C, D de E, deux expressions de $\overrightarrow{AD}$ nous avons (relation de Chasles),

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}.$$

D'où l'équivalence logique, dite règle du parallélogramme,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

COROLLAIRE. — Toute translation transforme un bipoint en un bipoint équipollent.

49. ***Structure affine canonique d'un espace vectoriel.*** — 1° Soit un ensemble muni d'une structure d'espace vectoriel sur K. Initialement l'ensemble est désigné par $\vec{E}$ et ses éléments, appelés « vecteurs » sont désignés par des lettres fléchées $\vec{P}$, $\vec{Q}$, ...

Montrons que nous pouvons munir l'ensemble d'une structure affine, qui sera dite canonique, grâce aux conventions suivantes :

a) les éléments de l'ensemble sont dorénavant appelés « points » et désignés par des lettres ordinaires P, Q, ..., l'ensemble lui-même étant désigné par E. La lettre O désigne dorénavant l'élément $\vec{0}$.

b) au bipoint (P, Q) de E, nous associons le vecteur $\vec{Q} - \vec{P}$ de $\vec{E}$, que nous notons $\overrightarrow{PQ}$.

Montrons que les axiomes de structure d'espace affine sont ainsi vérifiés.

I. Étant donnés $P \in E$ et $\vec{T} \in \vec{E}$, désignons par $\vec{Q}$ le vecteur de $\vec{E}$ qui est déterminé par $\vec{Q} = \vec{P} + \vec{T}$. Le bipoint (P, Q) de E vérifie $\overrightarrow{PQ} = \vec{T}$.

II. Le fait que : $\vec{Q} - \vec{P} = \vec{0} \implies \vec{Q} = \vec{P}$, est trivial dans $\vec{E}$.

III. Le fait que : $(\vec{Q} - \vec{P}) + (\vec{R} - \vec{Q}) = \vec{R} - \vec{P}$ est trivial dans $\vec{E}$.

Remarque I. — En particulier, le corps K peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur K et, par suite, d'une structure d'espace affine.

Remarque II. — Nous avons ainsi démontré qu'il existe des espaces affines.

2° Réciproque. Structure d'espace vectoriel sur un espace affine. Nous partons ici d'un espace affine E, attaché à un espace vectoriel $\vec{E}$. Nous fixons arbitrairement un point O de E, qui sera dit *origine*, et nous considérons l'application φ de E dans $\vec{E}$ qui au point générique M de E, associe le vecteur de $\vec{E}$ représenté par le bipoint (O, M) de E et noté $\overrightarrow{OM}$:

$$\varphi(M) = \overrightarrow{OM}.$$

Il s'agit d'une bijection, car le vecteur $\vec{N}$ de $\vec{E}$ est l'image par φ d'un, et d'un seul, point de E, qui s'écrit $N = O + \vec{N}$; nous écrirons $N = \varphi^{-1}(\vec{N})$. Notons que $\varphi(O) = \vec{0}$.

La bijection φ (qui dépend naturellement du choix de O) permet de munir E d'une structure d'espace vectoriel sur K. En effet considérons les deux lois, l'une interne, l'autre externe définies sur E de la façon suivante :

Aux deux points M et M′ de E nous associons le point

$$\varphi^{-1}[\varphi(M) + \varphi(M')] \qquad \text{ou} \qquad O + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

de E, et nous désignons ce point par $M + M'$.

Au point M de E et au scalaire λ de K, nous associons le point

$$\varphi^{-1}[\lambda\, \varphi(M)] \qquad \text{ou} \qquad O + \lambda \overrightarrow{OM}$$

de E, et nous désignons ce point par λM.

Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que ces lois vérifient les axiomes de structure d'espace vectoriel.

50. ***Repères dans un espace affine de dimension finie.*** — 1° Définition. — **On appelle repère (ou référentiel) d'un espace affine E, de dimension finie n, l'ensemble $\{O, \mathcal{U}\}$ d'une origine O de E et d'une base $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de l'espace vectoriel $\vec{E}$ auquel E est attaché.**

Montrons qu'une fois choisi le repère $\} O, \mathcal{U} \{$, on dispose d'une bijection de E sur K^n. En effet, à tout point M de E on peut associer biunivoquement le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de $\vec{E}$ et, par suite, le n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ de K formé par les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{U}$ de $\vec{E}$.

Utilisant la notation $M = O + \overrightarrow{OM}$, nous écrirons

$$M = O + \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i x_i$$

et nous dirons que les x_i sont les coordonnées affines du point M dans le repère $\} O, \mathcal{U} \{$.

2° **Changement de repère.** — Soit $\} O', \mathcal{U}' \{$ un second repère de E, défini, par rapport au premier, par les coordonnées affines de O′ dans le repère $\} O, \mathcal{U} \{$ et par la matrice de passage, dans $\vec{E}$, de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{U}'$, soit :

$$O' = O + \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i \omega_i \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_i \Big| \frac{\vec{u}'_j}{[p_{ij}]} = P.$$

A partir de
$$\overrightarrow{O'M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i (x_i - \omega_i) = \sum_{j=1}^{n} \vec{u}'_j x'_j,$$

nous obtenons (I, 224) :

$$\begin{bmatrix} x_1 - \omega_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n - \omega_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_1 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_n \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix}$$

3° **Orientation.** — Nous nous limitons ici au cas où le corps de base est celui des *réels*; nous avons alors appris (I, 224, 3°) à orienter un espace vectoriel de dimension finie $\vec{E}$. Tout espace affine E attaché à un espace vectoriel orienté sur le corps des réels est dit orienté : un repère $\} O, \mathcal{U} \{$ de E est dit positif ou négatif selon que $\mathcal{U}$ est une base positive ou négative de $\vec{E}$.

II. VARIÉTÉS LINÉAIRES AFFINES. DROITES ET PLANS

51. ***Notion de variété linéaire affine.*** — 1° **Définition.** — Soit E un espace affine attaché à un espace vectoriel $\vec{E}$ par la donnée d'une application de $E \times E$ dans $\vec{E}$. Soit E′ une partie non vide de E. Supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel $\vec{E}'$ de $\vec{E}$ tel que E′ possède une structure d'espace affine attaché à $\vec{E}'$, lorsqu'on choisit comme application de $E' \times E'$

dans $\vec{E}'$ la restriction de l'application initiale de E × E dans $\vec{E}$. On dit alors que E′ est une *variété linéaire affine* de E (on dit aussi variété linéaire de E, ou *sous-espace affine* de E); $\vec{E}'$ est appelé ***direction*** de E′.

Autrement dit, **une partie E′ de E est dite variété linéaire affine de E s'il existe un sous-espace vectoriel $\vec{E}'$ de $\vec{E}$ tel que**

$$(1) \qquad \begin{cases} \forall (P, Q) \in E' \times E', & \overrightarrow{PQ} \in \vec{E}' \\ \forall (P, \vec{T}) \in E' \times \vec{E}', & P + \vec{T} \in E'. \end{cases}$$

Si un tel sous-espace vectoriel $\vec{E}'$ existe, il est unique, car il coïncide avec l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ de $\vec{E}$ qui sont associés à tous les bipoints (P, Q) de E′.

Si $\vec{E}'$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ de dimension finie p, on dit d'une variété linéaire affine E′ de direction $\vec{E}'$ qu'elle a la dimension p; tout point de E peut être considérée comme une variété linéaire de dimension 0, dont la direction est le sous-espace $\{\vec{0}\}$ de $\vec{E}$.

2° Théorème. — **Une partie E′ de l'espace affine E en est une variété linéaire si, et seulement si, il existe un point O de E tel que, quand M parcourt E′, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ engendre un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.**

I. Si E′ est une variété linéaire de direction $\vec{E}'$, les relations (1) montrent que, pour tout point fixe P de E′, $\overrightarrow{PQ}$ engendre $\vec{E}'$ quand Q parcourt E′.

II. Soient E′ une partie de E, O un point fixe de E, $\vec{E}'$ un sous-espace de $\vec{E}$ tels que

$$(2) \qquad \begin{cases} \forall M \in E', & \overrightarrow{OM} \in \vec{E}' \\ \forall \vec{V} \in \vec{E}', & O + \vec{V} \in E' \quad \text{(en particulier } O \in E'). \end{cases}$$

α) Pour tout bipoint (P, Q) de E′, nous avons :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}, \qquad \overrightarrow{OP} \in \vec{E}', \qquad \overrightarrow{OQ} \in \vec{E}'.$$

Il en résulte : $\overrightarrow{PQ} \in \vec{E}'$.

β) Pour tout couple $(P, \vec{T})$ de $E' \times \vec{E}'$ nous avons :

$$P + \vec{T} = (O + \overrightarrow{OP}) + \vec{T} \qquad \text{ou} \qquad O + (\overrightarrow{OP} + \vec{T}).$$

Comme $\overrightarrow{OP} \in \vec{E}'$ et $\vec{T} \in \vec{E}'$, ce qui entraîne $\overrightarrow{OP} + \vec{T} \in \vec{E}'$, il en résulte

$$P + \vec{T} \in E'.$$

Les conditions (1) sont vérifiées et E′ est une variété linéaire de E, de direction $\vec{E}'$.

52. ***Le parallélisme.*** — 1° Définition I. — **Deux variétés linéaires d'un même espace affine sont dites parallèles quand elles ont la même direction.**

Il résulte de cette définition que deux variétés linéaires affines confondues doivent être considérées comme parallèles; autrement dit le parallélisme que nous venons de définir est compris au sens large.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que *le parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des variétés linéaires d'un espace affine donné.*

Théorème. — **Par tout point A d'un espace affine donné, E, on peut mener une, et une seule, variété linéaire admettant une direction donnée** $\vec{E}'$ (ou encore **parallèle à une variété linéaire donnée de** E).

Il s'agit de la partie E_A de E qui est engendrée par le point $A + \vec{T}$ quand le vecteur $\vec{T}$ décrit $\vec{E}'$.

Si on remplace A par un second point fixe, B, de E, on obtient une variété linéaire affine E_B qui se déduit de E_A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$; E_A et E_B coïncident si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur de $\vec{E}'$.

2° Définition II. — **Une variété linéaire** E′ **d'un espace affine** E **est dite parallèle à une autre variété linéaire** E″ **de** E **si la direction** $\vec{E}'$ **de** E′ **est un sous-espace vectoriel de la direction** $\vec{E}''$ **de** E″.

Cette définition II, qui est une extension de la définition I, doit être comprise, elle aussi, au sens large, puisque nous avons admis que tout espace vectoriel peut être considéré comme l'un de ses sous-espaces vectoriels.

Il s'agit d'une relation réflexive et transitive, mais *non symétrique*, dans l'ensemble des variétés linéaires de l'espace affine E.

53. ***Intersection de variétés linéaires d'un même espace affine.*** — Nous conviendrons que la partie vide d'un espace affine en est une variété linéaire. Cela va nous permettre de démontrer dans sa généralité le théorème suivant :

Théorème. — **L'intersection de deux** (resp. plusieurs) **variétés linéaires d'un même espace affine est une variété linéaire de cet espace affine.**

Soient E′ et E″ deux variétés linéaires de l'espace affine E, attaché à l'espace vectoriel $\vec{E}$.

Si $E' \cap E'' = \emptyset$, la proposition résulte de la convention précédente.

Si E′ et E″ ont en commun au moins un point A, on peut les définir par ce point A et par leurs directions $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$:

$$M \in E' \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{E}', \qquad M \in E'' \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{E}''.$$

On en déduit

$$M \in E' \cap E'' \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{E}' \cap \vec{E}''.$$

Étant donné que l'intersection, $\vec{E}' \cap \vec{E}''$, de deux sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, $E' \cap E''$ est la variété linéaire de E qui contient le point A et admet pour direction $\vec{E}' \cap \vec{E}''$.

Le théorème se démontre de la même façon dans le cas d'un nombre fini, et même infini, de variétés linéaires de E.

Cas particulier. — Si E' et E'' sont parallèles, on a $\vec{E}' = \vec{E}'' = \vec{E}' \cap \vec{E}''$: *deux variétés linéaires parallèles sont soit disjointes, soit confondues.*

Si E' *est parallèle à* E'', *on a* $\vec{E}' \subset \vec{E}''$ *et* $\vec{E}' \cap \vec{E}'' = \vec{E}'$: *ou bien les deux variétés sont disjointes, ou bien* E' *est une partie de* E''.

54. ***Plus petite variété linéaire contenant une partie donnée d'un espace affine.*** — Position du problème. — *Étant donnée une partie* $\mathcal{G}$ *d'un espace affine* E, *attaché à un espace vectoriel* $\vec{E}$, *existe-t-il des variétés linéaires affines de* E *qui contiennent* $\mathcal{G}$?

I. *Analyse.* — Supposons qu'il existe une variété linéaire de E, E', de direction $\vec{E}'$, qui contient $\mathcal{G}$.

a) A étant un point arbitrairement choisi dans $\mathcal{G}$, $\vec{E}'$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ qui contient la partie $\vec{\mathcal{L}}_A$ de $\vec{E}$ formée par les vecteurs

$$\overrightarrow{AM}, \quad \text{avec} \quad M \in \mathcal{G}.$$

$\vec{E}'$ contient donc (I, 159) le sous-espace vectoriel, $\vec{E}_A$, de $\vec{E}$ qui est engendré par $\vec{\mathcal{L}}_A$.

B étant un second point arbitrairement choisi dans $\mathcal{G}$, $\vec{E}'$ contient de même le sous-espace vectoriel, $\vec{E}_B$, de $\vec{E}$ qui est engendré par la partie de $\vec{E}$ formée par les vecteurs

$$\overrightarrow{BM}, \quad \text{avec} \quad M \in \mathcal{G}.$$

Montrons que $\vec{E}_A = \vec{E}_B$. En effet, d'après l'égalité

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB},$$

le vecteur $\overrightarrow{BM}$, $(M \in \mathcal{G})$, qui est la différence de deux vecteurs de $\vec{E}_A$, est un vecteur de $\vec{E}_A$. On en déduit

$$\vec{E}_B \subseteq \vec{E}_A \quad \text{et on démontrerait de même} \quad \vec{E}_A \subseteq \vec{E}_B.$$

Les sous-espaces $\vec{E}_A$ et $\vec{E}_B$ sont donc confondus; nous les désignerons dorénavant par $\vec{E}_{\mathcal{G}}$, pour marquer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, attaché à la partie $\mathcal{G}$ de E, mais indépendant du choix du point A de $\mathcal{G}$ qui nous a servi à le définir.

b) E' contient la variété linéaire de E qui est déterminée par sa direction $\vec{E}_{\mathcal{G}}$ et par le point A, arbitrairement choisi dans $\mathcal{G}$. Cette variété linéaire contient chacun des points M de $\mathcal{G}$ $\left(\text{d'après } \overrightarrow{AM} \in \vec{E}_{\mathcal{G}}\right)$; elle est donc indépendante du choix du point A, ce qui nous permet de la désigner par $E_{\mathcal{G}}$.

II. *Synthèse.* — Du fait que $E_{\mathcal{G}}$ contient $\mathcal{G}$, il résulte que toute variété linéaire affine de E qui contient $E_{\mathcal{G}}$ contient également $\mathcal{G}$.

Résumons cette étude par l'énoncé suivant :

Théorème et définition. — **Soit $\mathcal{G}$ une partie donnée d'un espace affine E, attaché à un espace vectoriel $\vec{E}$. Soit $E_{\mathcal{G}}$ la variété linéaire de E qui contient le point A de $\mathcal{G}$ et qui admet pour direction le sous-espace vectoriel $\vec{E}_{\mathcal{G}}$ de $\vec{E}$ engendré par la partie de $\vec{E}$ formée des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, quand M parcourt $\mathcal{G}$.**

a) **$\vec{E}_{\mathcal{G}}$ et $E_{\mathcal{G}}$ sont indépendants du choix de A; $E_{\mathcal{G}}$ contient $\mathcal{G}$.**

b) **Toute variété linéaire affine de E qui contient $\mathcal{G}$ contient $E_{\mathcal{G}}$; on dit que $E_{\mathcal{G}}$ est la plus petite variété linéaire de E qui contient $\mathcal{G}$ et aussi que $E_{\mathcal{G}}$ est la variété linéaire affine de E qui est engendrée par $\mathcal{G}$.**

55. ***Rang d'un système de points.*** — Nous reprenons les notations du paragraphe **54** en supposant, cette fois, que $\mathcal{G}$ admet un nombre fini p de points, soit

$$\mathcal{G} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_p \}$$

A_k étant l'un quelconque de ces points, le sous-espace vectoriel $\vec{E}_{\mathcal{G}}$ de $\vec{E}$ admet pour système générateur l'ensemble des $p - 1$ vecteurs $\overrightarrow{A_kA_i}$, $(i \neq k)$. Il en résulte que $\vec{E}_{\mathcal{G}}$, et par suite $E_{\mathcal{G}}$, est de dimension finie r, avec $r \leqslant p - 1$. Cela nous conduit à poser :

Définition. — **On appelle rang d'un système $\mathcal{G}$ de p points d'un espace affine E la dimension r de la plus petite variété linéaire de E qui contient $\mathcal{G}$. On a $r \leqslant p - 1$; si $r = p - 1$ on dit que le système $\mathcal{G}$ est libre, ou que les points de $\mathcal{G}$ sont linéairement indépendants.**

En particulier $\{ A, B \}$ est un système libre si, et seulement si, le sous-espace de $\vec{E}$ qui est engendré par $\overrightarrow{AB}$ admet la dimension 1, c'est-à-dire si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ou $A \neq B$.

REMARQUE. — Si E est un espace affine de dimension finie n, la variété linéaire engendrée par tout système libre de $n+1$ points de E, $\mathcal{S} = \{ A_0, A_1, \ldots, A_n \}$, est E lui-même. En effet, dans ce cas, la dimension du sous-espace vectoriel $\vec{E}_{\mathcal{S}}$ de $\vec{E}$ est égale à la dimension de $\vec{E}$, ce qui entraîne $\vec{E}_{\mathcal{S}} = \vec{E}$ et, par suite, $E_{\mathcal{S}} = E$.

Le système $\left\{ \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n} \right\}$ est une base de $\vec{E}$. En lui adjoignant le point A_0, on obtient un repère de E; tout point M de E s'écrit, d'une façon et d'une seule,

$$M = A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Inversement, à tout repère $\{ O, \mathcal{U} \}$ de E, avec $\mathcal{U} = \left\{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \right\}$, on peut associer un système libre de $n+1$ points, $\left\{ O, O + \vec{u}_1, \ldots, O + \vec{u}_n \right\}$, capable d'engendrer E.

56. *Droites et plans d'un espace affine.* — 1° **Définition.** — Étant donné qu'une variété linéaire d'un espace affine est elle-même un espace affine et que, d'autre part, un espace affine de dimension 1 (resp. 2) a été appelé droite affine (resp. plan affine), nous pouvons poser :

DÉFINITION. — **On appelle droite** (resp. **plan**) **d'un espace affine** E **toute variété linéaire de** E (éventuellement confondue avec E) **qui est de dimension** 1 (resp. 2).

2° **Détermination d'une droite** (resp. **d'un plan**) **d'un espace affine** E. Rappelons que deux points de E sont linéairement indépendants si et seulement si, ils sont distincts.

D'après le n° 55, la plus petite variété linéaire de E qui contient

deux points donnés distincts est une droite	trois points donnés linéairement indépendants est un plan.

On en déduit les résultats suivants :

THÉORÈME I. — **Par deux points distincts passe une, et une seule, droite.**

THÉORÈME II. — **Trois points deux à deux distincts sont linéairement indépendants si, et seulement si, ils ne sont pas situés sur une droite** (ou encore s'ils ne sont pas alignés).

THÉORÈME III. — **Par trois points deux à deux distincts, non alignés, passe un, et un seul, plan.**

THÉORÈME IV. — **Si deux points distincts appartiennent à un plan, la droite déterminée par les deux points appartient au plan.**

3° **Autre mode de détermination d'une droite** (resp. **d'un plan**) **d'un espace affine** E. — *a) Droite affine D déterminée par un point A et sa direction* $\vec{D}$. — Nous savons que $\vec{D}$, qui est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, de dimension 1, peut lui-même être déterminé par l'un quelconque, $\vec{V}$, de ses vecteurs non nuls; nous dirons que $\vec{V}$ est un *vecteur directeur* de D. Nous avons :

$$M \in D \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{D} \iff \exists \rho \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \rho \vec{V}.$$

Autrement dit :

$$(1) \qquad M \in D \iff \exists \rho \text{ tel que } M = A + \rho \vec{V}.$$

L'ensemble $\{A, \vec{V}\}$ constitue un repère de l'espace affine D de dimension 1; on dit que le scalaire ρ de K est l'*abscisse affine* de M dans ce repère.

Naturellement on passe du cas d'une droite déterminée par deux points distincts A et B à celui d'une droite déterminée par un point A et un vecteur directeur $\vec{V}$ en posant $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ (ou, inversement, $A + \vec{V} = B$).

b) Plan affine Q déterminé par un point A et sa direction $\vec{Q}$. — Nous savons que $\vec{Q}$ qui est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, de dimension 2, peut lui-même être déterminé par l'un quelconque de ses systèmes libres $\{\vec{V}, \vec{V'}\}$. Nous avons

$$M \in Q \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{Q} \iff \exists \rho \text{ et } \rho' \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = \rho\vec{V} + \rho'\vec{V'}.$$

Autrement dit :

$$(2) \qquad M \in Q \iff \exists \rho \text{ et } \rho' \text{ tels que } M = A + \rho\vec{V} + \rho'\vec{V'}.$$

L'ensemble $\{A, \vec{V}, \vec{V'}\}$ constitue un repère de l'espace affine Q de dimension 2; on dit que les scalaires ρ et ρ' de K sont les *coordonnées affines* de M dans ce repère.

Naturellement, on passe du cas d'un plan déterminé par trois points deux à deux distincts, non alignés, A, B et C, à celui d'un plan déterminé par un point A et les deux vecteurs, $\vec{V}$ et $\vec{V'}$, d'un système libre, en posant $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{V'}$ (ou, inversement, $A + \vec{V} = B$ et $A + \vec{V'} = C$).

4° **Interprétation analytique.** — Nous nous limitons ici au cas où l'espace affine E est de dimension finie n. Soit $\mathfrak{U}$ une base de $\vec{E}$ et $\mathfrak{R} = \{O, \mathfrak{U}\}$ un repère de E.

Désignons par (a_k), (b_k), (c_k), (x_k) les coordonnées affines de A, B, C, M dans $\mathfrak{R}$ et par (v_k) (v'_k), les composantes scalaires de $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ dans $\mathfrak{U}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

a) La relation (1) prend la forme :

$$(1)\quad M \in D \iff \exists\, \rho \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x_k = a_k + \rho v_k \\ \text{ou}\quad x_k = a_k + \rho(b_k - a_k) \end{array}\right\} k = 1, \ldots, n,$$

On dit de (1) qu'il s'agit d'une *représentation paramétrique* de la droite D. Le vecteur $\vec{V}$ $\left(\text{ou } \overrightarrow{AB}\right)$ n'étant pas nul, (1) s'écrit

$$(3)\quad M \in D \iff \frac{x_1 - a_1}{v_1} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{v_n} \quad \text{ou} \quad \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n},$$

étant entendu que si l'un des dénominateurs est nul, le numérateur correspondant l'est aussi.

On dit que (3) constitue un *système d'équations affines de la droite* D; ces équations sont au nombre de $n - 1$.

b) La relation (2) prend la forme :

$$M \in Q \iff \exists\, \rho \text{ et } \rho' \text{ tels que} \left\{\begin{array}{l} x_k = a_k + \rho v_k + \rho' v'_k \\ \text{ou}\quad x_k = a_k + \rho(b_k - a_k) + \rho'(c_k - a_k) \end{array}\right\} k = 1, \ldots, n.$$

III. APPLICATIONS AFFINES

57. ***Notion d'application affine.*** — 1° **Définition.** — Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif K, auxquels sont respectivement associés les espaces affines E et F.

Une application g de E dans F est dite affine s'il existe une application linéaire f de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ telle que

$$(1)\qquad \forall P \in E,\ \forall \vec{V} \in \vec{E} \qquad g\left(P + \vec{V}\right) = g(P) + f\left(\vec{V}\right).$$

(au premier membre le signe + est le symbole d'une loi externe sur E, au second membre le signe + est le symbole d'une loi externe sur F).

Si l'application f existe, elle est unique puisque, en bloquant le point P dans (1), on obtient (g étant connue) l'image par f du vecteur générique $\vec{V}$ de $\vec{E}$.

On dit que g est une application affine associée à l'application linéaire f.

2° **Détermination d'une application affine.** — Théorème. — **Étant donnée une application linéaire f de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, il existe une, et une seule, application affine de E dans F qui est associée à f et qui transforme un point donné A de E en un point donné A′ de F.**

Analyse. — D'après (1), une solution éventuelle ne peut être que l'application g de E dans F définie (sans ambiguïté) par

$$\forall \vec{V} \in \vec{E} \qquad g(A + \vec{V}) = A' + f(\vec{V}).$$

Elle s'écrit, en remplaçant $A + \vec{V}$ par M et $\vec{V}$ par $\overrightarrow{AM}$,

$$(2) \qquad \forall M \in E \qquad g(M) = A' + f(\overrightarrow{AM}).$$

Synthèse. — L'application g définie par (2) transforme le point $P + \vec{V}$ de E en le point de F défini par

$$g(P + \vec{V}) = A' + f(\overrightarrow{AP} + \vec{V}).$$

L'application f de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ étant linéaire

$$f(\overrightarrow{AP} + \vec{V}) = f(\overrightarrow{AP}) + f(\vec{V}) \quad \left(\text{addition dans } \vec{F}\right).$$

Compte tenu de ce que (48, 2°, *d*)

$$A' + \left[f(\overrightarrow{AP}) + f(\vec{V})\right] = \left[A' + f(\overrightarrow{AP})\right] + f(\vec{V})$$

et de ce que, d'après (2),

$$A' + f\left[\overrightarrow{AP}\right] = g(P),$$

on a

$$\forall P \in E, \ \forall \vec{V} \in \vec{E}' \qquad g(P + \vec{V}) = g(P) + f(\vec{V}),$$

qui n'est autre que la relation (1), ce qui prouve que l'application g est affine et qu'elle est associée à l'application linéaire f. Comme g (A) = A', elle répond à la question.

Corollaire. — Une application affine g peut être définie par la donnée de l'application linéaire f à laquelle elle est associée et de l'homologue A' d'un point A arbitrairement choisi dans l'espace objet :

$$M' = g(M) \iff M' = A' + f(\overrightarrow{AM}) \iff \overrightarrow{A'M'} = f(\overrightarrow{AM}).$$

3° **Image d'une variété linéaire.** — *a*) Une variété linéaire E' de E peut être définie par l'un de ses points A et par sa direction $\vec{E}'$: il s'agit de la partie de E décrite par le point M quand $\overrightarrow{AM}$ décrit le sous-espace vectoriel $\vec{E}'$ de $\vec{E}$.

Transformons E par l'application affine g. Soit $A' = g(A)$ et $M' = g(M)$. On a

$$\overrightarrow{A'M'} = f(\overrightarrow{AM}).$$

$\overrightarrow{A'M'}$ parcourt le sous-espace vectoriel $\vec{F}'$ de $\vec{F}$ qui est l'image de $\vec{E}'$ par f; M' parcourt la variété linéaire F' de F qui contient le point A' et admet pour direction $\vec{F}'$.

b) En particulier, pour E' = E, on constate que g (E) est une variété linéaire de F qui admet pour direction $f(\vec{E})$. On en déduit que *g est surjective si et seulement si* $f(\vec{E}) = \vec{F}$, c'est-à-dire *si f est surjective.*

Par ailleurs

$$M' = g(M) \iff \overrightarrow{A'M'} = f\left(\overrightarrow{AM}\right)$$

montre que *g est injective si et seulement si f est injective.*

c) En combinant les deux résultats précédents on constate :

Théorème. — **Une application affine g est bijective si et seulement si elle est associée à une application linéaire bijective f.**

Dans ce cas la relation

$$M' = g(M) \iff \overrightarrow{A'M'} = f\left(\overrightarrow{AM}\right)$$

s'écrit

$$M = g^{-1}(M') \iff \overrightarrow{AM} = f^{-1}\left(\overrightarrow{A'M'}\right),$$

ce qui montre que l'application réciproque g^{-1} de g est affine et qu'elle est associée à l'application linéaire f^{-1}.

4° **Composition des applications affines.** — Soient $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$ trois espaces vectoriels sur le même corps commutatif K, auxquels sont respectivement attachés les espaces affines E, F, G. Soient g et g' deux applications affines de E dans F et de F dans G, respectivement associées aux deux applications linéaires f et f' de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ et de $\vec{F}$ dans $\vec{G}$.

Nous savons que $f_1 = f' \circ f$ est une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{G}$. Étudions l'application $g_1 = g' \circ g$ de E dans G. Nous avons, pour tout élément $\left(M, \vec{V}\right)$ de $E \times \vec{E}$,

$$\begin{aligned} g_1\left(M + \vec{V}\right) &= g'\left[g\left(M + \vec{V}\right)\right] = g'\left[g(M) + f\left(\vec{V}\right)\right] \\ &= g'[g(M)] + f'\left[f\left(\vec{V}\right)\right] = g_1(M) + f_1\left(\vec{V}\right), \end{aligned}$$

ce qui montre que g_1 *est une application affine associée à l'application linéaire* f_1.

5° **Le groupe affine.** — Nous plaçant dans le cas d'espaces confondus nous allons démontrer :

Théorème et définition. — **La composition des applications munit l'ensemble $\mathcal{G}$ des bijections affines d'un espace affine E sur lui-même d'une structure de groupe; on dit que $\mathcal{G}$ est le groupe affine de E.**

Soient g et g' deux éléments quelconques de $\mathcal{G}$; ils sont associés aux automorphismes f et f' de $\vec{E}$ (3°); $g' \circ g$ est une application affine de E dans E associée à $f' \circ f$ qui est un automorphisme de $\vec{E}$ (cf. produit de deux automorphismes, I, 22 I); $g' \circ g$ est donc un élément de $\mathcal{G}$. Il en résulte que la loi $\circ$ est interne et partout définie sur $\mathcal{G}$;

a) elle est *associative* (cf. composition des applications I, 21);

b) elle possède un *élément neutre*, l'application identique de E sur E (associée à l'automorphisme identique de $\vec{E}$);

c) elle est *symétrisable.*

La structure de groupe en résulte.

Remarque I. — Toute bijection affine de E sur lui-même qui est associée à l'automorphisme identique de $\vec{E}$ s'écrit

$$M' = g(M) \iff \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM} \iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'};$$

il s'agit d'une translation : *le groupe des translations de* E *est un sous-groupe du groupe affine de* E.

Remarque II. — Les bijections affines de E sur lui-même sont parfois appelées *affinités.*

58. ***Conservation du barycentre par application affine.*** — Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ deux espaces vectoriels sur le corps commutatif K, E et F des espaces affines attachés à $\vec{E}$ et $\vec{F}$.

1° **Barycentre d'un système de points pondérés** — L'étude faite au n° 67 du tome I s'applique intégralement à tout espace affine E. Rappelons les résultats :

a) Définition. — **On appelle point pondéré de l'espace affine** E **tout élément** (A, α) **de l'ensemble** $E \times K$; α **est le poids du point** A.

Le poids d'un système $\mathcal{S}$ est la somme des poids des points qui composent $\mathcal{S}$.

b) Théorème et définition. — **Si le poids** α **d'un système** $\{(A_i, \alpha_i)\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, **n'est pas nul, il existe un point** G **de** E **et un seul qui vérifie l'égalité** (entre éléments de $\vec{E}$)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Ce point G **est appelé barycentre du système.**

Démontrer le théorème équivaut à prouver que l'équation à l'inconnue $M \in E$

$$(1) \qquad \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$$

admet une solution et une seule.

Soit O un point arbitrairement choisi de E. Un point de E vérifie (1) si et seulement s'il vérifie l'équation à l'inconnue $M \in E$

$$(1') \qquad \alpha \overrightarrow{OM} = \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}, \qquad \alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Or (1'), et par suite (1), admet une solution unique G, donnée par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$$

(Au titre de solution unique de (1), G ne dépend pas du choix de O).

c) L'égalité (1) montre que, si $\alpha = \Sigma \alpha_i$ n'est pas nul, G ne change pas quand on multiplie les α_i par un même élément non nul de K. Ce résultat permet de se ramener au cas où $\alpha = 1$, de façon à simplifier les écritures.

d) Si E est de dimension n, et si $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont $n+1$ points de E formant un système libre, à tout point M de E correspond bijectivement le $(n+1)$ — uple formé des éléments $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ du corps K dont la somme est 1, tels que M soit le barycentre des points pondérés (A_i, λ_i), $i \in [0, n]$; ces éléments sont appelés *coordonnées barycentriques* de M dans le repère affine $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$.

2° **Conservation du barycentre par application affine.** — *a*) <u>THÉORÈME DIRECT.</u> — **Dans une application affine g, le barycentre d'un système de points pondérés (A_i, α_i) a pour image le barycentre des points pondérés $(g(A_i), \alpha_i)$.**

Soit une application affine g de E dans F, associée à une application linéaire f de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$. Soit un système, arbitrairement choisi, de points pondérés $\{ (A_i, \alpha_i) \}$, dont le poids α n'est pas nul. Désignons par G le barycentre du système et soit

$$A'_i = g(A_i) \qquad \text{et} \qquad G' = g(G).$$

L'application linéaire associée f permet d'écrire : $\overrightarrow{G'A'_i} = f(\overrightarrow{GA_i})$

Évaluons le vecteur $\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i}$.

$$\vec{S} = \sum \alpha_i f(\overrightarrow{GA_i}) = \sum f(\alpha_i \overrightarrow{GA_i}) = f(\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i}).$$

Finalement $\vec{S}$ est l'image par f du vecteur nul de $\vec{E}$, c'est-à-dire le vecteur nul de $\vec{F}$. On a ainsi démontré que G' est le barycentre du système de points pondérés $\{ (A'_i, \alpha_i) \}$.

En abrégé, nous dirons qu'*une application affine conserve le barycentre.*

3° <u>THÉORÈME RÉCIPROQUE.</u> — **Toute application de E dans F qui « conserve le barycentre » est affine.**

Soit g une application de E dans F, qui conserve le barycentre de tout système formé d'un nombre fini de points pondérés.

Choisissons arbitrairement un point O de E; désignons par O' le point $g(O)$ de F. Considérons l'application f de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, définie à partir de g et O par

$$\forall \vec{V} \in \vec{E} \qquad g(O + \vec{V}) = O' + f(\vec{V}). \tag{2}$$

Nous allons démontrer que f est linéaire, ce qui nous permettra d'affirmer que g est affine.

α) Si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{E}$ nous avons

$$\begin{cases} g(O + \vec{V}) = O' + f(\vec{V}) \\ g(O + \vec{W}) = O' + f(\vec{W}) \end{cases} \quad \text{et} \quad g(O + \vec{V} + \vec{W}) = O' + f(\vec{V} + \vec{W}).$$

Or nous constatons que, dans E, le point $O + \vec{V} + \vec{W}$ est le barycentre des points O, $O + \vec{V}$, $O + \vec{W}$ respectivement affectés des poids -1, $+1$, $+1$. Il en résulte, après transformation par g, que, dans F, le point $O' + f(\vec{V} + \vec{W})$ est le barycentre des points O', $O' + f(\vec{V})$, $O' + f(\vec{W})$ respectivement affectés des poids -1, $+1$, $+1$, ce qui se traduit par

$$f(\vec{V} + \vec{W}) = f(\vec{V}) + f(\vec{W}).$$

β) Si $\vec{V}$ est un vecteur quelconque de $\vec{E}$ et λ un scalaire quelconque de K, nous avons

$$g(O + \vec{V}) = O' + f(\vec{V}) \quad \text{et} \quad g(O + \lambda\vec{V}) = O' + f(\lambda\vec{V}).$$

Or nous constatons que, dans E, le point $O + \lambda\vec{V}$ est le barycentre des points O et $O + \vec{V}$ affectés des poids $1 - \lambda$ et λ. Il en résulte que, dans F, le point $O' + f(\lambda\vec{V})$ est le barycentre des points O' et $O' + f(\vec{V})$ affectés des poids $1 - \lambda$ et λ, ce qui se traduit par

$$f(\lambda\vec{V}) = \lambda f(\vec{V}).$$

La proposition en résulte.

59. ***Détermination pratique d'une application affine.*** — Nous supposons ici que E et F sont des espaces affines de dimensions finies n et p, respectivement attachés aux espaces vectoriels $\vec{E}$ et $\vec{F}$ de dimensions n et p.

Choisissons des origines, O et P, dans E et F et des bases, $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$, dans $\vec{E}$ et $\vec{F}$. Les points génériques, M et M', de E et F s'écrivent

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} \vec{u}_j x_j \qquad \text{et} \qquad M' = P + \sum_{i=1}^{p} \vec{v}_i x'_i.$$

Dans la suite, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ désignent les matrices unicolonnes dont les éléments sont respectivement les x_j et les x'_i.

1° Soit g l'application affine de E dans F déterminée par la donnée de l'application linéaire f de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ et de l'homologue $A' = g(A)$ d'un point A, arbitrairement choisi, de E.

Dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, f est déterminée par la matrice (p, n)

$$(1) \qquad \begin{array}{c|c} & f(\vec{u}_j) \\ \vec{v}_i & [\alpha_{ij}] \end{array} = \mathcal{G} \iff \begin{cases} f(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^{p} \vec{v}_i \alpha_{ij} \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

A et A' sont déterminés par :

$$A = O + \sum_{j=1}^{n} \vec{u}_j a_j \qquad \text{et} \qquad A' = P + \sum_{i=1}^{p} \vec{v}_i a'_i,$$

et on désigne par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les matrices unicolonnes dont les éléments sont les a_j et les a'_i, coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{PA'}$ dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

$$M' = g(M) \iff \overrightarrow{A'M'} = f\left(\overrightarrow{AM}\right),$$

ce qui s'écrit

$$(2) \qquad \mathcal{M}' = \mathcal{A}' + \mathcal{G} \times (\mathcal{M} - \mathcal{A}).$$

Si possible, on choisit $A = O$ (ce qui n'entraîne pas $A' = P$); (2) se réduit alors à

$$\mathcal{M}' = \mathcal{A}' + \mathcal{G}\mathcal{M}.$$

2° Réciproquement, considérons cette fois l'application g de E dans F qui est définie par l'égalité (2), dans laquelle $\mathcal{G}$ désigne une matrice (p, n).

Avec cette même matrice $\mathcal{G}$, la formule (1) définit une application linéaire, f, de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ et g n'est autre que l'application affine qui est associée à f et transforme A en A'.

60. ***Les fonctions affines.*** — 1° Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel sur le corps commutatif K et E un espace affine attaché à $\vec{E}$. K lui-même peut-être muni d'une structure d'espace affine canonique (n° 49).

Toute application affine de l'espace affine E dans l'espace affine K est dite *fonction affine.*

Une telle fonction, g, est définie par la donnée d'une application linéaire f de $\vec{E}$ dans l'espace vectoriel $\vec{K}$, (ou forme linéaire) et de l'homologue $a' = g(A)$, dans K, d'un point A arbitrairement choisi dans E. On a alors

$$\forall\, M \in E \qquad g(M) = a' + f\left(\overrightarrow{AM}\right).$$

REMARQUE. — L'image par f de $\vec{E}$ étant un sous-espace vectoriel de $\vec{K}$ et la dimension de K étant 1, deux cas peuvent se présenter :

I. $f(\vec{E}) = \{\vec{0}\} \Longrightarrow \forall M \in E, g(M) = a'$; la fonction g est constante.

II. $f(\vec{E}) = \vec{K} \Longrightarrow f$ est surjective $\Longrightarrow g$ est surjective (**57**, 3°).

2° Plaçons nous maintenant dans le cas où E est de dimension finie n. Choisissons un repère $\{O, \mathfrak{U}\}$ de E. Dans K nous utiliserons le *repère canonique* constitué par le point 0 de K et par le vecteur $\vec{e}$ de $\vec{K}$ qui est associé au bipoint (0,1) de K.

La fonction affine g est déterminée par le scalaire $a' = g$ (A) et par les n scalaires α_j tels que $f(\vec{u_j}) = \alpha_j \vec{e}$. Nous avons

$$g(M) = a' + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x_j - a_j),$$

et, si on a choisi A = O,

$$g(M) = a' + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

REMARQUE. — La fonction qui à x associe $ax + b$ était autrefois connue sous le nom de fonction linéaire; elle s'appelle désormais fonction affine, associée à la fonction linéaire (homogène) qui à x associe ax.

3° En particulier, toute application affine de K dans K, s'écrit, dans le repère canonique,

(1) $$g(x) = a' + \alpha x.$$

Éliminons le cas de $\alpha = 0$, c'est-à-dire le cas d'une application constante.
Si $\alpha \neq 0$, g est bijective; on sait (**57**, 3°) que g^{-1} est affine; d'ailleurs

$$g^{-1}(x) = -\frac{a'}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}x.$$

Cherchons si g admet un élément invariant, c'est-à-dire s'il existe un élément x de K tel que

$$g(x) = x \qquad \text{ou} \qquad (1 - \alpha)x = a'.$$

a) $\alpha \neq 1$: g admet l'élément invariant, unique, $q = \dfrac{a'}{1 - \alpha}$.

L'équation (1) s'écrit

$$g(x) = (1 - \alpha)q + \alpha x$$

ou, en posant $$x' = g(x)$$

(2) $$x' - q = \alpha(x - q).$$

Nous dirons que (2) est l'équation canonique de g.

b) $a \neq 1$: g, qui n'admet pas d'élément invariant, est la translation

$$x' = x + a'.$$

Remarque. — Si l'on excepte les applications constantes, les seuls cas possibles sont *a*) et *b*). Il en résulte qu'une application affine bijective de K sur K est une translation si, et seulement si, elle n'admet pas d'élément invariant.

IV. HYPERPLANS AFFINES

61. *Hyperplans d'un espace vectoriel.* — I. *L'espace vectoriel $\vec{E}$ est de dimension finie n.* — Définition. — **On appelle hyperplans de l'espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension n les sous-espaces vectoriels $\vec{H}$ de $\vec{E}$, de dimension $n-1$.**

D'après le n° **186** du tome I, à tout hyperplan $\vec{H}$ de $\vec{E}$ on peut associer une forme linéaire h, sur $\vec{E}$, non nulle, définie à une constante multiplicative près, telle que

$$\vec{X} \in \vec{H} \iff h(\vec{X}) = 0.$$

On dit que $h(\vec{X}) = 0$ est une équation de l'hyperplan $\vec{H}$.

*II. *L'espace vectoriel $\vec{E}$ est de dimension infinie.* — 1° Lemme. — *Tout sous-espace vectoriel $\vec{E}'$ d'un espace vectoriel $\vec{E}$ admet au moins un sous-espace supplémentaire.*

Si $\vec{E}$ est de dimension finie, on peut compléter une base quelconque $\{\mathfrak{U}'\}$ de $\vec{E}'$ par un système libre $\{\mathfrak{U}''\}$, de façon à obtenir une base de $\vec{E}$; le sous-espace de $\vec{E}$ qui est engendré par $\{\mathfrak{U}''\}$ est supplémentaire de $\vec{E}'$.

Si $\vec{E}$ est de dimension infinie, nous admettrons le lemme, la démonstration faisant appel à « l'axiome du choix » ce qui sort du cadre de cet ouvrage.

Cela posé, rappelons (I, **154**) que tout sous-espace supplémentaire de $\vec{E}'$ est isomorphe à l'espace vectoriel quotient $\vec{E}/\vec{E}'$; il a donc la dimension, éventuellement infinie, de $\vec{E}/\vec{E}'$; celle-ci est dite *codimension* de $\vec{E}'$.

Définition I. — *On appelle hyperplan d'un espace vectoriel $\vec{E}$ tout sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ qui admet la codimension* 1.

Naturellement si $\vec{E}$ est de dimension finie n, un sous-espace de dimension p est de codimension $n-p$ et, comme en I, un hyperplan est un sous-espace de dimension $n-1$.

2° Théorème. — *A tout hyperplan $\vec{H}$ de l'espace vectoriel $\vec{E}$, on peut associer une infinité de formes linéaires h, sur $\vec{E}$, telles que*

$$\vec{X} \in \vec{H} \iff h(\vec{X}) = 0.$$

Si h_1 et h_2 sont deux quelconques d'entre elles, il existe un élément non nul, α, du corps de base K *tel que* : $h_2 = \alpha h_1$.

On dit que $h(\vec{X}) = 0$ *est une équation de l'hyperplan* $\vec{H}$.

Donnons-nous un hyperplan $\vec{H}$. Par définition, $\vec{H}$ admet un sous-espace supplémentaire de dimension 1; soit $\{\vec{A}\}$ une base de ce sous-espace.

Le vecteur générique $\vec{X}$ de $\vec{E}$ s'écrit, d'une manière et d'une seule,

$$(1) \qquad \vec{X} = \vec{X}' + \lambda\vec{A}, \qquad \vec{X}' \in \vec{H} \quad \text{et} \quad \lambda \in K.$$

a) Soit h_0 l'application de $\vec{E}$ dans K définie, à partir de (1), par : $h_0(\vec{X}) = \lambda$.

En utilisant l'unicité de (1), on constate que h_0 satisfait aux critères de linéarité, c'est-à-dire que h_0 est une forme linéaire sur $\vec{E}$, d'ailleurs non nulle, puisque $h_0(\vec{A}) = 1$.

Par ailleurs

$$\vec{X} \in \vec{H} \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad h_0(\vec{X}) = 0.$$

b) Inversement, soit f une forme linéaire sur $\vec{E}$ telle que

$$\vec{X} \in \vec{H} \iff f(\vec{X}) = 0.$$

D'après (1), l'image par f du vecteur générique de $\vec{E}$ est

$$f(\vec{X}) = f(\vec{X}') + \lambda f(\vec{A}) \quad \text{ou} \quad \lambda f(\vec{A}) \qquad [\text{en effet : } \vec{X}' \in \vec{H}].$$

$f(\vec{A})$ est un scalaire de K, non nul puisque $\vec{A} \notin \vec{H}$; désignons le par α.

h_0 désignant la forme linéaire mise en évidence en *a*), nous avons $\lambda = h_0(\vec{X})$ et

$$\forall \vec{X} \in \vec{E}, \quad f(\vec{X}) = \alpha h_0(\vec{X}); \quad \text{autrement dit : } f = \alpha h_0.$$

La proposition en résulte.

3° Théorème réciproque. — *A toute forme linéaire non nulle h, sur l'espace vectoriel* $\vec{E}$, *on peut associer un, et un seul, hyperplan* $\vec{H}$ *de* $\vec{E}$ *tel que*

$$\vec{X} \in \vec{H} \iff h(\vec{X}) = 0.$$

Donnons nous une forme linéaire non nulle, h, sur $\vec{E}$:

$$\forall \lambda \in K \quad \begin{cases} h(\vec{X}) = 0 \\ h(\vec{Y}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} h(\vec{X} + \vec{Y}) = 0 \\ h(\lambda\vec{X}) = 0 \end{cases}$$

montre que l'ensemble $\vec{H}$ des vecteurs $\vec{X}$ de $\vec{E}$ tels que $h(\vec{X}) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

La forme h n'étant pas nulle :

$$\exists \vec{A} \in \vec{E} \quad \text{tel que} \quad h(\vec{A}) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \vec{A} \notin \vec{H}.$$

Au vecteur générique, $\vec{X}$, de $\vec{E}$, associons le vecteur

$$\vec{X}' = \vec{X} - \lambda\vec{A} \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{h(\vec{X})}{h(\vec{A})}.$$

Nous avons

$$h(\vec{X}') = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{X}' \in \vec{H}.$$

Ainsi le vecteur générique, $\vec{X}$, de $\vec{E}$ admet l'expression

$$\vec{X} = \vec{X}' + \lambda\vec{A}, \qquad \vec{X}' \in \vec{H} \quad \text{et} \quad \lambda \in K.$$

$\vec{H}$ et le sous-espace de dimension 1 qui est engendré par $\vec{A}$ ont pour somme $\vec{E}$; comme, d'après $\vec{A} \notin \vec{H}$, ils n'ont en commun que $\vec{0}$, il s'agit de sous-espaces supplémentaires. Il en résulte que $\vec{H}$ est un hyperplan de $\vec{E}$.

L'unicité de l'hyperplan $\vec{H}$ résulte de la démonstration même.

4° Nous sommes maintenant en mesure de donner d'un hyperplan une seconde définition équivalente à celle qui a été donnée au 1°.

DÉFINITION II. — *On appelle hyperplan de l'espace vectoriel* $\vec{E}$ *l'ensemble des vecteurs de* $\vec{E}$ *pour lesquels une forme linéaire sur* $\vec{E}$, *donnée, non nulle, prend la valeur* 0.

62. ***Hyperplans d'un espace affine.*** — 1° DÉFINITION. — **Soit** E **un espace affine attaché à un espace vectoriel** $\vec{E}$, **sur un corps commutatif** K. **On appelle hyperplan affine de** E **toute variété linéaire affine** H **de** E **dont la direction** $\vec{H}$ **est un hyperplan de** $\vec{E}$.

C'est ainsi que si E est de dimension finie n, les hyperplans affines de E en sont les variétés linéaires de dimension $n-1$ (droites si $n = 2$, plans si $n = 3$).

2° THÉORÈME. — **A tout hyperplan** H **de l'espace affine** E, **on peut associer une fonction affine,** g, **non constante, définie à un scalaire multiplicatif près telle que**

$$M \in H \iff g(M) = 0.$$

On dit que $g(M) = 0$ est une équation de l'hyperplan H.

En effet, dire que H est un hyperplan de E, c'est dire que, A étant un point fixe, arbitrairement choisi, de H,

$$(1) \qquad M \in H \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{H},$$

la direction $\vec{H}$ de H étant un hyperplan de $\vec{E}$.

Or, d'après le n° 61, il existe une forme linéaire h sur $\vec{E}$, non nulle, telle que

$$(2) \qquad \overrightarrow{AM} \in \vec{H} \iff h\left(\overrightarrow{AM}\right) = 0.$$

Définissons alors la fonction linéaire affine g par

$$(3) \qquad g(M) = h\left(\overrightarrow{AM}\right).$$

(g n'est pas constante, car h n'est pas nulle).

La proposition résulte de (1), (2) et (3).

3° THÉORÈME RÉCIPROQUE. — **A toute fonction affine non constante, g, on peut associer un, et un seul, hyperplan H de l'espace affine E tel que**

$$M \in H \iff g(M) = 0.$$

Donnons-nous une fonction affine non constante g, associée à une forme linéaire non nulle, h, et étudions l'ensemble H des points M de E tels que $g(M) = 0$.

Puisque la fonction g n'est pas constante, elle est surjective (60) : il existe au moins un point A de E tel que $g(A) = 0$. En utilisant la relation

$$g(M) = g(A) + h\left(\overrightarrow{AM}\right),$$

on constate que

$$M \in H \iff h\left(\overrightarrow{AM}\right) = 0.$$

M appartient à H si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ de $\vec{E}$ appartient à l'hyperplan $\vec{H}$ de $\vec{E}$ dont une équation est $h\left(\vec{X}\right) = 0$.

Autrement dit, H est l'hyperplan de E qui contient A et admet $\vec{H}$ pour direction.

4° THÉORÈME. — **Étant donné un hyperplan H de E, qui admet pour équation $g(M) = 0$, l'équation générale des hyperplans parallèles à H est**

$$g(M) - \lambda = 0, \qquad (\lambda \in K).$$

Cet énoncé condense deux propositions :

a) *L'hyperplan* H_λ *d'équation* $g(M) - \lambda = 0$ *est parallèle à* H : en effet, en reprenant la démonstration du théorème du 3°, on constate qu'il existe au moins un point A_λ de E en lequel la fonction $g(M)$ prend la valeur λ et que H_λ est l'hyperplan de direction $\vec{H}$, mené par A_λ; il est donc parallèle à H.

b) *Tout hyperplan* H′, *parallèle à* H, *admet une équation de la forme*

$$g(M) - \lambda = 0.$$

En effet, le point B étant arbitrairement choisi dans H′, l'équation

$$g(M) - g(B) = 0$$

représente, d'après (*a*), un hyperplan parallèle à H; cet hyperplan, qui passe évidemment par B est confondu avec H′.

5° **Cas d'un espace affine E de dimension finie** n. — Soit $\mathcal{R}$ un repère de E; désignons par $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées du point générique M de E dans ce repère.

La fonction affine la plus générale s'écrit

$$g(M) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

L'équation $g(M) = 0$ représente un hyperplan H (à condition que les α_i ne soient pas tous nuls, ce qui équivaut au fait que g n'est pas constante).

L'hyperplan parallèle à H mené par le point donné A $(a_1, \ldots, a_n)$ admet pour équation

$$\alpha_1(x_1 - a_2) + \ldots + \alpha_n(x_n - a_n) = 0.$$

63. ***Intersection d'un hyperplan et d'une droite*** (resp. ***d'un plan***). Dans un espace affine E, attaché à un espace vectoriel $\vec{E}$, considérons un hyperplan H, de direction $\vec{H}$, et soit $g(M) = 0$ une équation de H; g désigne une fonction affine, associée à une forme linéaire non nulle, f, sur $\vec{E}$; rappelons que

$$\vec{X} \in \vec{H} \iff f(\vec{X}) = 0.$$

1° **Intersection de** H **et d'une droite** D **de** E. — La droite D, de direction $\vec{D}$, est déterminée (56, 3°) par le repère affine $\{A, \vec{V}\}$. Le point $A + \rho\vec{V}$ de D est un point de $D \cap H$ si, et seulement si

$$g(A + \rho\vec{V}) = 0.$$

Or :

$$g(A + \rho\vec{V}) = g(A) + f(\rho\vec{V}) \quad \text{ou} \quad g(A) + \rho f(\vec{V}).$$

Nous dirons que, sur le corps K, l'équation

(1) $$g(A) + \rho f(\vec{V}) = 0$$

est l'*équation* en ρ de l'intersection de D et H.

La discussion est la suivante :

1ᵉʳ Cas : $f(\vec{V}) \neq 0$, *ou* $\vec{V} \notin \vec{H}$, *ou* D *n'est pas parallèle à* H. — L'équation (1) a une racine et une seule, D et H ont en commun un point et un seul.

2ᵉ Cas : $f(\vec{V}) = 0$, *ou* $\vec{V} \in \vec{H}$, *ou* D *est parallèle à* H.

Si $g(A) \neq 0$, l'équation (1) n'a pas de solution, D et H n'ont pas de point commun.

Si $g(A) = 0$, tout élément de K est racine de (1), H contient D.

2° **Intersection de** H **et d'un plan** Q **de** E. — Le plan Q, de direction $\vec{Q}$, est déterminé (56, 3°) par le repère affine $\{A, \vec{V}, \vec{V'}\}$. Le point $A + \rho\vec{V} + \rho'\vec{V'}$

de Q est un point de $Q \cap H$ si, et seulement si

$$g\left(A + \rho\vec{V} + \rho'\vec{V'}\right) = 0,$$

ce qui s'écrit

$$g(A) + \rho f\left(\vec{V}\right) + \rho' f\left(\vec{V'}\right) = 0. \qquad (2)$$

La discussion de cette équation est la suivante :

1er Cas : $f\left(\vec{V}\right)$ *et* $f\left(\vec{V'}\right)$ *ne sont pas tous deux nuls*; en d'autres termes $\vec{V}$ *et* $\vec{V'}$ *n'appartiennent pas tous deux à* $\vec{H}$, *et* $\vec{Q}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\vec{H}$; finalement Q *n'est pas parallèle à* H. — Supposons, pour fixer les idées, que l'on a $f\left(\vec{V'}\right) \neq 0$, L'équation (2) est alors de la forme

$$\rho' = \alpha\rho + \beta$$

et $Q \cap H$ est la partie de Q formée par les points M tels que

$$M = A + \rho\vec{V} + (\alpha\rho + \beta)\vec{V'}. \qquad (3)$$

Si nous posons

$$A + \beta\vec{V'} = B \qquad \text{et} \qquad \vec{V} + \alpha\vec{V'} = \vec{W},$$

la relation (3) s'écrit

$$M = B + \rho\vec{W},$$

ce qui prouve que l'intersection de l'hyperplan H et du plan Q est une droite.

2° Cas : $f\left(\vec{V}\right) = 0$, $f\left(\vec{V'}\right) = 0$; dans ce cas $\vec{Q}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{H}$, et Q *est parallèle à* H.

Si $g(A) \neq 0$, l'équation (2) n'a pas de racine, Q et H n'ont pas de point commun.

Si $g(A) = 0$, tout élément de K est racine de (2), H contient Q.

3° **Cas particuliers.** — Étant donné que dans un espace affine de dimension 2 (resp. 3) un hyperplan est une variété linéaire de dimension 1 (resp. 2), c'est-à-dire une droite (resp. un plan), nous pouvons énoncer :

Théorème I. — **Deux droites non parallèles d'un espace affine de dimension deux ont en commun un point et un seul.**

Théorème II. — **Dans un espace affine de dimension trois, un plan et une droite qui n'est pas parallèle au plan ont en commun un point et un seul, d'autre part l'intersection de deux plans non parallèles est une droite.**

V. ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

64. ***Structure euclidienne sur un espace affine réel.*** — 1° **Définition.** — Soit E un espace affine attaché à un espace vectoriel $\vec{E}$, sur le corps des réels; nous dirons alors que E est un espace affine réel. Nous supposons que nous avons muni $\vec{E}$ d'une structure euclidienne, par le choix d'une forme quadratique définie positive; nous dirons que, par le même choix, *nous avons muni* E *d'une structure d'espace affine euclidien*; nous dirons aussi que E est un espace affine euclidien.

2° **Distance.** — Théorème et définition. — **Soit E un espace affine euclidien. L'application de $E \times E$ dans R^+ qui associe au bipoint générique (P, Q) de E la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ de $\vec{E}$ vérifie les axiomes de la distance; cette norme est appelée distance euclidienne des points P et Q.**

On la note : $$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Nous renvoyons le lecteur au n° 132, 2° du tome II, pour la démonstration du théorème et l'étude de la distance euclidienne.

3° **Orthogonalité.** — Définition I. — **On appelle produit scalaire des bipoints (P, Q) et (P′, Q′) le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{P'Q'}$.** Quand ce produit scalaire est nul, c'est-à-dire quand les vecteurs sont orthogonaux, on dit que les bipoints sont *orthogonaux*.

Définition II. — **Deux variétés linéaires E′ et E″ de l'espace affine euclidien E, de dimension finie, sont dites orthogonales quand leurs directions $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ sont deux sous-espaces orthogonaux de l'espace vectoriel euclidien $\vec{E}$.**

Théorème. — **Par un point A de l'espace affine euclidien E, de dimension finie, on peut mener une, et une seule, variété linéaire E′ orthogonale à une variété linéaire donnée E″, de E.**

Il s'agit de la variété linéaire qui contient A et admet pour direction le sous-espace, $\vec{E}'$, de $\vec{E}$ orthogonal à la direction, $\vec{E}''$, de E″.

65. ***La construction de la géométrie élémentaire.*** — 1° La géométrie élémentaire, telle qu'elle a été présentée au lecteur dans les classes secondaires, peut être schématisée de la façon suivante :

I. On part d'un ensemble E, dit *espace*, dont les éléments sont appelés *points*; on distingue certains sous-ensembles de E, sous le nom de *droites* et *plans*.

II. On impose une première série d'axiomes (de géométrie affine), qui lient les points, droites et plans de E.

III. On introduit, sur l'ensemble des bipoints de E, une relation linéaire $\mathcal{R}$, dite *équipollence* et on démontre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $\vec{E} = \frac{E \times E}{\mathcal{R}}$ est dit ensemble des *vecteurs* de E.

IV. On munit $\vec{E}$:

a) d'une loi de composition interne qui est une loi de groupe additif;

b) d'une loi de composition externe, la multiplication par un nombre réel, de telle sorte que $\vec{E}$ se trouve muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps R.

A ce stade de l'étude, on peut énoncer et démontrer des théorèmes d'où il résulte que l'application associant au bipoint (P, Q) de E, le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ de $\vec{E}$ vérifie les trois axiomes de structure d'espace affine que nous avons énoncés au n° 48. Autrement dit : *l'espace de la géométrie élémentaire peut être muni d'une structure affine,* au sens où nous l'entendons dans cet ouvrage.

V. Dans une seconde partie, on impose une seconde série d'axiomes (de géométrie métrique).

On peut alors démontrer que, *moyennant le choix d'une unité de longueur, l'espace de la géométrie élémentaire est devenu un espace affine euclidien,* au sens où nous l'entendons dans cet ouvrage : cela résulte du fait que le produit scalaire, au sens de la géométrie élémentaire, est associé à une forme bilinéaire symétrique, telle que la forme quadratique associée est définie positive.

2° Inversement, on peut démontrer que, *le corps de base étant celui des réels, tout espace affine de dimension* 3, au sens où nous l'entendons dans cet ouvrage, *vérifie les axiomes de la géométrie élémentaire.* Il n'y a pas de difficulté en ce qui concerne les axiomes affines dont nous avons parlé au 1°, II; c'est ainsi que, par exemple, les propositions qui font l'objet de nos théorèmes I, III, IV du n° 56 et du théorème du n° 52, sont en général adoptés comme axiomes de la géométrie élémentaire. La vérification des axiomes métriques, dont il a été question au 1°, est en revanche plus délicate. La comparaison de l'axiomatique de la géométrie élémentaire et de celle que nous avons adoptée ici n'est d'ailleurs pas de notre propos.

3° Tout espace affine (resp. affine euclidien), réel, de dimension 3, vérifiant les axiomes de la géométrie élémentaire, nous pouvons, naturellement, considérer que s'appliquent dans cet espace les propositions démontrées en géométrie élémentaire à partir des axiomes.

EXERCICES

1. — Montrer que si une application affine est involutive, l'application linéaire à laquelle elle est associée est involutive.

2. — Montrer que toute bijection sur lui-même d'un espace affine de dimension $n > 1$ qui conserve l'alignement et l'ordre des points alignés est une bijection affine. (On commencera par vérifier la conservation du parallélisme et du milieu d'un segment).

3. — On se place dans un espace affine de dimension 3.

a) Une sécante Δ rencontre les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC aux points P, Q, R distincts des sommets. Démontrer l'alignement des points I, J, K déterminés par les égalités :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}, \qquad \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BP}, \qquad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}.$$

b) On donne un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Un plan Π rencontre l'arête A_iA_j au point B_{ij} distinct de A_i et A_j. Soit C_i le point déterminé par :

$$\overrightarrow{A_iC_i} = \overrightarrow{A_iB_{ij}} + \overrightarrow{A_iB_{ik}} + \overrightarrow{A_iB_{il}}.$$

Les quatre points tels que C_i sont-ils dans un même plan?

4. — Dans un espace affine de dimension n, on donne un polygone de p côtés, de sommets $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Un hyperplan H coupe la droite A_iA_{i+1} au point $M_i (i = 1, \ldots, p-1)$ et la droite A_pA_1 au point M_p.

a) Démontrer

$$\frac{\overline{M_1A_2}}{\overline{M_1A_1}} \, \frac{\overline{M_2A_3}}{\overline{M_2A_2}} \cdots \frac{\overline{M_pA_1}}{\overline{M_pA_p}} = 1 \qquad \text{(théorème de Ménélaüs)}$$

b) Étudier la réciproque.

5. — Dans un espace affine de dimension n, on donne p droites $D_i (i = 1, \ldots, p)$. Un hyperplan H, qui varie en conservant une direction fixe coupe les droites D_i aux points M_i. Étant donnés p scalaires α_i, de somme non nulle, trouver le lieu du barycentre des points (M_i, α_i).

6. — On se place dans un espace affine de dimension 3 et par les sommets d'un tétraèdre ABCD on mène quatre droites de même direction rencontrant les plans des faces opposées en A', B', C', D'. Déterminer k de manière que les points qui partagent les segments AA', BB', CC', DD' dans le rapport k soient dans un même plan.

7. — *a*) On donne, dans un même plan affine, un triangle ABC, une droite D, et une direction Δ distincte de celle de D. Les parallèles à Δ menées par A, B, C rencontrent D en α, β, γ respectivement. Les parallèles à BC, AC, AB menées par α, β, γ sont les côtés d'un triangle A'B'C'. Démontrer que les triangles ABC, A'B'C' sont symétriques par rapport à un point.

b) On donne, dans un espace affine de dimension 3, un tétraèdre ABCD, un plan P et une direction Δ non parallèle à P. Les parallèles à Δ menées par A, B, C, D rencontrent P en α, β, γ, δ. Les plans parallèles aux faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre, menés par α, β, γ, δ, déterminent un second tétraèdre A'B'C'D'. Les deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' sont-ils symétriques par rapport à un point?

CHAPITRE VI

ESPACES PROJECTIFS

Dans ce chapitre nous surlignons d'une flèche les symboles qui représentent des espaces vectoriels. Nous utiliserons des lettres anglaises pour représenter des espaces projectifs.

I. DÉFINITION. COORDONNÉES HOMOGÈNES

66. ***Définition d'un espace projectif.*** — Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel, sur un corps commutatif K. Rappelons que deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ de $\vec{E}$ sont dits *linéairement dépendants*, ou encore *colinéaires*, s'il existe deux scalaires de K, α et α', non simultanément nuls, tels que $\alpha\vec{V} + \alpha'\vec{V}' = \vec{0}$; en particulier, si $\vec{V} \neq \vec{0}$, la colinéarité de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ équivaut à l'existence de $\lambda \in K$ tel que

$$\vec{V}' = \lambda\vec{V}.$$

Nous allons éliminer la difficulté provenant des vecteurs nuls en considérant les ensembles $\vec{E}^\bullet$ et $K^\bullet$ obtenus en supprimant le vecteur $\vec{0}$ dans $\vec{E}$ et le scalaire 0 dans K (on dit que l'on a *épointé* $\vec{E}$ et K).

1° <u>Théorème et définition.</u> — **Dans l'ensemble des vecteurs de $\vec{E}^\bullet$ la relation binaire « Il existe un scalaire λ de $K^\bullet$ tel que $\vec{V}' = \lambda\vec{V}$ » est une relation d'équivalence entre $\vec{V}$ et $\vec{V}'$. On l'appelle colinéarité.**

La relation linéaire considérée est en effet

réflexive : pour tout vecteur $\vec{V}$ de $\vec{E}^\bullet$ on a $\vec{V} = 1\,\vec{V}$.

symétrique :

$$\exists\lambda \in K^\bullet \text{ tel que } \vec{V}' = \lambda\vec{V} \Longrightarrow \exists\mu \in K^\bullet \text{ tel que } \vec{V} = \mu\vec{V}', \quad (\mu = \lambda^{-1}).$$

transitive :

$$\left.\begin{array}{l}\exists\lambda \in K^\bullet \text{ tel que } \vec{V}' = \lambda\vec{V} \\ \exists\lambda' \in K^\bullet \text{ tel que } \vec{V}'' = \lambda'\vec{V}'\end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\mu \in K^\bullet \text{ tel que } \vec{V}'' = \mu\vec{V}, \quad (\mu = \lambda\lambda').$$

<u>DÉFINITION.</u> — **On appelle espace projectif issu de l'espace vectoriel $\vec{E}$ l'ensemble quotient $\mathfrak{L}$ de $\vec{E}^\bullet$ par la relation d'équivalence appelée colinéarité.**

Les éléments de $\mathfrak{L}$ sont appelés des *points*; un point M de $\mathfrak{L}$ est donc une classe d'équivalence de $\vec{E}^\bullet$, c'est-à-dire un sous-espace de dimension 1 de $\vec{E}$, privé de $\vec{0}$. Tout vecteur $\vec{M}$ de la classe d'équivalence M sera considéré comme un *représentant homogène* dans $\vec{E}^\bullet$ du point M de $\mathfrak{L}$, les autres représentants étant les vecteurs $\lambda\vec{M}(\lambda \in K^\bullet)$.

REMARQUE I. — Si nous considérons $\vec{E}$ comme muni de sa structure affine canonique (49), un sous-espace de dimension 1 de $\vec{E}$ est considéré comme une droite affine issue de l'origine O. Un point M de l'espace projectif $\mathfrak{L}$ est donc une droite affine issue de l'origine (privée de cette origine).

REMARQUE II. — *Un espace projectif n'est pas un espace vectoriel.*
En effet dans l'espace projectif $\mathfrak{L}$ on ne peut définir une addition car, si $\vec{M}$ et $\vec{M}'$ sont des représentants des points M et M', il en est de même pour $\lambda\vec{M}$ et $\vec{M}'(\lambda \in K^\bullet)$; or le point dont un représentant est $\lambda\vec{M} + \vec{M}'$ varie avec λ.

2° **Dimension d'un espace projectif.** — L'espace projectif issu d'un espace vectoriel de dimension finie $n + 1$ est dit espace projectif de dimension n. Cette convention trouvera sa justification au n° 67.

Un espace projectif de dimension 0 est réduit à un point. Un espace projectif de dimension 1 (resp. 2) est appelé *droite projective* (resp. *plan projectif*).

3° **Exemple.** — L'espace projectif issu de l'espace vectoriel $\overrightarrow{K^{n+1}}$ (I, 150, ex. II), est de dimension n. On le désigne par la notation $\mathfrak{L}_n(K)$. Son élément générique est l'ensemble

$$(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_{n+1}); \text{ les } X_i \text{ non tous nuls; } \lambda \text{ peut parcourir } K^\bullet.$$

Au sous chapitre II, nous étudierons plus spécialement $\mathfrak{L}_1(K)$, qui sera noté $\tilde{K}$.

67. *Coordonnées homogènes.* — Nous nous limitons dans ce paragraphe au cas d'un espace projectif $\mathcal{P}$ de dimension finie n, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension $n + 1$.

1° Définition. — **On appelle coordonnées homogènes d'un point M de $\mathcal{P}$, par rapport à une base $\mathcal{U}$ de $\vec{E}$, les coordonnées dans cette base de l'un quelconque $\vec{M}$ des représentants homogènes de M.**

Explicitons : $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n+1}\}$ et $\vec{M} = \sum_1^{n+1} \vec{u}_i . X_i$,

les X_i sont des scalaires de K, non tous nuls puisque $\vec{M} \neq \vec{0}$.

Si nous remplaçons $\vec{M}$ par un autre représentant, $\vec{M}'$, de M

$$\exists \lambda \in K^{\bullet} \quad \text{tel que} \quad \vec{M}' = \lambda \vec{M} \implies \vec{M}' = \sum_1^{n+1} \vec{u}_i . \lambda X_i .$$

a) Autrement dit un point M de $\mathcal{P}$ admet, par rapport à la base donnée $\mathcal{U}$ de $\vec{E}$, une infinité de systèmes de coordonnées homogènes, de la forme

(1) $(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_{n+1})$; les X_i non tous nuls; λ peut parcourir $K^{\bullet}$.

b) Inversement, étant donné le système (1), on peut lui associer, grâce à la base $\mathcal{U}$ de $\vec{E}$, un (et un seul) système de vecteurs colinéaires de $\vec{E}^{\bullet}$, et par suite un (et un seul) point M de $\mathcal{P}$.

c) En conclusion nous avons une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}_n(K)$,

$$M \in P \overset{\theta}{\longleftrightarrow} (\lambda X_1, \ldots, \lambda X_{n+1}) \in \mathcal{P}_n(K),$$

mais cette bijection, qui dépend du choix de la base $\mathcal{U}$ de $\vec{E}$, n'est pas canonique.

Remarque. — En passant par l'intermédiaire de $\mathcal{P}_n(K)$, on peut établir une bijection entre les espaces projectifs issus de deux espaces vectoriels sur K, de dimension commune $n + 1$.

2° Changement de base. — Soit $\mathcal{U}'$ une seconde base de $\vec{E}$, définie par rapport à $\mathcal{U}$ par la matrice de passage d'ordre $n + 1$, régulière,

$$(2) \qquad \begin{array}{c|c} & \vec{u}'_j \\ \hline \vec{u}_i & [p_{ij}] \end{array} = P \iff \begin{cases} \vec{u}'_j = \sum_{i=1}^{n+1} \vec{u}_i . p_{ij} \\ j = 1, \ldots, n+1 \end{cases}$$

Soit $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$) une matrice unicolonne dont les $n + 1$ éléments X_i (resp. X'_j) constituent un système de coordonnées homogènes dans la base $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$) du point générique M de $\mathcal{P}$.

Les vecteurs $\sum_i \vec{u}_i . X_i$ et $\sum_j \vec{u}'_j . X'_j$ étant deux représentants de M :

(3) $\exists \rho \in K^\bullet$ tel que $\sum_i \vec{u}_i . X_i = \rho \sum_j \vec{u}'_j . X'_j$.

En portant dans (3) les expressions (2) de $\vec{u}'_j$, on obtient (cf. I, **224**)

$$X_i = \rho \sum_j p_{ij} X'_j \iff \mathcal{M} = \rho P \mathcal{M}'.$$

Remarque I. — Si les vecteurs de $\mathcal{U}'$ sont colinéaires à ceux de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire si

$$\vec{u}'_j = \vec{u}_j . \alpha_j, \quad (\alpha_j \in K^\bullet), \quad (j = 1, \ldots, n+1),$$

on obtient $X_j = \lambda \alpha_j X'_j$.

Remarque II. — En particulier, supposons les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ déduites l'une de l'autre par une « homothétie » :

$$\vec{u}'_j = \vec{u}_j . \alpha, \quad (\alpha \in K^\bullet) \implies X_j = \rho \alpha X'_j ;$$

on peut considérer que tout point M de $\mathcal{L}$ admet les mêmes coordonnées homogènes par rapport aux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$: *en ce qui concerne les coordonnées homogènes dans un espace projectif, les bases de l'espace vectoriel initial n'interviennent qu'à une homothétie près.*

II. BIRAPPORT DE QUATRE POINTS D'UNE DROITE PROJECTIVE

68. *Notion de birapport.* — 1° **Définition.** — Soit $\mathcal{L}$ une droite projective. Il s'agit de l'espace projectif de dimension 1 qui est issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, de dimension 2, sur un corps K.

$\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ étant une base arbitrairement choisie de $\vec{E}$, le point générique M de $\mathcal{L}$ est repéré par un système (X, T) de coordonnées homogènes dans la base $\mathcal{U}$, c'est-à-dire par la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix}$$

Si on considère un nombre fini de points de $\mathcal{L}$, on peut les désigner par la lettre M, affectée d'indices; aux points M_i et M_j, de coordonnées homogènes (X_i, T_i) et (X_j, T_j), on associe la matrice et le déterminant ainsi définis :

$$[\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j] = \begin{bmatrix} X_i & X_j \\ T_i & T_j \end{bmatrix}, \quad \omega_{ij} = \text{dét}\, [\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j] = \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ T_i & T_j \end{vmatrix}$$

L'un et l'autre dépendent d'une part du choix de $\mathcal{U}$, d'autre part du choix des représentants homogènes de M_i et M_j dans $\mathcal{U}$.

Mais si on choisit une autre base $\mathcal{U}'$ de $\vec{E}$, et si P est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$, il existe des scalaires ρ_i et ρ_j de $K^\bullet$ tels que

$$\begin{bmatrix} X_i \\ T_i \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \rho_i X'_i \\ \rho_i T'_i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_j \\ T_j \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \rho_j X'_j \\ \rho_j T'_j \end{bmatrix}$$

On peut juxtaposer les deux matrices unicolonnes dans une même matrice

$$\begin{bmatrix} X_i & X_j \\ T_i & T_j \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j] = P \begin{bmatrix} \rho_i X'_i & \rho_j X'_j \\ \rho_i T'_i & \rho_j T'_j \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ij} = \rho_i \rho_j \times \text{dét}\, P \times \omega'_{ij}$$

Notons que $\rho_i \rho_j \times$ dét P est un scalaire non nul de K et que

$$M_i = M_j \iff \omega_{ij} = 0 \qquad (\text{ou} \quad \omega'_{ij} = 0).$$

Cela posé, considérons trois points de $\mathcal{L}$, M_1, M_2, M_3, *deux à deux distincts.* Le rapport $\frac{\omega_{31}}{\omega_{32}}$ est un élément de $K^\bullet$ qui ne dépend pas du choix de $\mathcal{U}$, puisque, si on considère successivement deux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$, on a

(1) $$\frac{\omega_{31}}{\omega_{32}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\omega'_{31}}{\omega'_{32}}.$$

Par contre, ce rapport dépend encore du choix des représentants homogènes de M_1 et M_2. Considérons maintenant quatre points de $\mathcal{L}$, M_1, M_2, M_3, M_4, *deux à deux distincts.*

En adjoignant à (1) la relation

(2) $$\frac{\omega_{41}}{\omega_{42}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\omega'_{41}}{\omega'_{42}},$$

nous constatons que, tous les scalaires qui interviennent étant non nuls,

(3) $$\frac{\omega_{31}}{\omega_{32}} : \frac{\omega_{41}}{\omega_{42}} = \frac{\omega'_{31}}{\omega'_{32}} : \frac{\omega'_{41}}{\omega'_{42}}.$$

Nous sommes conduits à énoncer :

THÉORÈME FONDAMENTAL ET DÉFINITION. — **Étant donné un système rangé** $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ **de quatre points de la droite projective** $\mathcal{L}$ **issue de l'espace vectoriel** $\vec{E}$, **le rapport**

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{32}} : \frac{\omega_{41}}{\omega_{42}}$$

est un élément non nul du corps K, indépendant du choix de la base de $\vec{E}$ **et des représentants homogènes des quatre points. On l'appelle rapport anharmonique (ou birapport) de ces quatre points; on le représente par la notation** (M_1, M_2, M_3, M_4) :

$$\boxed{(M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{\omega_{31}}{\omega_{32}} : \frac{\omega_{41}}{\omega_{42}} \qquad \text{avec} \qquad \omega_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ T_i & T_j \end{vmatrix}}$$

2° Birapports de quatre points, suivant l'ordre dans lequel on les considère. — Étant donnés quatre points *distincts*, M_1, M_2, M_3, M_4 de $\mathcal{L}$, il existe $4! = 24$ permutations de ces points ; à chacune d'elles correspond un birapport. Nous allons montrer que ces birapports sont liés par des relations simples.

a) Le birapport de quatre points ne change pas si, simultanément, on transpose deux quelconques de ces points, et les deux autres.

Considérons en effet l'égalité

$$(4) \qquad (M_i, M_j, M_k, M_l) = \frac{\omega_{ki}\ \omega_{lj}}{\omega_{kj}\ \omega_{li}}.$$

Transposons

i et j k et l	i et k j et l	i et l j et k.

Nous obtenons

$\frac{\omega_{lj}\ \omega_{ki}}{\omega_{li}\ \omega_{kj}}$	$\frac{\omega_{ik}\ \omega_{jl}}{\omega_{il}\ \omega_{jk}}$	$\frac{\omega_{jl}\ \omega_{ik}}{\omega_{jk}\ \omega_{il}}$

En tenant compte de ce que $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$, nous constatons que le second membre de l'égalité (4) reste invariant.

D'après cette propriété *a*), on peut toujours supposer que le point M_1 occupe la première place et *le nombre des birapports distincts est au plus égal à six*, nombre des permutations de M_2, M_3, M_4.

b) Si on transpose les deux derniers points, le birapport est transformé en son inverse, ainsi qu'on le constate en transposant les indices k et l dans la relation (4).

c) Si on transpose les deux éléments moyens, le birapport est transformé en son complément à l'unité.

En effet calculons :

$$r + r' = (M_i, M_j, M_k, M_l) + (M_i, M_k, M_j, M_l).$$

Nous avons :

$$r + r' = \frac{\omega_{ki}\,\omega_{lj}}{\omega_{kj}\,\omega_{li}} + \frac{\omega_{ji}\,\omega_{lk}}{\omega_{jk}\,\omega_{li}},$$

ce qui, compte-tenu de $\omega_{\beta\alpha} = -\omega_{\alpha\beta}$, s'écrit

$$r + r' = -\frac{\omega_{ij}\,\omega_{kl} + \omega_{ik}\,\omega_{lj}}{\omega_{il}\,\omega_{jk}}$$

ou $$r + r' = 1 - \frac{\Delta}{\omega_{il}\,\omega_{jk}} \quad \text{avec} \quad \Delta = \omega_{ij}\,\omega_{kl} + \omega_{ik}\,\omega_{lj} + \omega_{il}\,\omega_{jk}.$$

Or Δ n'est autre que le développement, par rapport aux éléments de la première ligne, du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{ij} & \omega_{ik} & \omega_{il} \\ X_j & X_k & X_l \\ T_j & T_k & T_l \end{vmatrix}$$

qui s'écrit

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_iT_j - T_iX_j & X_iT_k - T_iX_k & X_iT_l - T_iX_l \\ X_j & X_k & X_l \\ T_j & T_k & T_l \end{vmatrix};$$

on voit que les éléments de la première ligne sont des combinaisons linéaire des éléments correspondants des deux autres. On en déduit

$$\Delta = 0 \quad \text{et} \quad r' = 1 - r.$$

d) En utilisant alternativement la propriété *b*) et la propriété *c*) nous obtenons, à partir de l'un d'eux, les six birapports mis en évidence en *a*) :

$$\begin{array}{ccccc} (M_1, M_2, M_3, M_4) = r & \longleftrightarrow & (M_1, M_3, M_2, M_4) = 1 - r & \longleftrightarrow & (M_1, M_3, M_4, M_2) = \dfrac{1}{1-r} \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ (M_1, M_2, M_4, M_3) = \dfrac{1}{r} & \longleftrightarrow & (M_1, M_4, M_2, M_3) = \dfrac{r-1}{r} & \longleftrightarrow & (M_1, M_4, M_3, M_2) = \dfrac{r}{r-1} \end{array}$$

3° Nous étendrons, au paragraphe suivant la notion de birapport au cas où deux points M_1, M_2, M_3, M_4 sont confondus.

69. ***Birapport de quatre éléments de la droite projective*** $\tilde{K}$. — 1° **Définition de la droite projective** $\tilde{K}$. — Nous désignerons par $\tilde{K}$ l'espace projectif $\mathfrak{L}_1(K)$ de dimension 1, issu de l'espace vectoriel $\vec{K}^2$. Autrement dit, $\tilde{K}$ **est l'ensemble quotient de** $\vec{K}^2 - \{0, 0\}$ **par la relation d'équivalence appelée colinéarité.** $\vec{V}(X, T)$ et $\vec{V}'(X', T')$ sont deux représentants homogènes du même élément M de $\tilde{K}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in K^*$ tel que

$$\vec{V}' = \lambda \vec{V} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X' = \lambda X \\ T' = \lambda T. \end{cases}$$

L'existence de λ peut se traduire par la condition équivalente

$$\begin{vmatrix} X & X' \\ T & T' \end{vmatrix} = 0,$$

en sorte qu'en notant $M(X, T)$ un élément de $\tilde{K}$ dont X et T sont des coordonnées homogènes, on peut écrire

$$M(X, T) = M'(X', T') \iff \begin{vmatrix} X & X' \\ T & T' \end{vmatrix} = 0.$$

a) A tout élément x de K associons l'élément de $\tilde{K}$ dont un représentant homogène est $(x, 1)$.

b) A tout élément de $\tilde{K}$ dont un représentant homogène est (X, T), avec $T \neq 0$, associons l'élément $x = \frac{X}{T}$ de K.

c) A l'élément de $\tilde{K}$ dont un représentant homogène est (X, 0), ce qui implique $X \neq 0$, — et qu'on peut définir aussi par le représentant (1, 0) — ne correspond aucun élément de K.

A condition d'adjoindre à K un élément, appelé « infini », et noté ∞, on dispose de la bijection de $\tilde{K}$ sur $K + \{ \infty \}$ définie par

$$\begin{cases} \text{classe } (x, 1) \longleftrightarrow x \\ \text{classe } (1, 0) \longleftrightarrow \infty. \end{cases}$$

Nous nous autoriserons de cette bijection pour identifier (c'est-à-dire désigner par le même symbole)

$$x \quad \text{et} \quad \text{classe } (x, 1), \qquad K + \{ \infty \} \quad \text{et} \quad \tilde{K}.$$

REMARQUE. — Nous ne disposons pas de loi interne partout définie sur $\tilde{K}$; il n'est donc pas question de conférer à cet ensemble une structure de corps.

2° **L'équation du premier degré sur $\tilde{K}$.** — PROBLÈME : *a et b étant deux éléments donnés du corps* K, *trouver tous les éléments de l'ensemble $\tilde{K}$ dont un représentant* (X, T) *satisfait à la condition*

$$aX + bT = 0. \tag{1}$$

1er CAS : *Supposons $a = b = 0$.* Tout élément de $\tilde{K}$ répond à la question.

2e CAS : *Supposons $a = 0$, $b \neq 0$.* L'élément ∞ de $\tilde{K}$, et lui seul, répond à la question.

3e CAS : *Supposons $a \neq 0$.* L'élément ∞ de $\tilde{K}$ ne répond pas à la question; toute solution éventuelle admet donc un représentant de la forme $(x, 1)$ et on est ramené à résoudre l'équation sur K

$$ax + b = 0$$

qui admet une et, une seule racine, $x = -\frac{b}{a}$. Autrement dit, (1) est vérifiée par l'élément : classe $(-b, a)$ de $\tilde{K}$, et par lui seul.

En résumé, nous dirons que (1) est une *équation du premier degré* sur $\tilde{K}$ et que (1) admet une solution unique, classe $(-b, a)$, sauf si $a = b = 0$, auquel cas tout élément de $\tilde{K}$ vérifie (1).

3° **Birapport de quatre éléments de la droite projective $\tilde{K}$.** — Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre éléments deux à deux *distincts* de $\tilde{K}$, autres que ∞, nous pouvons prendre

$$\omega_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_i - x_j$$

et écrire

(2) $$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.}$$

Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre éléments deux à deux *distincts* de $\tilde{K}$, avec $x_4 = \infty$, nous pouvons prendre

$$\omega_{i4} = \begin{vmatrix} x_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3$$

et $\omega_{ij} = x_i - x_j$, pour i et j distincts (et autres que 4).

Il en résulte (1) :

(3) $$\boxed{(x_1, x_2, x_3, \infty) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.}$$

En utilisant les propriétés établies au 1° *b*) et *c*), on en déduit

$$(x_1, x_2, \infty, x_3) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}; \qquad (x_1, \infty, x_2, x_3) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1};$$
$$(\infty, x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

4° **Extension de la notion de birapport à des points non distincts.**

a) Nous n'avons défini jusqu'ici le birapport $r = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de quatre points d'une droite projective $\mathfrak{L}$ (et en particulier de quatre points de la droite projective $\tilde{K}$) que si ces points étaient deux à deux distincts.

Observons que dans ce cas $r = \frac{\omega_{31}\,\omega_{42}}{\omega_{32}\,\omega_{41}}$ (les notations sont celles du paragraphe précédent) peut être considéré comme l'élément de l'ensemble $\tilde{K}$ dont un représentant homogène est $(\omega_{31}\omega_{42}, \omega_{32}\omega_{41})$; or $\omega_{ij} = 0$ si, et seulement si, les points M_i et M_j sont confondus.

Nous sommes conduits à adopter la convention suivante :

$$\begin{array}{llll} M_1 = M_3 & \text{ou} & M_2 = M_4 & \Longleftrightarrow \quad r = 0 \\ M_2 = M_3 & \text{ou} & M_1 = M_4 & \Longleftrightarrow \quad r = \infty \\ M_1 = M_2 & \text{ou} & M_3 = M_4 & \Longleftrightarrow \quad r = 1. \end{array}$$

Autrement dit *si dans le système* $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ *se trouvent au maximum deux points confondus, le birapport de ces quatre points est l'élément de* $\tilde{K}$ *dont un représentant homogène est* $(\omega_{31}\omega_{42}, \omega_{32}\omega_{41})$.

---

(1) On peut retenir dans la pratique, la formule (3) en écrivant

$$(x_1, x_2, x_3, \infty) = \lim_{x_4 \to \infty} \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},$$

la limite étant calculée, *comme en Analyse*, sur R.

b) Interprétation d'un élément x de $\tilde{K}$ comme birapport. — Les résultats obtenus au 3° et les conventions faites au 4° permettent d'écrire

$$\forall x \in \tilde{K}, \qquad (\infty, 0, 1, x) = x.$$

Ce résultat sera souvent utilisé dans la suite.

c) Il n'existe pas d'élément de $\tilde{K}$ représenté par (0,0); il est donc impossible de définir le birapport d'un système de quatre points dont trois sont confondus. Nous serons cependant amenés, pour généraliser certains résultats, à attribuer par convention un birapport à un tel système.

70. ***Division harmonique.*** — Nous reprenons la droite projective $\mathfrak{L}$ la plus générale. — *a)* DÉFINITION. — **Les deux points M_3 et M_4 de $\mathfrak{L}$ sont dits conjugués harmoniques par rapport aux deux points M_1 et M_2 de $\mathfrak{L}$ si**

$$(1) \qquad (M_1, M_2, M_3, M_4) = -1.$$

Il résulte du n° 68, 2° que la relation (1) peut prendre les formes équivalentes

$$(M_3, M_4, M_1, M_2) = -1 \qquad \text{et} \qquad (M_1, M_2, M_4, M_3) = -1,$$

de sorte que la propriété de conjugaison appartient aux couples *non rangés* (M_1, M_2), (M_3, M_4) et qu'elle est réciproque par rapport à ces couples. On dit que $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ est une *division harmonique.*

D'après la convention faite au n° 69, 4°, *c*, il peut être commode de considérer que tout point $M_4 \neq A$ est conjugué du point $M_3 = A$ par rapport à deux points M_1 et M_2 confondus avec A (cf. nos 218 et 224).

b) Si $\mathfrak{L} = \tilde{K}$, la relation (1) s'écrit, dans le cas d'éléments finis,

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = -1$$

ou

$$\boxed{2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4).}$$

Dans le cas particulier où $x_1 = 0$, on obtient la relation, dite de Descartes

$$\boxed{\frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}.}$$

Si $x_4 = \infty$, la relation (1) s'écrit

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = -1 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{2\,x_3 = x_1 + x_2.}$$

En particulier, nous aurons l'occasion l'utiliser la relation

$$\boxed{(a, b, 0, \infty) = -1 \iff a + b = 0.}$$

71. ***Notion d'abscisse projective.*** — 1° Soit $\mathfrak{L}$ la droite projective la plus générale, issue de l'espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension 2.

Soit (X, T) des coordonnées homogènes d'un point quelconque M de $\mathfrak{L}$ par rapport à la base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de $\vec{E}$.

A l'ensemble rangé (X, T) de $\vec{K}^{2\bullet}$ nous associons l'élément x de $\tilde{K}$,

$$x = \text{classe de } (X, T),$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{X}{T} \ (\in K) \quad \text{si} \quad T \neq 0, \qquad x = \infty \quad \text{si} \quad T = 0.$$

Nous définissons ainsi une bijection φ de $\mathfrak{L}$ sur $\tilde{K}$

$$M \in \mathfrak{L} \longleftrightarrow x \in \tilde{K}.$$

Nous dirons que x est l'*abscisse projective* du point M de $\mathfrak{L}$, par rapport à la base $\mathfrak{U}$ de $\vec{E}$.

2° **Expression du birapport.** — Que l'on considère les points M de la droite projective $\mathfrak{L}$, ou les points x de la droite projective $\tilde{K}$, le birapport (M_1, M_2, M_3, M_4) et le birapport (x_1, x_2, x_3, x_4) ont, d'après le théorème fondamental, la même expression

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{32}} : \frac{\omega_{41}}{\omega_{42}} \qquad \text{avec} \qquad \omega_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ T_i & T_j \end{vmatrix}$$

Il en résulte que *le birapport de quatre points d'une droite projective est le birapport de leurs abscisses projectives.*

3° **Interprétation géométrique de l'abscisse projective.** — Introduisons les points de $\mathfrak{L}$ qui admettent $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ pour représentants homogènes, ou encore (1, 0), (0, 1) et (1, 1) pour coordonnées homogènes.

Les abscisses projectives de ces points étant ∞, 0, 1, il est commode de les désigner par M_∞, M_0, M_1 et on a

$$(M_\infty, M_0, M_1, M) = (\infty, 0, 1, x) \quad \text{ou} \quad x.$$

4° <u>Théorème (1).</u> — **Étant donné un système rangé, $\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ de points deux à deux distincts de $\mathfrak{L}$, il existe un — et, à une homothétie près, un seul — système de représentants homogènes de ces points dans $\vec{E}$ de la forme**

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j}\}$$

(1) Cette proposition est démontrée, dans des conditions plus générales au n° 79; la démonstration est donnée ici pour les élèves des classes A1.

I) *Existence.* — Soit $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ des représentants homogènes dans $\vec{E}^{\bullet}$ des points A, B, C de P.

$\{\vec{A}, \vec{B}\}$ est une base de $\vec{E}$, et il existe deux éléments λ et μ de K, tels que

$$\vec{C} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B};$$

λ et μ sont différents de 0 puisque $\vec{C}$, par hypothèse, n'est colinéaire ni à $\vec{A}$, ni à $\vec{B}$.

En posant $\vec{i} = \lambda\vec{A}$, $\vec{j} = \mu\vec{B}$, la base $\mathcal{U} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ répond aux conditions de l'énoncé.

II) *Unicité.* — Si $\{\vec{i'}, \vec{j'}\}$ est une autre base de $\vec{E}$ dans laquelle les points A, B, C ont pour représentants $\vec{i'}, \vec{j'}$ et $\vec{i'} + \vec{j'}$, c'est que l'on a

$$\vec{i'} = \alpha\vec{i}, \quad \vec{j'} = \beta\vec{j}, \quad \vec{i'} + \vec{j'} = \rho\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

ou enfin $$(\alpha - \rho)\vec{i} + (\beta - \rho)\vec{j} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = \rho.$$

Autrement dit, seuls les repères obtenus « par homothétie » à partir de $\mathcal{U}$ répondent aux conditions du théorème.

Application. — Si nous choisissons la base $\mathcal{U} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ de $\vec{E}$, avec $\vec{u_1} = \vec{i}$ et $\vec{u_2} = \vec{j}$, les points M_∞, M_0, M_1 du 3° sont précisément A, B, C. Le point générique M de $\mathfrak{L}$ peut donc être déterminé, dans ce que nous appellerons le repère $\mathcal{R} = \}$ A, B, C $\{$ de $\mathfrak{L}$ par le birapport (A, B, C, M) qui est un élément de $\tilde{K}$ que nous noterons x. La correspondance entre M et x est une bijection de $\mathfrak{L}$ sur $\tilde{K}$.

Le tableau ci-dessous résume la correspondance entre éléments homologues;

	$\mathfrak{L}$	$\leftrightarrow$	$\tilde{K}$
point à l'infini de $\mathcal{R}$	$M_\infty = A$		∞
point origine de $\mathcal{R}$	$M_0 = B$		0
point unitaire de $\mathcal{R}$	$M_1 = C$		1
point générique de $\mathfrak{L}$	M		x

$$(A, B, C, M) = (\infty, 0, 1, x).$$

Remarque. — Les points M et M′ de la droite projective $\mathfrak{L}$, d'abscisses projectives x et x', sont conjugués (70) par rapport aux points $M_\infty = A$ et $M_0 = B$ si, et seulement si,

$$(M, M', M_0, M_\infty) = -1 \quad \text{ou} \quad (x, x', 0, \infty) = -1 \quad \text{ou} \quad x + x' = 0.$$

72. ***Relations entre droite affine et droite projective.*** — 1° THÉORÈME. — **Le complémentaire d'un point donné dans une droite projective peut être muni d'une structure affine.**

Soit $\mathcal{L}$ une droite projective, issue d'un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension 2, sur le corps K et soit A un point donné de $\mathcal{L}$. Posons $D = \mathcal{L} - \{ A \}$.

Choissons arbitrairement deux points B et C de $\mathcal{L}$ et rapportons $\mathcal{L}$ au repère $\mathcal{R} = \{ A, B, C \}$, comme cela vient d'être expliqué au n° 71, 4° : $\vec{E}$ est rapporté à une base $\{ \vec{i}, \vec{j} \}$ formée de représentants de A et B, C admet le représentant $\vec{i} + \vec{j}$, le point générique M de $\mathcal{L}$ est déterminé par le birapport

$$x = (A, B, C, M), \qquad x \in \tilde{K}$$
$$M \in D \iff x \neq \infty$$

Au point générique M de D on peut associer biunivoquement l'élément x de K ou encore la classe de $(x, 1)$ ou enfin le représentant $x\vec{i} + \vec{j}$.

Convenons d'associer au bipoint (M, M′) de D la différence $(x' - x)\vec{i}$ des représentants $x'\vec{i} + \vec{j}$ et $x\vec{i} + \vec{j}$ de M′ et M. Nous définissons ainsi une application de D × D dans le sous-espace $\vec{F}$ de $\vec{E}$, de dimension 1, qui est engendré par $\vec{i}$. On constate (1) que grâce à cette application D vérifie les axiomes de structure d'espace affine : D est donc une droite affine attachée à $\vec{F}$.

En particulier, aux bipoints (B, C) et (B, M) de E sont associés les vecteurs $\vec{i}$ et $x\vec{i}$ de $\vec{F}$, ce qui permet d'écrire

$$C = B + \vec{i}, \qquad M = B + x\vec{i} \qquad \text{et} \qquad M = B + x(C - B).$$

Autrement dit l'abscisse projective de $M \in D$ dans le repère $\{ A, B, C \}$ de $\mathcal{L}$ est égale à l'abscisse affine de M dans le repère $\{ B, \overrightarrow{BC} \}$ de D.

a) Étant donné que nous avons choisi arbitrairement les points B et C de D, ou encore le repère $\{ B, \overrightarrow{BC} \}$ de D, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Sur une droite projective $\mathcal{L}$, considérée comme la réunion d'une droite affine D et d'un point à l'infini A, le birapport de quatre points de D est celui de leurs abscisses affines dans l'un quelconque des repères de D.**

b) Soient M_1, M_2, M_3 trois points quelconques de $D = \mathcal{L} - \{ A \}$ et x_1, x_2, x_3 leurs abscisses affines dans un repère quelconque $\{ B, \vec{i} \}$ de D. Nous avons :

$$(A, M_1, M_2, M_3) = (\infty, x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Or $$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1)\vec{i}.$$

(1) Cette étude sera reprise et complétée au chapitre VIII.

Il en résulte :

THÉORÈME. — **Sur une droite projective $\mathcal{L}$, considérée comme la réunion d'une droite affine D et d'un point à l'infini A, le birapport de A et de trois points M_1, M_2, M_3 de D est égal au rapport du vecteur $\overrightarrow{M_1M_3}$ au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$:**

$$(A, M_1, M_2, M_3) = \rho \iff \overrightarrow{M_1M_3} = \rho\overrightarrow{M_1M_2}.$$

2° **Complétion projective d'une droite affine.** — Nous montrerons au chapitre VIII comment on peut adjoindre à une droite affine donnée D un « point à l'infini » A de façon que l'ensemble $D + \{A\}$ puisse être considéré comme une droite projective.

III. VARIÉTÉS LINÉAIRES PROJECTIVES. DROITES, PLANS ET HYPERPLANS

73. ***Notion de variété linéaire projective.*** — 1° DÉFINITION. — **Soit $\mathcal{L}$ un espace projectif issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$. Toute partie, $\mathcal{L}'$, de $\mathcal{L}$ qui peut être considérée comme l'espace projectif issu d'un sous-espace vectoriel, $\vec{E}'$, de $\vec{E}$ est dite variété linéaire projective de $\mathcal{L}$** (ou, si aucune confusion n'est possible, variété linéaire de $\mathcal{L}$; on dit aussi *sous-espace projectif* de $\mathcal{L}$).

Si $\vec{E}'$ est de dimension finie p, on dit que $\mathcal{L}'$ est de dimension finie $p - 1$; en particulier un point de $\mathcal{L}$ en est une variété linéaire de dimension 0.

2° **Intersection de variétés linéaires d'un même espace projectif.** — Nous conviendrons que la partie vide d'un espace projectif en est une variété linéaire. Cela va nous permettre de démontrer dans sa généralité le théorème suivant :

THÉORÈME. — **L'intersection de deux (resp. plusieurs) variétés linéaires d'un même espace projectif est une variété linéaire de cet espace projectif.**

Soient $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ deux variétés linéaires de l'espace projectif $\mathcal{L}$, issu de l'espace vectoriel $\vec{E}$.

Si $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'' = \emptyset$, la proposition résulte de la convention précédente.

Sinon, $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ sont issus de deux sous-espaces vectoriels, $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$, de $\vec{E}$, tels que $\vec{E}' \cap \vec{E}''$ est un sous-espace vectoriel qui n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$. $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$ étant la partie de $\mathcal{L}$ qui est issue de la partie $\vec{E}' \cap \vec{E}''$ de $\vec{E}$, il s'agit d'une variété linéaire projective de $\mathcal{L}$.

Le théorème se démontre de la même façon dans le cas d'un nombre fini, et même infini, de variétés linéaires de $\mathcal{L}$.

74. *Plus petite variété linéaire projective contenant une partie donnée d'un espace projectif.* — POSITION DU PROBLÈME. — *Étant donnée une partie $\mathcal{G}$ d'un espace projectif $\mathcal{E}$, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, existe-t-il des variétés linéaires projectives de $\mathcal{E}$ qui contiennent $\mathcal{G}$?*

I. *Analyse.* — Supposons qu'il existe une variété linéaire projective de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, issue du sous-espace vectoriel $\vec{E}'$ de $\vec{E}$, et qui contient $\mathcal{G}$.

a) $\vec{E}'$ contient le sous-espace vectoriel $\vec{\Sigma}$ de $\vec{E}$ qui est engendré par un système, arbitrairement choisi, de vecteurs $\vec{A}$ de $\vec{E}^{\bullet}$, représentants homogènes des points A de $\mathcal{G}$.

$\vec{E}'$ contient de même le sous-espace vectoriel $\vec{\Sigma}'$ de $\vec{E}$ qui est engendré par tout autre système de vecteurs $\vec{A}'$ de $\vec{E}^{\bullet}$, représentants homogènes des points A de $\mathcal{G}$.

Montrons que $\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}'$. En effet, $\vec{A}$ et $\vec{A}'$ étant deux représentants d'un même point de $\mathcal{E}$, on sait qu'il existe un scalaire non nul, λ, du corps de base K, tel que

$$\vec{A}' = \lambda\vec{A} \implies \vec{A}' \in \vec{\Sigma} \implies \vec{\Sigma}' \subseteq \vec{\Sigma}.$$

On démontre, par le même procédé, que $\vec{\Sigma} \subseteq \vec{\Sigma}'$.

Les sous-espaces $\vec{\Sigma}$ et $\vec{\Sigma}'$ de $\vec{E}$ sont donc confondus; nous les désignerons dorénavant par $\vec{E}_{\mathcal{G}}$, pour marquer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, attaché à la partie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$.

b) $\mathcal{E}'$ contient la variété linéaire projective $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{E}$ qui est issue de $\vec{E}_{\mathcal{G}}$; naturellement $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ contient $\mathcal{G}$.

II. *Synthèse.* — Du fait que $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ contient $\mathcal{G}$, il résulte que toute variété linéaire projective de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ contient également $\mathcal{G}$.

Résumons cette étude par l'énoncé suivant :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $\mathcal{G}$ une partie donnée d'un espace projectif $\mathcal{E}$ issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$. Soit $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ la variété linéaire de $\mathcal{E}$ qui est issue du sous-espace vectoriel $\vec{E}_{\mathcal{G}}$ de $\vec{E}$ engendré par un système de représentants homogènes $\vec{A}$ des points A de $\mathcal{G}$.**

a) **$\vec{E}_{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ sont indépendants du choix des représentants $\vec{A}$; $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ contient $\mathcal{G}$.**

b) **Toute variété linéaire de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$; on dit que $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ est la plus petite variété linéaire de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{G}$ et aussi que $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ est la variété linéaire projective de $\mathcal{E}$ qui est engendrée par $\mathcal{G}$.**

75. ***Rang d'un système de points.*** — Nous reprenons les notations du paragraphe précédent en supposant, cette fois, que $\mathcal{S}$ admet un nombre fini p de points, soit

$$\mathcal{S} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_p \}.$$

1° **Rang.** — Le sous-espace vectoriel $\vec{E}_{\mathcal{S}}$ de $\vec{E}$, qui est engendré par un système de p vecteurs, est de dimension finie r, avec $r \leqslant p$. Autrement dit la variété linéaire projective $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{L}$ est de dimension $r - 1$. Convenons de dire que r est le rang de $\mathcal{S}$, soit :

DÉFINITION. — **Si un système $\mathcal{S}$ de p points d'un espace projectif $\mathcal{L}$ engendre une variété linéaire projective de dimension $r - 1$, on dit que $\mathcal{S}$ est de rang r. On a $r \leqslant p$; si $r = p$ on dit que le système $\mathcal{S}$ est libre, ou que les points de $\mathcal{S}$ sont linéairement indépendants.**

En particulier, $\{ A, B \}$ est un système libre si, et seulement si, $A \neq B$.

REMARQUE. — Si $\mathcal{L}$ est un espace projectif de dimension finie n, la variété linéaire engendrée par tout système libre $\mathcal{S}$ de $n + 1$ points est $\mathcal{L}$ lui-même. En effet, dans ce cas, $\vec{E}_{\mathcal{S}}$ est, comme $\vec{E}$, de dimensions $n + 1$; il en résulte

$$\vec{E}_{\mathcal{S}} = \vec{E} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{S}} = \mathcal{L}.$$

2° **Représentation matricielle de la variété linéaire projective $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ engendrée par un système de points $\mathcal{S}$.** — Nous nous limitons ici au cas où $\mathcal{L}$ est de dimension finie n. Nous supposons que nous avons choisi une base $\mathcal{U}$ de l'espace vectoriel $\vec{E}$ (de dimension $n + 1$), et, d'autre part, des représentants homogènes $\vec{A}_j$ des points A_j dans $\vec{E}^\bullet$ ($j = 1, 2, \ldots, p$).

Désignons par

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n+1} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n+1,j} \end{bmatrix}$$

les matrices unicolonnes des coordonnées homogènes des points M et A_j de $\mathcal{L}$ par rapport à la base $\mathcal{U}$ (coordonnées dans la base $\mathcal{U}$ de représentants homogènes, $\vec{M}$ et $\vec{A}_j$, de M et A_j dans $\vec{E}^\bullet$).

Les matrices $\mathcal{A}_j$ sont fixées par le choix des vecteurs $\vec{A}_j$; la matrice $\mathcal{M}$ n'est définie qu'à une constante multiplicative près.

a) Cela posé :

$$\vec{M} \in \vec{E}^\bullet \iff \begin{cases} \exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p), \text{ scalaires non tous nuls} \\ \qquad \text{tels que } \vec{M} = \sum_1^p \vec{A}_j . \lambda_j \end{cases}$$

$$M \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}} \iff \begin{cases} \exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p), \text{ scalaires non tous nuls; } \exists\, \rho, \text{ scalaire non nul} \\ \qquad \text{tels que } \mathcal{M} = \rho \sum_1^p \lambda_j \mathcal{A}_j. \end{cases}$$

b) Le rang r de $\mathcal{S}$ est le rang du système $\{\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p\}$ de vecteurs de $\vec{E}$, ou encore le rang de la matrice $(n+1, p)$ dont les éléments sont les coordonnées des $\vec{A}_j$ dans la base $\mathfrak{U}$. Nous écrirons symboliquement cette matrice sous la forme

$$\varpi = [\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_j \ldots \mathcal{A}_p].$$

La dimension de $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ est $r - 1$.

76. ***Droites et plans d'un espace projectif.*** — 1° DÉFINITION. — **On appelle droite (resp. plan) d'un espace projectif $\mathcal{E}$ toute variété linéaire projective de** $\mathcal{E}$ (éventuellement confondue avec $\mathcal{E}$) **qui est de dimension 1** (resp. 2).

2° **Détermination d'une droite** (resp. **d'un plan**) **d'un espace projectif $\mathcal{E}$.** — D'après le n° précédent, la plus petite variété linéaire projective de $\mathcal{E}$ qui contient

deux points de $\mathcal{E}$ distincts est une droite projective	trois points de $\mathcal{E}$ linéairement indépendants est un plan projectif.

On en déduit :

THÉORÈME I. — **Par deux points distincts passe une, et une seule, droite projective.**

THÉORÈME II. — **Trois points deux à deux distincts sont linéairement indépendants si, et seulement si, ils ne sont pas situés sur une droite** (ou encore s'ils ne sont pas alignés).

THÉORÈME III. — **Par trois points deux à deux distincts, non alignés, passe un, et un seul, plan projectif.**

THÉORÈME IV. — **Si deux points distincts appartiennent à un plan projectif, la droite projective déterminée par les deux points appartient au plan.**

a) *Représentation de la droite projective $\mathcal{D}$ déterminée par les points distincts A et B.* — Choisissons arbitrairement des représentants homogènes $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de A et B.

Le point générique M de $\mathcal{D}$ admet pour représentant homogène

$$\vec{M} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B}. \tag{1}$$

Le couple (λ, μ) de scalaires du corps de base K (dont l'un au moins n'est pas nul) est un système de coordonnées homogènes du point M, par rapport à

la base $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ du sous-espace vectoriel $\vec{D}$ de E duquel $\mathcal{D}$ est issue. Autrement dit l'élément de $\tilde{K}$

$$\text{classe de } (\lambda, \mu)$$

est l'abscisse projective du point M de $\mathcal{D}$, par rapport à la base $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ de $\vec{D}$.

Retenons que l'ensemble $\mathcal{D} - \{A\}$ peut être engendré par le point M dont un représentant est $\vec{M} = \lambda\vec{A} + \vec{B}$, quand λ parcourt K.

e) Représentation du plan projectif $\mathcal{Q}$ déterminé par les trois points linéairement indépendants A, B, C. — Choissons arbitrairement des représentants homogènes $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ de A, B, C.

Le point générique M de $\mathcal{Q}$ admet pour représentant homogène

$$\vec{M} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + \nu\vec{C}. \tag{2}$$

Le triplet (λ, μ, ν) de scalaires de K (dont l'un au moins n'est pas nul) est un système de coordonnées homogènes du point M, par rapport à la base $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ du sous-espace vectoriel $\vec{Q}$ de $\vec{E}$ duquel $\mathcal{Q}$ est issu.

c) Interprétation analytique. — Nous nous limitons ici au cas où l'espace projectif $\mathcal{E}$ est de dimension finie n. Soit $\mathcal{U}$ une base de $\vec{E}$ (**75**, 2°).

Désignons par (a_i), (b_i), (c_i) des coordonnées homogènes de A, B, C, par rapport à la base $\mathcal{U}$, $(i = 1, \dots, n+1)$.

On peut adopter comme coordonnées homogènes du

point générique de $\mathcal{D}$: $X_i = \lambda a_i + \mu b_i$ classe $(\lambda, \mu) \in \tilde{K}$
point générique de $\mathcal{D} - \{A\}$: $X_i = \lambda a_i + b_i$ $\lambda \in K$.
point générique de $\mathcal{Q}$: $X_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i$.

Rappelons que l'indépendance linéaire des points A, B d'une part, des points A, B, C d'autre part se traduit respectivement par

$$\text{rg}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{bmatrix} = 2 \qquad \text{rg}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{bmatrix} = 3$$

77. *Hyperplans d'un espace projectif.* — Nous utiliserons ici l'étude des hyperplans d'un espace vectoriel, faite au n° **61**.

1° <u>Définition</u>. — **Soit $\mathcal{E}$ un espace projectif, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$. On appelle hyperplan de $\mathcal{E}$ toute variété linéaire projective de $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, qui est issue d'un hyperplan $\vec{H}$ de $\vec{E}$.**

Notons que si $\mathcal{E}$ est de dimension finie n, les hyperplans de $\mathcal{E}$ en sont les variétés linéaires de dimensions $n-1$ (droites si $n = 2$, plans si $n = 3$).

2° **Équation d'un hyperplan de $\mathcal{E}$.** — *a)* Un point M appartient à l'hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ si, et seulement si, un représentant homogène $\vec{M}$ appartient à l'hyperplan $\vec{H}$ de $\vec{E}$

$$(1) \qquad M \in \mathcal{H} \iff \vec{M} \in \vec{H}.$$

Or l'appartenance de $\vec{M}$ à $\vec{H}$ se traduit par l'annulation d'une forme linéaire h sur $\vec{E}$:

$$(2) \qquad \vec{M} \in \vec{H} \iff h(\vec{M}) = 0.$$

(1) et (2) entraînent

$$(3) \qquad M \in \mathcal{H} \iff h(\vec{M}) = 0.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **A tout hyperplan $\mathcal{H}$ de l'espace projectif $\mathcal{E}$ on peut associer une forme linéaire h, non nulle, sur l'espace vectoriel $\vec{E}$, telle que**

$$M \in \mathcal{H} \iff h(\vec{M}) = 0.$$

On dit que $h(\vec{M}) = 0$ est une équation de l'hyperplan $\mathcal{H}$; l'indifférence du choix du représentant homogène $\vec{M}$ provient de ce que $h(\lambda\vec{M}) = \lambda h(\vec{M})$.

b) THÉORÈME RÉCIPROQUE. — **A toute forme linéaire h, non nulle, sur l'espace vectoriel $\vec{E}$, on peut associer un, et un seul, hyperplan $\mathcal{H}$ de l'espace projectif associé $\mathcal{E}$ tel que $h(\vec{M}) = 0$ soit une équation de $\mathcal{H}$.**

En effet l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M de $\mathcal{E}$ dont un représentant homogène $\vec{M}$ vérifie $h(\vec{M}) = 0$ n'est autre que l'hyperplan projectif de $\mathcal{E}$ qui est issu de l'hyperplan $\vec{H}$ de $\vec{E}$ dont $h(\vec{M}) = 0$ est une équation.

c) Cas d'un espace projectif $\mathcal{E}$ de dimension finie n. — Un hyperplan $\mathcal{H}$ étant alors une variété linéaire de dimension $n - 1$, on peut le déterminer par la donnée de n de ses points $\{A_1, \ldots, A_n\}$, linéairement indépendants. Reprenons les notations du n° **75**, 2°, avec ici $p = n$.

Si nous désignons respectivement par ϖ et Π les matrices

$$\underset{(n+1)\times n}{\varpi} = [\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n] \qquad \text{et} \qquad \underset{(n+1)\times(n+1)}{\Pi} = [\mathcal{M}\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n],$$

nous savons que l'indépendance des points A_j équivaut à

$$\operatorname{rg} \varpi = n$$

et que, la condition précédente étant supposée remplie,

$$M \in \mathcal{H} \iff \operatorname{rg} \Pi \leqslant n \iff \det \Pi = 0.$$

C'est ainsi que, en modifiant légèrement les notations :

Dans un espace projectif de dimension 2, la droite définie par les points distincts A_1 et A_2 a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & X_1 & X_2 \\ Y & Y_1 & Y_2 \\ T & T_1 & T_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans un espace projectif de dimension 3, le plan défini par les points deux à deux distincts A_1, A_2 et A_3, non alignés, a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ T & T_1 & T_2 & T_3 \end{vmatrix} = 0.$$

78. ***Intersection d'un hyperplan et d'une droite*** (resp. ***d'un plan***).

Dans un espace projectif $\mathcal{E}$, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, considérons un hyperplan $\mathcal{H}$, issu d'un hyperplan $\vec{H}$ de $\vec{E}$. Soit $h(\vec{M}) = 0$ une équation de $\mathcal{H}$.

1° **Intersection de $\mathcal{H}$ et d'une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$.** — La droite $\mathcal{D}$ est déterminée à partir de deux points distincts A et B, comme l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ admettent un représentant homogène de la forme $\vec{M} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B}$.

Nous avons :

$$M \in \mathcal{H} \iff h(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda h(\vec{A}) + \mu h(\vec{B}) = 0 \quad (1)$$

Cette équation sur $\tilde{K}$, à l'inconnue classe (λ, μ), fournit l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{H}$. La discussion est la suivante :

1er Cas : *$\mathcal{H}$ contient* A *et* B, *ou* $h(\vec{A}) = 0$, $h(\vec{B}) = 0$. — L'équation (1) montre que $\mathcal{H}$ contient tout point de $\mathcal{D}$.

2e Cas : *L'un, au moins, des deux points* A *et* B *n'appartient pas à $\mathcal{H}$, ou $h(\vec{A})$ et $h(\vec{B})$ ne sont pas tous deux nuls.* — Sur $\tilde{K}$, l'équation (1) admet (69, 2°) la solution unique

$$\text{classe } \left(h(\vec{B}), -h(\vec{A})\right).$$

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ ont en commun un, et un seul, point, dont un représentant homogène est

$$h(\vec{B}).\vec{A} - h(\vec{A}).\vec{B}.$$

Nous pouvons énoncer :

Théorème. — **Dans un espace projectif, un hyperplan et une droite ont en général un, et un seul, point commun. Toutefois si l'hyperplan contient deux points distincts de la droite, il contient la droite tout entière.**

2° **Intersection de $\mathcal{H}$ et d'un plan $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{L}$.** — Le plan $\mathcal{Q}$ est déterminé à partir de trois points A, B, C linéairement indépendants (deux à deux distincts et non alignés), comme l'ensemble des points M de $\mathcal{L}$ admettant un représentant homogène de la forme $\vec{M} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + \nu\vec{C}$.

Nous avons

$$M \in \mathcal{H} \iff h(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + \nu\vec{C}) = 0 \text{ ou } \lambda h(\vec{A}) + \mu h(\vec{B}) + \nu h(\vec{C}) = 0 \quad (2)$$

La discussion est la suivante :

1er Cas : $\mathcal{H}$ *contient* A, B et C, *ou* $h(\vec{A}) = 0$, $h(\vec{B}) = 0$, et $h(\vec{C}) = 0$. L'équation (2) montre que $\mathcal{H}$ contient tout point de $\mathcal{Q}$.

2e Cas : *L'un au moins des points* A, B, C *n'appartient pas à* $\mathcal{H}$. Pour fixer les idées, supposons $h(\vec{C}) \neq 0$. L'équation (2) est alors de la forme

$$\nu = \alpha\lambda + \beta\mu$$

et $\mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$ est la partie de $\mathcal{L}$ formée par les points M dont un représentant homogène est

$$\vec{M} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + (\alpha\lambda + \beta\mu)\vec{C}. \quad (3)$$

Si nous posons

$$\vec{A} + \alpha\vec{C} = \vec{U} \quad \text{et} \quad \vec{B} + \beta\vec{C} = \vec{V},$$

la relation (3) s'écrit

$$\vec{M} = \lambda\vec{U} + \mu\vec{V},$$

ce qui prouve que l'intersection de l'hyperplan $\mathcal{H}$ et du plan $\mathcal{Q}$ est une droite.

Nous pouvons énoncer :

Théorème. — **Dans un espace projectif, l'intersection d'un hyperplan et d'un plan est en général une droite. Toutefois si l'hyperplan contient trois points linéairement indépendants du plan, il contient le plan tout entier.**

3° **Cas particuliers.** — Étant donné que dans un espace projectif de dimension 2 (resp. 3) un hyperplan est une variété linéaire de dimension 1 (resp. 2), c'est-à-dire. une droite (resp. un plan), nous pouvons énoncer :

Théorème I. — **Deux droites distinctes d'un espace projectif de dimension deux ont en commun un, et un seul, point.**

Théorème II. **Dans un espace projectif de dimension trois :**

α) **un plan et une droite qui ne fait pas partie du plan ont en commun un, et un seul, point;**

β) **l'intersection de deux plans distincts est une droite.**

IV. REPÈRES

79. ***Repères d'un espace projectif.*** — Jusqu'ici, à propos de coordonnées et de dépendance, nous n'avons pas su dissocier l'espace projectif $\mathfrak{L}$ de l'espace vectoriel $\vec{E}$ dont il est issu.

Nous allons nous affranchir de cette servitude, au moins dans le cas où $\mathfrak{L}$ est de dimension finie, grâce à l'introduction de repères dans $\mathfrak{L}$, à partir du théorème suivant :

1° <u>THÉORÈME.</u> — **Soit $\mathfrak{L}$ un espace projectif de dimension n issu de l'espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension $n+1$. Soit $\mathcal{R} = \{ A_1, \ldots, A_{n+1}, \omega \}$ un système rangé de $n+2$ points de $\mathfrak{L}$, tel que $n+1$ quelconques de ces points soient linéairement indépendants.**

Il existe une base $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n+1} \}$ de $\vec{E}$, et à une homothétie près une seule, qui vérifie les deux conditions :

$a)$ **$\vec{u}_i$ est un représentant homogène de A_i dans $\vec{E}$, $(i = 1, \ldots, n+1)$,**

$b)$ **$\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_{n+1}$ est un représentant homogène de ω.**

Existence. — Soint $\vec{A}_i (i = 1, \ldots, n+1)$, et $\vec{\omega}$ des représentants homogènes dans $\vec{E}^\bullet$, arbitrairement choisis, des points A_i et ω.

Les A_i étant des points linéairement indépendants, $\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{n+1} \}$ est un système libre et, par suite, une base de $\vec{E}$, dont la dimension est $n+1$.

Soient λ_i les coordonnées de $\vec{\omega}$ dans cette base :

$$\vec{\omega} = \sum_1^{n+1} \lambda_i \vec{A}_i.$$

Si l'un des scalaires λ_i était nul, il existerait, parmi les $n+2$ vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{n+1}, \vec{\omega}$, $n+1$ vecteurs liés, autrement dit il existerait, parmi les points de $\mathcal{R}$, $n+1$ points liés, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le vecteur $\vec{u}_i = \lambda_i \vec{A}_i$ est donc non nul et $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_i, \ldots, \vec{u}_{n+1} \}$ est une base de $\vec{E}$ qui vérifie les deux conditions a) et b).

Unicité. — Soit $\mathcal{U}' = \{ \vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_{n+1} \}$ l'une, quelconque, des bases de $\vec{E}$ qui vérifient a) et b).

Dans la base $\mathcal{U}$, qui constitue la solution particulière obtenue dans la première partie du raisonnement, les vecteurs de $\mathcal{U}'$ s'écrivent d'après (a)

$$(1) \qquad \vec{u}'_i = \alpha_i \vec{u}_i, \quad (i = 1, \ldots, n+1).$$

D'autre part, puisque, d'après *b*), $\Sigma \vec{u_i}$ et $\Sigma \vec{u'_i}$ sont deux représentants du même point ω de $\mathcal{E}$, il existe un scalaire non nul α tel que

$$(2) \qquad \sum_i \vec{u'_i} - \alpha \sum_i \vec{u_i} = \vec{0}.$$

Compte tenu de (1), (2) s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i - \alpha) \vec{u_i} = \vec{0},$$

ce qui, d'après l'indépendance linéaire des $\vec{u_i}$, exige

$$\alpha_i = \alpha \quad \text{ou} \quad \vec{u_i} = \alpha \vec{u_i}, \quad (i = 1, \ldots, n + 1).$$

Autrement dit, seules des bases obtenues « par homothétie » à partir de $\mathcal{U}$ peuvent répondre à la question. Inversement, on vérifie que chacune de ces bases satisfait aux conditions *a*) et *b*).

2° Étant donné que l'ensemble des coordonnées homogènes d'un point de $\mathcal{E}$ ne varie pas quand on remplace $\mathcal{U}$ par une base « homothétique » de $\vec{E}$, on peut énoncer :

DÉFINITION. — **On appelle repère d'un espace projectif $\mathcal{E}$, de dimension n, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, tout système rangé $\mathcal{R} = \{ A_1, \ldots, A_{n+1}, \omega \}$ de $n + 2$ points de $\mathcal{E}$, tel que $n + 1$ quelconques de ces points soient linéairement indépendants.**

On appelle *coordonnées homogènes du point générique* M *de* $\mathcal{E}$, *dans le repère* $\mathcal{R}$, les coordonnées homogènes de M par rapport à l'une des bases $\mathcal{U} \{ \vec{u_1}, \ldots, \vec{u}_{n+1} \}$ de $\vec{E}$ qui vérifient les deux conditions :

(*a*) $\vec{u_i}$ est un représentant de A_i; (*b*) $\Sigma \vec{u_i}$ est un représentant de ω.

Le point ω est dit *point unitaire* de $\mathcal{R}$.

Cette dernière appellation provient de ce que l'un des systèmes de coordonnées homogènes de ω dans $\mathcal{R}$ est formé exclusivement de 1. Notons que l'un des systèmes de coordonnées homogènes de A_i est formé exclusivement de 0, à l'exclusion du i-ième élément qui est 1.

REMARQUE. — Alors que le système $\mathcal{G} = \{ A_1, \ldots, A_{n+1} \}$ suffit à engendrer $\mathcal{E}$, au sens du n° 75, 1° il ne suffit pas à repérer le point générique de $\mathcal{E}$. Cela s'explique par le fait que, $\vec{A_i}$ étant un représentant de A_i, les bases de $\vec{E}$ formées de représentants de points de $\mathcal{G}$ sont de la forme $\{ \lambda_1 \vec{A_1}, \ldots, \lambda_{n+1} \vec{A}_{n+1} \}$, $\lambda_i \in K^\bullet$. Fixer l'une de ces bases, à une homothétie près, équivaut à choisir les $n + 1$ scalaires homogènes λ_i, ce qui équivaut au choix du point unitaire ω.

On peut dire aussi que, si dans une base arbitrairement choisie, nous avons (75, 2°)

$$\mathcal{M} = \lambda \sum_1^{n+1} x_i \mathcal{A}_i,$$

chacune des matrices $\mathcal{A}_i$ intervient à la multiplication près par un scalaire non nul, μ_i. Le choix de matrices privilégiées $\mathcal{A}_i$, équivaut au choix des $n + 1$ scalaires homogènes μ_i, ou encore au choix de ω.

3° Changement de repère. — Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux repères projectifs de l'espace projectif $\mathcal{E}$, de dimension n; nous savons leur associer deux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ de l'espace vectoriel $\vec{E}$, de dimension $n+1$, dont est issu $\mathcal{E}$. Les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont déterminées à une homothétie près, ce qui n'altère pas l'ensemble des systèmes de cordonnées homogènes d'un point de $\mathcal{E}$.

Les formules de changement de coordonnées (n° 67, 2°)

$$\mathcal{M} = \rho P \mathcal{M}' \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{c|c} & \vec{u}'_j \\ \hline \vec{u}_i & [p_{ij}] \end{array} = P \qquad (i, j = 1, \dots, n+1)$$

sont valables aussi bien dans le passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ que dans le passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$. On notera que les éléments de la j-ième colonne de P forment un système (particulier) de coordonnées homogènes dans $\mathcal{R}$ du point A'_j de $\mathcal{R}'$ et que, pour i donné,

$$X_i = 0 \qquad \text{et} \qquad p_{i1}X'_1 + \dots + p_{i,n+1}X'_{n+1} = 0$$

sont les équations, dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$, de l'hyperplan de $\mathcal{E}$ qui est déterminé par les points

$$\{ A_1, \dots, A_{i-1}, \quad A_{i+1}, \dots, A_{n+1} \}$$

80. ***Interprétation géométrique des coordonnées homogènes.*** — Pour simplifier les notations, plaçons-nous dans le cas $n = 3$. Nous obtiendrons un repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$ en choisissant arbitrairement quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 linéairement indépendants et en adjoignant au *tétraèdre de référence* $\mathcal{T}$ ainsi obtenu un point unitaire, ω, soumis à la seule condition de ne pas appartenir à une face de $\mathcal{T}$.

Dans $\mathcal{R}$, on peut associer aux points A_i et à ω les matrices *privilégiées*

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donnons-nous un point M, dont un système de coordonnées homogènes dans le repère $\mathcal{R}$ est (X, Y, Z, T). Nous allons interpréter le couple (X, Y).

Exceptons le cas où M appartient à la droite A_3A_4 (alors $X = 0$ et $Y = 0$). Les points A_3, A_4, M définissent un plan dont une équation est (77, 2°), en désignant par (ξ, η, ζ, τ) des coordonnées homogènes du point générique

$$\begin{vmatrix} \xi & X & 0 & 0 \\ \eta & Y & 0 & 0 \\ \zeta & Z & 1 & 0 \\ \tau & T & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad Y\xi - X\eta = 0 \tag{1}$$

Ce plan coupe la droite A_1A_2 (qui n'en fait pas partie à cause de l'indépendance des sommets de $\mathcal{T}$) en un, et un seul, point, M'. On constate, sans difficulté que l'un des systèmes de coordonnées homogènes de M' est

$$\xi = X, \qquad \eta = Y, \qquad \zeta = 0, \qquad \tau = 0.$$

En remplaçant M par ω, on constate que le plan $A_3A_4\omega$ coupe la droite A_1A_2 au point ω' dont un système de coordonnées homogènes est (1, 1, 0, 0).

Ainsi (X, Y) est un couple de coordonnées homogènes du point M' de la droite projective A_1A_2 rapportée au repère (71, 3°).

$$M_\infty = A_1, \qquad M_0 = A_2, \qquad M_1 = \omega'.$$

Il en résulte que (X, Y) *est un représentant dans* $\tilde{K}$ *du birapport* (A_1, A_2, ω', M'), ω' et M' *désignant respectivement les points d'intersection de la droite* A_1A_2 *avec les plans*

$$A_3A_4\omega \qquad \text{et} \qquad A_3A_4M.$$

EXERCICES

N. B. *Il sera souvent commode d'utiliser un repère projectif, convenablement choisi.*

1. — On donne dans un plan projectif un triangle ABC et une droite Δ coupant ses côtés en trois points P, Q, R distincts de A, B, C. Les droites AP, BQ, CR déterminent un nouveau triangle A'B'C'. Démontrer que les droites AA', BB', CC' sont concourantes.

2. — On donne dans un plan projectif un triangle ABC et deux sécantes Δ, Δ' coupant ses côtés en P, Q, R et P', Q', R'. On désigne par I, J, K les points communs aux couples QR' et RQ', RP' et PR', PQ' et QP'. Démontrer que les points I, J, K sont alignés.

3. — On donne, dans un plan projectif, sept points A, B, C, A', B', C', I, tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

Soient P, Q, R les points d'intersection des couples de droites IA' et BC, IB' et CA, IC' et AB. Soient P', Q', R' les points d'intersection des couples de droites IA et B'C', IB et C'A', IC et A'B'.

Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

« P, Q, R sont alignés »; « P', Q', R' sont alignés ».

4. — Dans un plan projectif, on donne un point O, deux droites D et D' passant par O, deux droites U et V ne passant pas par O, et enfin un point I qui n'est situé sur aucune de ces quatre droites.

Par O on mène une droite variable Δ rencontrant U en P et V en Q. IP rencontre D et D' en A et A'; IQ rencontre D et D' en B, et B'.

a) Démontrer que, lorsque Δ varie, AB' et BA' passent, chacune, par un point fixe, J pour AB', K pour BA'.

b) Démontrer que les points I, J, K sont sur un même droite W qui passe par le point commun à U et V.

5. — Dans un plan projectif, on donne cinq droites *a*, *b*, *c*, *d*, *d'* telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas concourantes. D'une manière générale, on représente par (p, q) le point d'intersection des droites notées *p* et *q* et par $[m, n]$ la droite qui joint les points notés *m* et *n*. On pose :

$$\alpha = [(d, b), (d', c)] \quad \beta = [(d, c), (d', a)] \quad \gamma = [(d, a), (d', b)]$$
$$\alpha' = [(d', b), (d, c)] \quad \beta' = [(d', c), (d, a)] \quad \gamma' = [(d', a), (d, b)]$$

Démontrer les propriétés suivantes :

I. — Les points (α, a), (β, b), (γ, c) sont sur une même droite δ.

II. — Les points (α', a), (β', b), (γ', c) sont sur une même droite δ'.

III. — Les points (α, α'), (β, β'), (γ, γ') sont sur une même droite δ''.

IV. — Les droites δ, δ', δ'' sont concourantes.

6. — *Triangles et tétraèdres homologiques.* — Soient A, B, C, A', B', C' six points d'un même plan projectif tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

I. — Les droites AA', BB', CC' sont concourantes;

II. — Les points communs aux droites BC et B'C', CA, et C'A', AB et A'B', sont alignés.

Étendre cette propriété à huit points d'un espace projectif de dimension 3, A, B, C, D, A', B', C', D' tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas dans un même plan.

7. — Dans un plan projectif, on donne un triangle ABC. Sur les côtés BC, CA, AB, on marque respectivement les points α et α', β et β', γ et γ' tels que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ soient concourantes, et que les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, soient concourantes. Les droites $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ coupent respectivement les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ en A', B', C'; montrer que les droites $\alpha'A'$, $\beta'B'$, $\gamma'C'$ sont concourantes.

8. — Dans un espace projectif de dimension 3, on considère un tétraèdre ABCD. Une droite Δ coupe les plans BCD, CDA, DAB, ABC respectivement aux points A', B', C', D'. Montrer que, en désignant par $A\Delta$ le plan déterminé par le point A et la droite Δ,

$$(A', B', C', D') = -1 \iff (A\Delta, B\Delta, C\Delta, D\Delta) = -1$$

9. — Dans un espace projectif de dimension 3, on donne un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et deux plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$. On désigne par B_{ij} et B'_{ij} les points d'intersection de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ avec la droite A_iA_j, $(1 \leqslant i < j \leqslant 3)$; par C_{ij} le conjugué harmonique de B_{ij} par rapport à A_i et A_j; par M_{ij} le conjugué harmonique de B'_{ij} par rapport à B_{ij} et C_{ij}.

Démontrer que les six points M_{ij} sont les sommets d'un quadrilatère complet.

10. — Dans un espace projectif complexe de dimension 3, on dit que les deux tétraèdres $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, de sommets A, B, C, D et A', B', C', D' sont associés si :

les points A, B, C, D appartiennent respectivement aux plans B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C' et les points A', B', C', D' appartiennent respectivement aux plans BCD, CDA, DAB, ABC.

a) Montrer qu'il existe des couples de tétraèdres associés; à cet effet, on prend les points A, B, C, D comme sommets d'un repère; quelles conditions doivent vérifier les coordonnées de quatre points A', B', C', D' pour que ces points soient situés respectivement dans les plans BCD, CDA, DAB, ABC? Ces conditions étant remplies, montrer que les relations exprimant que les quatre points A', B', C', D' ne sont pas coplanaires et que les points A, B, C, D soient situés respectivement dans les plans B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C' sont compatibles et admettent une infinité de solutions.

b) Montrer qu'en adjoignant des points unitaires ω et ω' convenablement choisis aux tétraèdres associés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, on peut obtenir deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ tels que des coordonnées homogènes du point générique de l'espace dans les deux repères soient liées par

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & m & -l \\ n & 0 & -l & -m \\ -m & l & 0 & -n \\ l & m & n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ T' \end{bmatrix} \qquad \text{avec } l^2 + m^2 + n^2 = -1$$

Quelles sont, dans ces conditions, les coordonnées de A', B', C', D' dans $\mathcal{R}$ et de A, B, C, D dans $\mathcal{R}'$?

c) Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ un couple de tétraèdres associés. On désigne par a, b, c, d les droites d'intersection des faces de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement opposées à A et A', B et B', C et C', D et D', (c'est ainsi que la droite a admet les équations $X = 0$ et $X' = 0$, etc...).

Montrer qu'il existe deux droites, e et f, qui s'appuient à la fois sur a, b, c, d; montrer que les deux plans déterminés par a (resp. b...) et chacune des droites e et f sont conjugués harmoniques par rapport aux plans BCD et B'C'D', (resp. CDA et C'D'A', ...).

d) Démontrer qu'il existe deux points de la droite AA' appartenant respectivement à e et f et que ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport à A et A'. En déduire que e et f s'appuient sur les quatre droites AA', BB', CC', DD'.

CHAPITRE VII

APPLICATIONS HOMOGRAPHIQUES D'UN ESPACE PROJECTIF SUR UN AUTRE

I. GROUPE PROJECTIF

81. ***Notion d'application homographique.*** — Soient $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{Q}$ deux espaces projectifs, respectivement issus des espaces vectoriels $\vec{E}$ et $\vec{F}$, sur le même corps commutatif K.

1° <u>Théorème et définition.</u> — **A toute application linéaire bijective, f, de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$, on peut associer, par une méthode dite « passage aux quotients », une application bijective, h, de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{Q}$ qui est dite application homographique.**

a) Voici ce que nous entendons par « passage aux quotients » :

Soit M le point générique de $\mathfrak{L}$ et $\vec{M}$ l'un, quelconque, des représentants de M dans $\vec{E}^\bullet$. Au vecteur non nul $\vec{M}$ de $\vec{E}$, f, qui est injective, associe un vecteur de $\vec{F}^\bullet$, $\vec{M}' = f(\vec{M})$. Désignons par M′ le point de $\mathfrak{Q}$ dont un représentant dans $\vec{F}^\bullet$ est $\vec{M}'$.

L'application h est définie par $M' = h(M)$, ce qui se justifie par le fait que, si on remplace $\vec{M}$ par un autre représentant de M, $\vec{N} = \lambda\vec{M} (\lambda \in K^\bullet)$, $\vec{M}'$ est remplacé par

$$\vec{N}' = f(\lambda\vec{M}) \quad \text{ou} \quad \lambda f(\vec{M}) \quad \text{ou} \quad \lambda\vec{M}'$$

et M′ n'est pas changé.

b) Montrons que l'application h que nous venons de définir est bijective. Soit, maintenant, M′ le point générique de $\mathfrak{Q}$ et $\vec{M}'$ l'un, quelconque, des représentants de M′ dans $\vec{F}^\bullet$. Il existe un point M de $\mathfrak{L}$, et un seul, tel que $M' = h(M)$; c'est le point dont les représentants dans $\vec{E}^\bullet$ sont : $\mu f^{-1}(\vec{M}')$, $(\mu \in K^\bullet)$. La biunivocité de h est ainsi établie.

c) La bijection h de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{Q}$ admet une application réciproque h^{-1}, qui, d'après *b*), n'est autre que l'application homographique de $\mathfrak{Q}$ sur $\mathfrak{L}$ obtenue,

par passage aux quotients, à partir de l'application linéaire bijective f^{-1} de $\vec{F}$ sur $\vec{E}$.

REMARQUE I. — L'application homographique h ne change pas si on remplace l'application linéaire f par l'application $kf (k \in K^\bullet)$.

REMARQUE II. — Si $\vec{E}$ est de dimension finie $n + 1$, la biunivocité de f exige que $\vec{F}$ admette la même dimension; $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{Q}$ ont alors la dimension commune n.

2°. **Restriction d'une application homographique.** — Soit $\mathfrak{L}'$ une variété linéaire de $\mathfrak{L}$, issue d'un sous-espace vectoriel $\vec{E}'$ de $\vec{E}$.

L'image par h de $\mathfrak{L}'$ est la partie, $\mathfrak{Q}' = h(\mathfrak{L}')$, de $\mathfrak{Q}$ qui est issue de l'image par f de $\vec{E}'$; cette dernière étant un sous-espace vectoriel, $\vec{F}' = f(\vec{E}')$, de $\vec{F}$, $\mathfrak{Q}'$ est donc une variété linéaire projective de $\mathfrak{Q}$.

D'autre part, la restriction $\hat{f}$ de f à $\vec{E}'$ est une application linéaire bijective de $\vec{E}'$ sur $\vec{F}'$ et on constate que la restriction $\hat{h}$ de h à $\mathfrak{L}'$ n'est autre que l'application homographique de $\mathfrak{L}'$ sur $\mathfrak{Q}'$ qui est associée à $\hat{f}$ par passage aux quotients.

Retenons que, en particulier, h transforme une droite projective $\mathfrak{L}'$ de $\mathfrak{L}$ en une droite projective $\mathfrak{Q}'$ de $\mathfrak{Q}$ et que la restriction de h à $\mathfrak{L}'$ est une application homographique de $\mathfrak{L}'$ sur $\mathfrak{Q}'$.

82. ***Le groupe projectif.*** — 1° **Composition des applications projectives.** — Soient $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ trois espaces projectifs, respectivement issus de $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$, espaces vectoriels sur le même corps K. Soient h et h' deux applications homographiques de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{Q}$ et de $\mathfrak{Q}$ sur $\mathfrak{R}$, obtenues par passages aux quotients à partir des deux applications linéaires bijectives, f et f', de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$ et de $\vec{F}$ sur $\vec{G}$.

Nous savons que $f_1 = f' \circ f$ est une application linéaire bijective de $\vec{E}$ sur $\vec{G}$.

Soit M le point générique de $\mathfrak{L}$ et $\vec{M}$ un représentant, quelconque, de M dans $\vec{E}^\bullet$.

$h(M)$ est le point M' de $\mathfrak{Q}$ dont un représentant dans $\vec{F}^\bullet$ est $\vec{M}' = f(\vec{M})$.

$h'[h(M)]$ est le point M'' de $\mathfrak{R}$ dont un représentant dans $\vec{G}^\bullet$ est

$$\vec{M}'' = f'[f(\vec{M})],$$

ce qui s'écrit

$$\vec{M}'' = f_1(\vec{M}).$$

Il en résulte que $h' \circ h$ est l'application homographique de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{R}$, obtenue, par passage aux quotients, à partir de $f' \circ f$.

2° Le groupe projectif. — Nous plaçant dans le cas d'espaces confondus, nous allons démontrer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **La composition des applications munit l'ensemble $\mathcal{K}$ des applications homographiques d'un espace projectif $\mathcal{L}$ sur lui-même d'une structure de groupe; on dit que $\mathcal{K}$ est le groupe projectif de $\mathcal{L}$.**

Soient h et h' deux éléments quelconques de $\mathcal{K}$, obtenus à partir des automorphismes f et f' de $\vec{E}$; $h' \circ h$ est l'élément de $\mathcal{K}$ obtenu à partir de l'automorphisme $f' \circ f$ de $\vec{E}$.

La démonstration s'achève comme celle du n° 57, 5°.

83. ***Détermination pratique d'une application homographique.*** Nous supposons ici que les espaces vectoriels $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont de même dimension $n + 1$; les espaces projectifs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{Q}$, respectivement issus de $\vec{E}$ et $\vec{F}$, sont alors de dimension n.

Soit $\mathcal{U} = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n+1} \}$ une base de $\vec{E}$; $\mathcal{V} = \{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n+1} \}$ une base de $\vec{F}$; représentons le point générique M de $\mathcal{L}$ (resp. M' de $\mathcal{Q}$) par la matrice unicolonne $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$) dont les $n + 1$ éléments forment un système de coordonnées homogènes de M (resp. M') par rapport à la base $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$).

Cela signifie que

$$\vec{M} = \sum_j \vec{u}_j X_j \qquad \text{et} \qquad \vec{M'} = \sum_i \vec{v}_i X'_i$$

sont respectivement un représentant de M dans $\vec{E}^\bullet$ et un représentant de M' dans $F^\bullet$.

1° Représentation matricielle d'une application homographique.

Soit h l'application homographique de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{Q}$, obtenue à partir de l'application linéaire bijective f de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$.

Dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, f est déterminée par la matrice carrée régulière, d'ordre $n + 1$

$$(1) \qquad \vec{v}_i \underset{}{\overset{f(\vec{u}_j)}{\left| \, [\alpha_{ij}] \right.}} = \mathcal{H} \iff \begin{cases} f(\vec{u}_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \vec{v}_i \alpha_{ij} \\ j = 1, 2, \ldots, n + 1. \end{cases}$$

M' $= h(\mathrm{M})$ si, et seulement si, il existe un scalaire ρ, non nul, de K tel que

$$\vec{M'} = \rho f(\vec{M}) \qquad \text{ou} \qquad \sum_i \vec{v}_i X'_i = \rho \sum_j f(\vec{u}_j) X_j.$$

En portant dans cette dernière relation l'expression (1) de $f(\vec{u}_j)$ on obtient

$$(2) \qquad X'_i = \rho \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{ij} X_j, \ (i = 1, 2, \ldots, n + 1), \iff \mathcal{M}' = \rho \mathcal{H} \mathcal{M}.$$

Remarque I. — La formule (2) fournit le même point $M' = h(M)$ quand on y remplace $\mathcal{H}$ par $k\mathcal{H}$, $(k \in K^{\bullet})$. Cela se produit quand on remplace f par kf et aussi quand on remplace l'une des bases $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{V}$ par une base homothétique, toutes modifications qui, ainsi que nous le savons déjà, n'altèrent pas h.

Remarque II. — Dans la pratique nous remplacerons systématiquement (2) par

$$(3) \qquad M' = h(M) \iff \mathcal{M}' = \mathcal{H}\mathcal{M};$$

mais il ne faudra pas perdre de vue que, si $\mathcal{M}$ reste la matrice la plus générale associée à M, $\mathcal{M}'$ est alors une matrice particulière associée à M', qui est déterminée sans ambiguïté quand $\mathcal{M}$ a été choisie.

Remarque III. — Si $\mathcal{E} = \mathcal{Q}$, on adopte, en général, $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ (mais rien n'empêche de choisir $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$).

2° Interprétation homographique d'une relation matricielle. — Considérons, cette fois, l'application h de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{Q}$ qui est définie par la formule (2), dans laquelle $\mathcal{H}$ désigne une matrice carrée régulière, d'ordre $n + 1$.

Avec cette même matrice $\mathcal{H}$, la formule (1) définit une application linéaire bijective, f, de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$ et h n'est autre que l'application homographique de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{Q}$ obtenue par passage aux quotients à partir de f.

84. *Nombre des couples de points homologues qui déterminent une application homographique.* — Reprenons les espaces projectifs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Q}$, distincts ou confondus, de dimension n, respectivement issus des espaces vectoriels $\vec{E}$ et $\vec{F}$, distincts ou confondus, de dimension $n + 1$.

Théorème. — **Étant donné un ensemble rangé de $n + 2$ points A_k de $\mathcal{E}$,**

$$(k = 1, \ldots, n + 2),$$

tels que $n + 1$ quelconques d'entre eux soient linéairement indépendants, et un ensemble rangé de $n + 2$ points A'_k de $\mathcal{Q}$ soumis à la même restriction, il existe une, et une seule application homographique, h, de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{Q}$ telle que $A'_k = h(A_k)$.

En convenant que A_{n+2} est le point unitaire, les points A_k déterminent un repère, $\mathcal{R}$, de $\mathcal{E}$; dans ce repère, on peut représenter les points A_k par les matrices privilégiées, $(n + 1, 1)$,

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{n+2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En convenant que A'_{n+2} est le point unitaire, les points A'_k déterminent un repère, $\mathcal{R}'$, de $\mathcal{Q}$; dans ce repère, on peut représenter les points A'_k par les matrices privilégiées $\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}_k$.

Analyse. — Supposons qu'il existe une application homographique h qui réponde à la question. Soit $\mathcal{H} = [\alpha_{ij}]$ la matrice carrée d'ordre $n + 1$ (définie à un scalaire multiplicatif près) qui représente h dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

$$A'_j = h(A_j), \ (j = 1, \ldots, n+1) \iff \exists\, \rho_j \in K^\bullet \quad \text{tel que} \quad \mathcal{A}'_j = \rho_j \mathcal{H} \mathcal{A}_j.$$

Or $\mathcal{A}'_j = \mathcal{A}_j$ et $\mathcal{H}\mathcal{A}_j$ est la matrice unicolonne $[\alpha_{ij}]$ (j étant fixé) : la relation précédente se traduit par

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \rho_j \alpha_{jj} = 1;$$

par suite $\alpha_{jj} \neq 0$ et $\mathcal{H}$ est une matrice diagonale à éléments diagonaux non nuls. Cela posé

$$A'_{n+2} = h(A_{n+2}) \iff \exists\, \rho \in K^\bullet \quad \text{tel que} \quad \mathcal{A}'_{n+2} = \rho\, \mathcal{H} \mathcal{A}_{n+2}.$$

Or $\mathcal{A}'_{n+2} = \mathcal{A}_{n+2}$ et $\mathcal{H}\mathcal{A}_{n+2}$ est la matrice unicolonne $[\alpha_{jj}]$; la relation précédente se traduit par

$$1 = \rho \alpha_{jj},$$

elle exige l'égalité des éléments diagonaux α_{jj}.

Ainsi, si le problème admet une solution h, l'une des matrices représentatives de h dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est, nécessairement la matrice unité d'ordre $n + 1$, I_{n+1}.

Synthèse. — La matrice I_{n+1}, qui est régulière, représente, dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, une et une seule, application homographique de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{Q}$; celle-ci transforme A_k en A'_k ($k = 1, \ldots, n + 2$) et elle répond à la question.

85. ***Conservation du birapport par application homographique.*** — 1° Dans un espace projectif de dimension 1, des points sont linéairement indépendants si, et seulement si, ils sont deux à deux distincts. Pour $n = 1$, le théorème du n° 84 s'énonce :

<u>Théorème.</u> — **Étant donnés trois points deux à deux distincts, A_1, A_2, A_3, d'une droite projective $\mathcal{L}$ et trois points deux à deux distincts, A'_1, A'_2, A'_3, d'une droite projective $\mathcal{Q}$ — qui peut être confondue avec $\mathcal{L}$ — il existe une, et une seule, application homographique, h, de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{Q}$ telle que**

$$(1) \qquad h(A_1) = A'_1 \qquad h(A_2) = A'_2, \qquad h(A_3) = A'_3.$$

Dans les repères (71, 4°),

$$\mathcal{R} = \{ M_\infty, M_0, M_1 \} \quad \text{avec} \quad M_\infty = A_1, M_0 = A_2, M_1 = A_3$$
et
$$\mathcal{R}' = \{ M'_\infty, M'_0, M'_1 \} \quad \text{avec} \quad M'_\infty = A'_1, M'_0 = A'_2, M'_1 = A'_3,$$

cette application h se traduit au moyen de la matrice unité d'ordre 2. M et $M' = h(M)$ ont les mêmes coordonnées homogènes et par suite les mêmes abscisses projectives, ce qui s'écrit :

$$(2) \qquad (A_1, A_2, A_3, M) = (A'_1, A'_2, A'_3, M').$$

Inversement si $M \in \mathcal{L}$ et $M' \in \mathcal{Q}$ sont liés par (2), on peut affirmer que M′ coïncide avec $h(M)$ — ces points ont, en effet, les mêmes coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$ —.

Nous dirons que l'homographie h est déterminée par la relation (2).

2° THÉORÈME. — **Toute application homographique, h, d'un espace projectif $\mathcal{L}$, de dimension finie ou infinie, sur un espace projectif $\mathcal{Q}$ transforme tout système**

$$\{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$$

de points deux à deux distincts, alignés, de $\mathcal{L}$ en un système $\{ A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 \}$ de points deux à deux distincts, alignés, de $\mathcal{Q}$, tel que

$$(3) \qquad (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4).$$

Nous savons (81, 2°) que toute application homographique conserve l'alignement; il suffit donc d'établir la proposition dans le cas où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux droites projectives.

Les A_k étant distincts par hypothèse ($k = 1, 2, 3, 4$), il en est de même pour les A'_k; en effet h est injective.

En nous reportant aux notations du 1°, h est déterminé par (1) et aussi par (2). En écrivant que, en outre, $h(A_4) = A'_4$, nous obtenons (3).

THÉORÈME RÉCIPROQUE. — **Toute application injective, f, de la droite projective $\mathcal{L}$ dans la droite projective $\mathcal{Q}$ qui « conserve le birapport » est homographique.**

Soient A_1, A_2, A_3 trois points de $\mathcal{L}$, deux à deux distincts, arbitrairement choisis; f, qui est injective, les transforme en trois points deux à deux distincts A'_1, A'_2, A'_3 de $\mathcal{Q}$.

En désignant par M le point générique de $\mathcal{L}$ et par M′ le point $f(M)$ de $\mathcal{Q}$, nous avons, d'après la conservation du birapport

$$(2) \qquad (A_1, A_2, A_3, M) = (A'_1, A'_2, A'_3, M')$$

ce qui montre que f n'est autre que l'application homographique de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{Q}$ qui transforme respectivement A_1, A_2, A_3 en A'_1, A'_2, A'_3.

On dit que (2) est l'*équation* de l'application homographique h.

II. APPLICATIONS HOMOGRAPHIQUES D'UNE DROITE PROJECTIVE SUR ELLE-MÊME

86. ***Points invariants.*** — 1° **Notations.** — Soit h une application homographique de la droite projective $\mathcal{L}$ sur elle-même.

Par rapport à un repère $\mathcal{R}$, arbitrairement choisi, de $\mathcal{L}$, h se traduit par une matrice (2,2) régulière, $\mathcal{H}$, et par les matrices $k\mathcal{H}(k \in K^{\bullet})$. Plus précisément, si (X, T) est l'un *quelconque* des systèmes de coordonnées homogènes de M on peut prendre pour système *particulier* de coordonnées homogènes du point $M' = h(M)$ les nombres X' et T' donnés par

$$\begin{bmatrix} X' \\ T' \end{bmatrix} = \mathcal{H} \begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix}; \qquad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad ad - bc \neq 0$$

2° **Définition et recherche des points invariants.**

DÉFINITION. — **Un point M de $\mathcal{L}$ est dit point invariant de h si $h(M) = M$.**

Le point de coordonnées homogènes (X, T) est invariant si, et seulement si, il existe un scalaire non nul de K, λ, tel que

$$\mathcal{H} \begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs la matrice régulière $\mathcal{H}$ n'admet pas la valeur propre 0. Il en résulte que la recherche des points invariants de h équivaut à la recherche des directions propres de la matrice $\mathcal{H}$.

Les valeurs propres (1) de $\mathcal{H}$ sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \Delta(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

1er CAS : $\Delta(\lambda)$ *admet deux zéros distincts.* $\mathcal{H}$ admet deux directions propres distinctes et h admet deux points invariants distincts, que nous désignerons par P et Q.

2e CAS : $\Delta(\lambda)$ *admet un zéro double.* La considération du polynôme dérivé nous apprend que ce zéro est $\frac{a+d}{2}$. Les directions propres de $\mathcal{H}$ sont données par le système

$$\begin{cases} \left(a - \frac{a+d}{2}\right)X + bT = 0 \\ cX + \left(d - \frac{a+d}{2}\right)T = 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} (a - d)X + 2\,bT = 0 \\ 2\,cX - (a - d)T = 0. \end{cases}$$

(1) Quand on remplace $\mathcal{H}$ par $k\mathcal{H}$, ($k \in K^{\bullet}$), ce qui n'altère pas h, les valeurs propres de la matrice changent, mais ses directions propres ne changent pas.

En général ce système est de rang 1; h admet le point invariant unique P dont deux systèmes de coordonnées homogènes sont

$$(X = 2b, \quad T = d - a); \qquad (X = a - d, \quad T = 2c),$$

ce qui est compatible puisque, dans ce cas, $(a - d)^2 + 4bc = 0$.

Il n'y a exception que si, simultanément,

$$a = d, \qquad b = 0, \qquad c = 0$$

c'est-à-dire si h est l'application identique de $\mathfrak{L}$, auquel cas tout point de $\mathfrak{L}$ est invariant.

3° **Transformations des points invariants de h dans une seconde application homographique ψ de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{L}$.** — L'application homographique ψ transforme M et $M' = h(M)$ en N et N', suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & M' \\ \psi\downarrow & & \downarrow\psi \\ N & \xrightarrow[\eta]{} & N' \end{array}$$

N' est le transformé de N par l'application

$$\eta = \psi \circ h \circ \psi^{-1}$$

qui est homographique, comme produit d'applications homographiques.

Le diagramme ci-dessus montre que

$$M = M' \iff N = N'.$$

Les points invariants de η (resp. h) *sont les transformés par* ψ (resp. ψ^{-1}) *des points invariants de* h (resp. η).

87. *Forme canonique d'une application homographique qui admet deux points invariants distincts.* — 1° **Notations.** — Soit h une application homographique de la droite projective $\mathfrak{L}$ sur elle-même qui admet deux points invariants distincts P et Q.

Reprenons les notations du n° 86, 1°, en supposant que le repère $\mathfrak{R}$ a été choisi de façon que P et Q aient les abscisses projectives ∞ et 0, c'est-à-dire les coordonnées homogènes (1,0) et (0,1). Le point unitaire du repère $\mathfrak{R}$ est désigné par M_1.

A partir de

$$\mathcal{H}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$$

on constate que

$$P = h(P) \quad \text{et} \quad Q = h(Q) \iff c = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

(la régularité de $\mathcal{H}$ exigeant alors $a \neq 0$ et $d \neq 0$).

On peut adopter, *en associant convenablement les couples de coordonnées homogènes de* M *et* M′,

$$\begin{bmatrix}X'\\T'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0\\0 & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\T\end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}X' = aX\\T' = dT\end{cases} \quad (a \neq 0 \text{ et } d \neq 0).$$

Remarque. — La restriction $\hat{h}$ de h à la droite affine $D = \mathcal{L} - \{P\}$ s'écrit, dans le repère affine d'origine Q et de vecteur unitaire $\overrightarrow{QM_1}$,

$$x' = \frac{a}{d}x.$$

On reconnaît une application affine bijective, dont Q est point invariant.

2° **Étude du birapport** (P, Q, M, M′). — Revenant à $\mathcal{L}$, le birapport (P, Q, M, M′) admet, parmi ses représentants dans K,

$$(\omega_{31}\omega_{42}, \omega_{32}\omega_{41}) = \left(\begin{vmatrix}X & 1\\T & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}aX & 0\\dT & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}X & 0\\T & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}aX & 1\\dT & 0\end{vmatrix}\right) \quad \text{ou} \quad (-aXT, -dXT).$$

Si nous nous limitons à $M \neq P$ et $M \neq Q$, nous avons $XT \neq 0$ et un autre représentant du birapport est (a, d); autrement dit (P, Q, M, M′) est l'élément $k = \frac{a}{d}$ de $\tilde{K}$.

Nous pouvons énoncer :

Théorème. — **Si une application homographique h de la droite projective $\mathcal{L}$ sur elle-même admet les points invariants distincts P et Q, le birapport**

$$(P, Q, M, h(M))$$

reste fixe quand M parcourt $\mathcal{L} - \{P, Q\}$.

Notons que la constante $k = \frac{a}{d}$ n'est pas nulle et qu'elle n'est égale à 1 que si h est l'application identique de $\mathcal{L}$.

3° <u>Théorème réciproque.</u> — **Soient P et Q deux points fixes, distincts, de la droite projective $\mathcal{L}$, et k un scalaire non nul du corps de base K.**

L'application $M' = f(M)$ de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ définie par

$$\begin{cases} (P, Q, M, M') = k & \text{si } M \neq P \text{ et } M \neq Q \\ f(P) = P, \ f(Q) = Q \end{cases}$$

est homographique (non identique si $k \neq 1$); **elle admet P et Q pour points invariants.**

Rapportons $\mathcal{L}$ à un repère $\mathcal{R}$ choisi de façon que P et Q aient pour abscisses projectives ∞ et 0. Soient (X, T) et (X', T') des coordonnées homogènes de M et M' dans $\mathcal{R}$.

k n'étant ni ∞, ni 0, si M est distinct de P et Q, il en est de même de M' et X, T, X', T' sont tous non nuls; le birapport (P, Q, M, M') admet pour représentant dans $\tilde{K}$

$$\left(\begin{vmatrix} X & 1 \\ T & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X' & 0 \\ T' & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X & 0 \\ T & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X' & 1 \\ T' & 0 \end{vmatrix} \right) \quad \text{ou} \quad (-X'T, -XT')$$

et, dans ce cas,

$$(1) \qquad M' = f(M) \iff X'T = kXT'.$$

On peut choisir les coordonnées homogènes de M et M' de façon que $T' = T$; alors $X' = kX$, si bien qu'on peut écrire

$$(2) \qquad M' = f(M) \iff \begin{bmatrix} X' \\ T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix}.$$

Étant donné que $M' = f(M)$ peut encore se traduire par (2) si $M = P$ et $M = Q$, f n'est autre que l'application homographique de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$ déterminée, dans le repère $\mathcal{R}$, par la matrice

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Corollaire I. — h^2 est l'application homographique, de points invariants P et Q, traduite dans le repère $\mathcal{R}$ par la matrice

$$\mathcal{H}^2 = \begin{bmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

h^2 est l'application identique si, et seulement si, $k = 1$ ou $k = -1$.

Quand M parcourt $\mathcal{L} - \} P, Q \{$, on a

$$(P, Q, M, h^2(M)) = k^2.$$

Corollaire II. — Si P et Q sont deux points distincts de $\mathcal{L}$, et si A et A' sont deux points distincts de $\mathcal{L}$, non confondus avec P ou Q, il existe (n° 84) une application homographique h, et une seule, de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$ admettant P et Q pour points invariants, et telle que $A' = h(A)$. Au lieu de la traduire par (PQAM) = (P'Q'A'M'), on peut d'après le théorème précédent, la traduire par

$$(P, Q, M, M') = (P, Q, A, A').$$

88. ***Forme canonique d'une application homographique qui admet deux points invariants confondus.*** — Soit h une application homographique de la droite projective $\mathcal{L}$ sur elle-même qui admet deux points invariants confondus en P. Reprenons les notations du n° **86**, en supposant que le repère $\mathcal{R}$ a été choisi de façon que P ait ∞ pour abscisse projective; soient M_0 et M_1 les points d'abscisses projectives 0 et 1.

On sait (**86**, 2°) que si h admet un point invariant unique, celui-ci a les deux systèmes de coordonnées homogènes

$$(2\,b,\ d - a); \quad (a - d,\ 2\,c).$$

Pour que le point d'abscisse projective ∞ soit point double unique il est donc nécessaire que

$$c = 0 \qquad \text{et} \qquad d = a.$$

Inversement cela suffit, à condition que l'on ait $a \neq 0$ (à cause de la régularité de la matrice) et $b \neq 0$ (sinon h serait l'application identique).

La matrice $\mathcal{H}$ étant définie à un scalaire multiplicatif près, nous pouvons choisir

$$\text{(1)} \qquad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (l \neq 0)$$

et adopter

$$\begin{bmatrix} X' \\ T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} X' = X + lT \\ T' = T \end{cases}$$

La restriction de h à la droite affine $D = \mathcal{L} - \{ P \}$ a pour équation, dans le repère affine d'origine M_0 et de vecteur unitaire $\overrightarrow{M_0M_1}$,

$$\text{(2)} \qquad x' = x + l, \qquad (l \neq 0).$$

On reconnaît une translation, non nulle.

La réciproque est immédiate : toute translation non nulle sur D s'écrit sous la forme (2) et peut être considérée comme la restriction à D d'une application homographique sur $\mathcal{L}$, de matrice (1) et, par suite, de points doubles confondus en P.

Nous pouvons énoncer :

<u>THÉORÈME.</u> — **Étant donné un point fixe P de la droite projective $\mathcal{L}$, une application homographique h de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$ admet deux points invariants confondus en P si, et seulement si, la restriction de h à la droite affine $D = \mathcal{L} - \{ P \}$ est une translation de D.**

REMARQUE. — L'application homographique h^2 se traduit par

$$\mathcal{H}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2\,l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad x' = x + 2\,l.$$

Elle admet deux points invariants confondus en P.

89. ***Involution sur une droite projective.*** — Rappelons (I, n° 21, 4°) qu'une bijection, f, d'un ensemble E sur lui-même est dite involutive si elle vérifie la condition.

$$f^{-1} = f \iff f^2 = e \qquad (e : \text{application identique de E}).$$

1° DÉFINITION. — **On appelle involution sur la droite projective $\mathcal{L}$ toute application homographique de $\mathcal{L}$ sur elle-même qui est involutive, sans être identique.**

2° **Matrice d'une involution.** — Soit h une application homographique de la droite projective $\mathcal{L}$ sur elle-même et $\mathcal{H}$ la matrice (définie à un scalaire multiplicatif près) qui détermine h, dans un repère $\mathcal{R}$, arbitrairement choisi, de $\mathcal{L}$.

h^2 est l'application homographique déterminée par $\mathcal{H}^2$. Soit I la matrice unité d'ordre 2.

$$h^2 = e \iff \exists\, \lambda \in K^\bullet \quad \text{tel que} \quad \mathcal{H}^2 = \lambda I \quad \text{ou} \quad \lambda\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}.$$

Deux matrices égales ayant des déterminants égaux, $\lambda I = \mathcal{H}^2$ exige

$$\lambda^2 = (\text{dét } \mathcal{H})^2 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \pm \text{ dét } \mathcal{H}.$$

Explicitons :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ (ad - bc \neq 0); \qquad \mathcal{H}^{-1} = \frac{1}{\text{dét } \mathcal{H}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

a) Avec $\lambda = \text{dét } \mathcal{H}$, $\quad \lambda\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = d \\ b = c = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathcal{H} = aI,$$

ce qui correspond à l'application identique, qui a été exclue.

b) Avec $\lambda = -\text{ dét } \mathcal{H}$, $\quad \lambda\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad a + d = 0 \quad \text{ou} \quad \text{trace de } \mathcal{H} = 0.$$

Finalement :

THÉORÈME. — **Une application homographique est une involution si, et seulement si, elle est représentée, dans un repère quelconque, par une matrice dont la trace est nulle.**

L'indifférence du choix du repère tient au fait que deux matrices semblables ont des traces égales.

3° **Points invariants.** — La matrice d'une involution

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \qquad (a^2 + bc \neq 0)$$

a pour polynôme caractéristique

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - (a^2 + bc).$$

Il n'est donc pas possible qu'une involution admette deux points invariants confondus.

Mieux, *si le corps de base est celui des complexes, toute involution admet deux points invariants distincts.*

4° **Forme canonique d'une involution.** — *a*) THÉORÈME. — **Dans une involution h de points invariants P et Q, deux éléments homologues, M et M', sont conjugués harmoniques par rapport à P et Q.**

h étant une application homographique, non identique, de points invariants P et Q, il existe (87, 2°) un scalaire k de K, distinct de 0 et de 1, tel que, quand M parcourt $\mathcal{X} - \{P, Q\}$

$$(P, Q, M, h(M)) = k \qquad \text{et} \qquad (P, Q, M, h^2(M)) = k^2.$$

Étant donné que h^2 est l'application identique de $\mathcal{X}$, on a $k^2 = 1$ et (puisque $k \neq 1$) $k = -1$. La proposition en résulte, à condition de convenir que

$$(P, Q, P, P) = -1 \qquad \text{et} \qquad (P, Q, Q, Q) = -1.$$

b) THÉORÈME RÉCIPROQUE. — **Soient P et Q deux points fixes, distincts, de la droite projective $\mathcal{X}$. L'application, f, de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ définie par**

$$\begin{cases} \text{si } M \neq P \text{ et } M \neq Q, f(M) \text{ est le conjugué } M' \text{ de } M \text{ par rapport à } P \text{ et } Q \\ f(P) = P, \qquad f(Q) = Q. \end{cases}$$

est une involution de points invariants P et Q.

D'après le théorème du n° 87, 3°, dans le cas $k = -1$, f est une application homographique.

D'autre part $f^2(P) = P$, $f^2(Q) = Q$ et, si M est distinct de P et Q, $f^2(M)$ est le conjugué de $M' = f(M)$ par rapport à P et Q, c'est-à-dire M lui-même. Par suite f^2 est l'application identique de $\mathcal{X}$; la proposition en résulte.

c) ***Interprétation par une symétrie sur une droite affine.*** — En reprenant le calcul du n° 87, 1° et 2°, nous constatons que dans un repère $\mathcal{R}$ choisi de façon que P et Q aient pour abscisses projectives ∞ et 0, l'involution h de points invariants P et Q se traduit par la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La restriction de h à la droite affine $D = \mathcal{X} - \{P\}$ a pour équation

$$x' + x = 0,$$

il s'agit de la symétrie par rapport au point Q.

Réciproquement, sur une droite affine D, la symétrie par rapport à un point donné M_0 peut être considérée comme la restriction à D d'une involution sur la complétion projective $\mathcal{X} = D + \{M_\infty\}$, cette involution admettant les points invariants M_0 et M_∞ :

$$M \text{ et } M' \text{ symétriques par rapport à } M_0 \iff (M_\infty, M_0, M, M') = -1.$$

5° Détermination d'une involution. — Nous utiliserons le résultat suivant :

THÉORÈME. — **Une application homographique h est une involution si, et seulement si, il existe deux points distincts, tels que chacun d'eux soit le transformé de l'autre par h.**

a) Soit h une involution. Comme il s'agit d'une application non identique, il existe un point A tel que $B = h(A)$ est distinct de A; de plus, d'après le caractère symétrique, $h(B) = A$; il existe deux points distincts A et B tels que chacun d'eux est l'homologue de l'autre.

b) Soit h une application homographique; nous supposons qu'il existe deux points A et B tels que :

$$A \neq B, \quad h(A) = B, \quad h(B) = A.$$

Soit $\mathcal{R}$ un repère choisi de façon que A et B aient pour coordonnées projectives ∞ et 0 et soit

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

une matrice qui représente h dans le repère $\mathcal{R}$.

Les points $h(A)$ et $h(B)$ admettent respectivement les coordonnées homogènes (a, c) et (b, d) si bien que l'on a :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad d = 0 \implies \text{trace de } \mathcal{H} = 0 \implies h \text{ est une involution}$$

6° Involution déterminée par deux couples de points homologues. — THÉORÈME. — **Étant donnés deux couples de points de $\mathcal{L}$, (A, A′) et (B, B′), tels que chaque point de l'un est distinct de chacun des points qui composent l'autre, il existe une involution et une seule qui transforme A en A′ et B en B′.**

a) *Supposons* $A' = A$, $B' = B$. La proposition est alors triviale; le problème admet pour solution unique l'involution définie par

$$(A, B, M, M') = -1.$$

ainsi que cela résulte du 2°.

b) *Supposons* $B \neq B'$. — *Analyse.* — S'il existe une involution h qui répond à la question, h est une application homographique qui transforme respectivement A, B, B′ en A′, B′, B.

Synthèse. — Il existe (85) une application homographique h_0, et une seule, telle que

$$h_0(A) = A', \qquad h_0(B) = B', \qquad h_0(B') = B,$$

puisque les trois points A, B, B′ d'une part et les trois points A′, B′, B d'autre part sont deux à deux distincts; h_0 est déterminée par

$$(A, B, B', M) = (A', B', B, M').$$

h_0 est une involution puisque les points distincts B et B′ sont homologues l'un de l'autre.

COROLLAIRE I. — Étant donnés trois couples (A, A′), (B, B′), (C, C′), tels que chaque point de l'un est distinct de chacun des points qui composent les autres, l'application homographique déterminée par

$$h(A) = A', \qquad h(B) = B', \qquad h(C) = C'$$

est une involution si, et seulement si, l'involution déterminée par les deux couples (A, A') et (B, B') transforme C en C', ce qui s'exprime par

$$(A, B, B', C) = (A', B', B, C').$$

COROLLAIRE II. — Étant donnés deux couples (A, A') et (B, B'), tels que chaque point de l'un est distinct de chacun des points qui composent l'autre, il existe — dans le cas où le corps de base est celui des complexes — un, et un seul, couple (P, Q) conjugué par rapport à chacun des couples donnés : P et Q sont les points invariants de l'involution déterminée par (A, A') et (B, B'). Si, en outre, $A' \neq A$ et $B' \neq B$, l'involution de points invariants (A, A') et l'involution de points invariants (B, B') ont un et un seul couple commun (P, Q) de points homologues.

90. *Application homographique de $\tilde{K}$ sur lui-même.* — Le lecteur n'aura pas manqué de remarquer que, dans les problèmes traités jusqu'ici, nous avons été conduits à choisir un repère (et en particulier un point à l'infini) propre à simplifier l'étude.

Nous allons maintenant considérer le cas d'une droite projective $\mathfrak{L}$ sur laquelle un point à l'infini est imposé *a priori* : c'est ce qui se passe quand $\mathfrak{L}$ est la complétion projective d'une droite affine. En utilisant une bijection qui associe le point à l'infini de $\mathfrak{L}$ à l'élément infini de $\tilde{K}$, nous nous ramènerons au cas de la droite projective $\tilde{K}$, rapportée à son repère canonique $\{\infty, 0, 1\}$.

Dans tout ce paragraphe, h désigne l'application homographique de $\tilde{K}$ sur lui-même dont une matrice représentative dans le repère canonique est

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad (ad - bc \neq 0).$$

1° **Équation homogène de h.** — Soient (X, T) et (X', T') deux représentants homogènes des éléments x et x' de $\tilde{K}$. Étant donné que $h(x)$ admet pour représentant $(aX + bT, cX + dT)$ on a

$$x' = h(x) \iff \begin{vmatrix} X' & aX + bT \\ T' & cX + dT \end{vmatrix} = 0.$$

Nous dirons que cette dernière relation, qui s'écrit

$$cXX' - aXT' + dX'T - bTT' = 0$$

est une *équation homogène* de l'application homographique h.

On en déduit, par identification, que, si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, la relation

$$\alpha XX' + \beta XT' + \gamma X'T + \delta TT' = 0$$

est une équation homogène d'une application homographique de $\tilde{K}$ sur $\tilde{K}$, représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} -\beta & -\delta \\ \alpha & \gamma \end{bmatrix}$$

2° **Équation non homogène de h.** — En utilisant

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

on constate que $h(\infty)$ admet le représentant homogène (a, c).

Pour $x \neq \infty$, x et $x' = h(x)$ admettent respectivement les représentants

$$(x, 1) \qquad \text{et} \qquad (ax + b, cx + d).$$

Nous sommes amenés à envisager deux cas :

I) *Supposons* $c \neq 0$; h prend la forme

$$\begin{cases} x' = \dfrac{ax+b}{cx+d} \iff cxx' - ax + dx' - b = 0 & \left(x \neq \infty \text{ et } x \neq -\dfrac{d}{c}\right) \\ h(\infty) = \dfrac{a}{c}, \qquad h\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty. \end{cases}$$

La restriction de h à $K' = K - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ est la bijection de K' sur $K'' = K - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ qui, dans les classes antérieures, est connue sous le nom de *fonction homographique* (d'où le nom d'application homographique donné à h).

II) *Supposons* $c = 0$; (cela implique $ad \neq 0$); h prend la forme

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d} & (x \neq \infty) \\ h(\infty) = \infty. \end{cases}$$

La restriction de h à K est une application affine bijective (1).

Par abus de langage, on dit parfois que h est affine.

3° **Éléments focaux.** — L'étude du 2° a introduit les éléments $h(\infty)$ et $h^{-1}(\infty)$ de $\tilde{K}$. Posons alors la définition suivante (qui s'explique par des considérations d'optique géométrique) :

DÉFINITION. — **Les éléments de $\tilde{K}$, $u' = h(\infty)$ et $v = h^{-1}(\infty)$, sont respectivement appelés élément focal-image et élément focal-objet de l'application homographique h.**

objet	x	∞	v
image	x'	u'	∞

Si h est affine, les éléments focaux sont $u' = \infty$ et $v = \infty$.

Si h n'est pas affine, les éléments focaux, finis, sont $u' = \dfrac{a}{c}$ et $v = -\dfrac{d}{c}$.

(1) Ce résultat sera généralisé au n° 101.

Pour $x \neq \infty$ et $x \neq v$, l'équation non homogène s'écrit (compte-tenu de $c \neq 0$)

$$xx' - \frac{a}{c}x + \frac{d}{c}x' - \frac{b}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad xx' - ux - vx' - \frac{b}{c} = 0$$

ou, enfin,

$$\boxed{(x - v)(x' - u') = k, \qquad \left(k = \frac{b}{c} + u'v\right)\cdot}$$

4° **Formes canoniques.** — D'après l'équation non homogène, les éléments invariants finis sont les racines de l'équation sur K

(E) $$cx^2 - (a - d)x - b = 0.$$

a) Dans le cas II, $c = 0$, $h(\infty) = \infty$ montre que ∞ est élément invariant. Si $a \neq d$, il y a un élément invariant fini $q = \dfrac{b}{d - a}\cdot$

En utilisant l'étude des bijections affines de K sur K, on a les formes canoniques

$$\begin{cases} a \neq d, \text{ éléments invariants distincts } \infty \text{ et } q \ : \ x' - q = \alpha(x - q) & (1) \\ a = d, \text{ éléments invariants confondus } \infty \text{ et } \infty \ : \ x' = x + l & (2) \end{cases}$$

b) Dans le cas I, $c \neq 0$, (E) est du second degré. Limitons-nous au cas où le corps de base est celui des complexes. (E) admet deux racines p et q, confondues si $(a - d)^2 + 4\,ac = 0$.

On a :

$$p + q = \frac{a - d}{c}, \quad u' = \frac{a}{c}, \quad v = -\frac{d}{c} \implies \boxed{p + q = u' + v.}$$

Le cas I se subdivise ainsi :

α) Si $p \neq q$, nous savons que l'application h admet la forme canonique

(3) $$\begin{cases} h(p) = p, \quad h(q) = q \\ (p, q, x, x') = k \quad \text{si} \quad x \neq p \quad \text{et} \quad x \neq q \quad (k \neq \infty, 0, 1). \end{cases}$$

La dernière relation s'écrit

$$\frac{x' - p}{x' - q} = \alpha\frac{x - p}{x - q} \qquad (\alpha = k^{-1}).$$

β) Dans le cas où $p = q$ considérons l'application homographique ψ déterminée par

$$\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{1}{x - p} \quad \text{si} \quad x \neq \infty \quad \text{et} \quad x \neq p. \\ \psi(\infty) = 0, \quad \psi(p) = \infty \end{cases}$$

x et $x' = h(x)$ sont transformés par ψ en y et y' suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h} & x' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ y & \xrightarrow[\eta]{} & y' \end{array}$$

D'après le nº **86**, 3º les points invariants de η sont les transformés par ψ des points invariants de h; les deux points invariants de η sont donc confondus avec l'élément ∞ de $\tilde{K}$; par suite

$$\begin{cases} \eta(y) = y + l \\ \eta(\infty) = \infty \end{cases}$$

Il en résulte que h admet la forme canonique

(4) $$\begin{cases} \dfrac{1}{x'-p} = \dfrac{1}{x-p} + l \qquad (x \neq p) \\ h(p) = p. \end{cases}$$

c) En résumé, les diverses formes canoniques sont résumées dans le tableau suivant :

éléments invariants distincts	$p \neq \infty,\ q \neq \infty$	: $\dfrac{x'-p}{x'-q} = \alpha \dfrac{x-p}{x-q}$	(3)
	$p = \infty,\ q \neq \infty$	: $x'-q = \alpha(x-q)$	(1)
éléments invariants confondus	$p \neq \infty$	: $\dfrac{1}{x'-p} = \dfrac{1}{x-p} + l$	(4)
	$p = \infty$	: $x' = x + l$	(2)

Applications : h^n est *a priori* une application homographique qui admet les points invariants p et q. Nous avons, dans les divers cas, l'équation de h^n :

(3′) $$\frac{x'-p}{x'-q} = \alpha^n \frac{x-p}{x-q}; \qquad x'-q = \alpha^n(x-q) \qquad (1')$$

(4′) $$\frac{1}{x'-p} = \frac{1}{x-p} + nl; \qquad x' = x + nl \qquad (2')$$

91. ***Involution sur*** $\tilde{\mathbf{K}}$. — 1º D'après la théorie générale, l'application homographique h de $\tilde{K}$ sur lui-même considérée au nº **90** est involutive si, et seulement si, $a + d = 0$, c'est-à-dire si

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \qquad (a^2 + bc \neq 0)$$

L'équation homogène de l'involution h (cf. **90**, 1°), est

$$cXX' - a(XT' + X'T) - bTT' = 0,$$

ce qui met en évidence le rôle symétrique joué par M et M'.

I) $c \neq 0$; l'équation non homogène de h prend la forme

$$\begin{cases} cxx' - a(x + x') - b = 0 \quad \left(x \neq \infty, \quad x \neq \frac{a}{c}\right) \\ \text{ou} \quad \left(x - \frac{a}{c}\right)\left(x' - \frac{a}{c}\right) = k \\ h(\infty) = \frac{a}{c}, \quad h\left(\frac{a}{c}\right) = \infty. \end{cases}$$

Les éléments invariants, qui sont finis, sont les racines éventuelles de

$$cx^2 - 2\,ax - b = 0.$$

Ils sont symétriques par rapport à l'élément $\frac{a}{c}$ qui joue ici simultanément le rôle de point focal-image et de point focal-objet, et qui est appelé *point central* de l'involution h.

La forme canonique est

$$(p, q, x, x') = -1.$$

II) $c = 0$; l'équation non homogène de h prend la forme

$$\begin{cases} x + x' = -\frac{b}{a} \quad (x \neq \infty) \\ h(\infty) = \infty. \end{cases}$$

Les éléments invariants sont $p = \infty$ et $q = -\frac{b}{2\,a}$, et h admet la forme canonique.

$$x' - q = -(x - q)$$

autrement dit, la restriction de h à K est la symétrie par rapport à q (résultat déjà obtenu au n° **89**, 4°).

2° **Involution et équation du second degré.** — Nous nous limitons ici au cas où le corps K est le corps des complexes, C.

I. L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ SUR $\tilde{C}$. — PROBLÈME. *Étant donnés les trois nombres complexes a, b, c, non tous nuls, trouver tous les éléments de l'ensemble $\tilde{C}$ dont un représentant* (X, T) *satisfait à la condition*

(1) $$aX^2 + bXT + cT^2 = 0.$$

1er CAS : *Supposons* $a \neq 0$. L'élément ∞ = classe (1, 0) de $\tilde{C}$ ne répond pas à la question. Toute solution éventuelle admet donc un représentant de la forme $(x, 1)$ et on ramené à résoudre l'équation sur C

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Celle-ci admet deux racines, qui sont confondues si $b^2 - 4ac = 0$.

2e CAS : *Supposons* $a = 0$. La condition (1) s'écrit

$$T(bX + cT) = 0.$$

$T = 0$ est vérifié par l'élément ∞ de $\tilde{C}$, et par lui seul
$bX + cT = 0$ est une équation du premier degré (cf. n° 68) qui admet une, et une seule, solution (d'ailleurs infinie si $b = 0$, $c \neq 0$).

En remarquant que si $a = 0$, les deux conditions $b^2 - 4ac = 0$ et $b = 0$ sont équivalentes, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Sur l'ensemble $\tilde{C}$, l'équation du second degré**

$$aX^2 + bXT + cT^2 = 0,$$

dans laquelle les coefficients a, b, c, ne sont pas tous nuls, admet deux racines, qui sont confondues si $b^2 - 4ac = 0$.

L'une des racines est ∞ si $a = 0$; les deux racines sont ∞ et ∞ si $a = b = 0$.

II. THÉORÈME. — **Si, dans une équation du second degré sur $\tilde{C}$, les coefficients « dépendent linéairement » d'un paramètre, les racines de l'équation se correspondent en général dans une involution.**

Ce théorème sera démontré au n° **239** comme application du théorème de Desargues sur les faisceaux de coniques.

III. EXEMPLES D'APPLICATIONS HOMOGRAPHIQUES

92. ***Exemples d'applications homographiques d'un espace projectif de dimensions trois sur lui-même.*** — Soit $\mathfrak{E}$ un espace projectif de dimension 3, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension 4, sur un corps K, et h une application homographique de $\mathfrak{E}$ sur lui-même.

Dans un repère $\mathfrak{R} = \{ A_1, A_2, A_3, A_4, \omega \}$ de $\mathfrak{E}$ dans lequel les coordonnées homogènes du point générique de $\mathfrak{E}$ sont désignés par (X, Y, Z, T), h est représentée par une matrice régulière d'ordre 4, $\mathcal{H} = [\alpha_{ij}]$.

La recherche d'une forme réduite de h (que nous n'aborderons pas dans le cas général) fait intervenir les *points invariants*, c'est-à-dire les points M de $\mathfrak{E}$ tels que $h(M) = M$.

Limitons-nous à donner quelques généralités sur la recherche des points invariants et à traiter quelques exemples.

a) En raisonnant comme au n° 84, on constate que l'un des sommets, A_j, du tétraèdre de référence est point invariant si, et seulement si

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \alpha_{jj} \neq 0.$$

b) Les points invariants de h correspondent aux directions propres de la matrice $\mathcal{H}$ (cf. tome I, n° 232). La matrice $\mathcal{H}$ étant régulière, son équation caractéristique, $\Delta(\lambda) = 0$, n'admet pas 0 pour racine.

A un zéro d'ordre p de $\Delta(\lambda)$ correspond dans $\vec{E}$ un sous-espace propre de dimensions p' telle que $1 \leqslant p' \leqslant p$, dont est issue une variété linéaire de $\mathcal{E}$, de dimension $p' - 1$, formée de points invariants de h. Les variétés linéaires de $\mathcal{E}$ associées à deux zéros distincts de $\Delta(\lambda)$ sont disjointes, pour être issues de sous-espaces de $\vec{E}$ qui n'ont en commun que $\vec{0}$.

c) En particulier, à tout zéro simple de $\Delta(\lambda)$ correspond un point invariant de h.

EXEMPLE I. — *Plaçons-nous dans le cas où $\Delta(\lambda)$ admet quatre zéros distincts.*

h admet quatre points invariants qui sont linéairement indépendants puisque représentés dans $\vec{E}$ par les vecteurs d'une base. Désignons ces points par A_j, adjoignons leur un point unitaire ω. Nous obtenons ainsi un repère $\mathcal{R}$, dans lequel, d'après *a*),

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X' = \lambda_1 X \\ Y' = \lambda_2 Y \\ Z' = \lambda_3 Z \\ T' = \lambda_4 T \end{cases} \quad (\lambda_j \neq 0).$$

EXEMPLE II. — *Plaçons nous dans le cas où $\Delta(\lambda)$ admet un zéro simple et un zéro triple en supposant en outre qu'au zéro triple est associé un plan Π formé de points invariants* (c'est-à-dire que, pour ce zéro, on a $p' = p = 3$).

Soit S le point invariant associé au zéro simple. D'après *b*) on a $S \notin \Pi$. Soit $\mathcal{R}$ un repère formé de trois points linéairement indépendants, A_1, A_2, A_3, arbitrairement choisis dans Π, de $A_4 = S$ et d'un point unitaire ω, arbitrairement choisi. Étant donné la possibilité de multiplier la matrice $\mathcal{H}$ par un scalaire non nul, on pourra écrire

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X' = X \\ Y' = Y \\ Z' = Z \\ T' = kT \end{cases} \quad (k \neq 0 \quad \text{et} \quad k \neq 1).$$

Étant donné un point M de $\mathcal{E}$ nous allons donner une construction géométrique simple de

$$M' = h(M).$$

Éliminons les cas $M = S$ et $M \in \Pi$ car, alors, $M' = M$.

La droite SM a deux points invariants distincts S et $\mu = SM \cap \Pi$. Elle est donc invariante dans son ensemble et elle contient M'.

Par ailleurs les quatre points S, μ, M, M' admettent des matrices représentatives de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ kT \end{bmatrix}$$

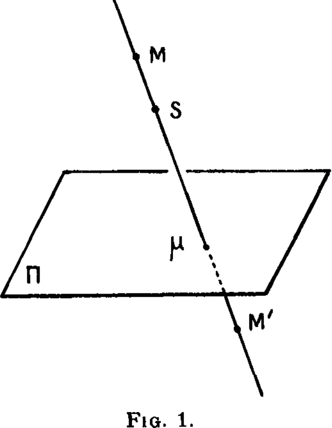


FIG. 1.

Ils admettent donc des représentants dans $\vec{E}^\bullet$ de la forme

$$\vec{S} \qquad \vec{\mu} \qquad T\vec{S} + \vec{\mu} \qquad kT\vec{S} + \vec{\mu} \qquad (T \neq 0).$$

On en déduit la valeur remarquable du birapport

$$(S, \mu, M, M') = (\infty, 0, T, kT) \qquad \text{ou } k.$$

D'où une construction simple (fig. 1) de M′ comme point de la droite $S\mu$ tel que

$$(S, \mu, M, M') = k.$$

Une telle application homographique est dite *homologie* et, en particulier, *homologie harmonique* si $k = -1$.

Le lecteur vérifiera que l'homologie h est déterminée par la donnée de S, Π, k, étant entendu que $S \notin \Pi$, $k \neq 0$ et $k \neq 1$.

Exemple III. — *Plaçons nous dans le cas où $\Delta(\lambda)$ a un deux zéros doubles, en supposant en outre qu'à chacun de ces zéros est associée une droite formée de points invariants* (pour ces zéros $p' = p = 2$).

D'après *b*), ces deux droites, D et D′, sont disjointes. Soit $\mathcal{R}$ un repère formé de deux points distincts A_1 et A_2 de D, de deux points distincts A_3 et A_4 de D′, et d'un point unitaire ω arbitrairement choisi. On pourra écrire

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X' = kX \\ Y' = kY \\ Z' = Z \\ T' = T \end{cases} \quad (k \neq 0 \quad \text{et} \quad k \neq 1)$$

Étant donné un point M de $\mathcal{L}$ nous allons donner une construction géométrique simple de $M' = h(M)$.

Éliminons les cas $M \in D$ et $M \in D'$ car, alors, $M' = M$.

Les plans (M, D) et (M, D′) ont en commun une droite qui rencontre D et D′ en des points μ et μ' qui sont points invariants de h. Cette droite est donc invariante dans son ensemble et elle contient M′.

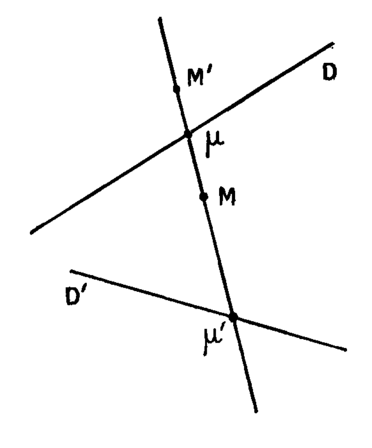


Fig. 2.

Par ailleurs les quatre points μ, μ', M, M′ admettent des matrices représentatives de la forme

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \\ T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} kX \\ kY \\ Z \\ T \end{bmatrix}$$

Ils admettent donc des représentants dans $\vec{E}^\bullet$ de la forme

$$\vec{\mu}, \qquad \vec{\mu}', \qquad \vec{\mu} + \vec{\mu}', \qquad k\vec{\mu} + \vec{\mu}'.$$

On en déduit

$$(\mu, \mu', M, M') = (\infty, 0, 1, k) \qquad \text{ou} \qquad k,$$

ce qui fournit une construction simple de M′ à partir de M (fig. 2).

Une telle application homographique est appelée *homologie biaxiale.*

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on détermine une homologie biaxiale en se donnant D, D′ et k, arbitrairement choisis, sous réserve que D et D′ n'aient aucun point commun, que $k \neq 0$ et $k \neq 1$.

IV. DUALITÉ DANS LES ESPACES PROJECTIFS

93. ***Espace projectif dual d'un espace projectif donné.*** — 1° **Définition.** — Soit $\mathfrak{L}$ un espace projectif, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, sur un corps K.

Nous avons défini (I, 184) le dual de $\vec{E}$ comme l'espace vectoriel $\vec{E}^*$ formé par les formes linéaires sur $\vec{E}$.

DÉFINITION. — **L'espace projectif $\mathfrak{L}^*$ issu du dual $\vec{E}^*$ de l'espace vectoriel $\vec{E}$ est dit espace projectif dual de l'espace projectif $\mathfrak{L}$ issu de $\vec{E}$.**

2° **Bijection canonique de l'ensemble des hyperplans de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{L}^*$.** Un élément de $\mathfrak{L}^*$ est un ensemble de formes linéaires sur $\vec{E}$, non nulles, obtenues en multipliant l'une quelconque d'entre elles par un scalaire de $K^\bullet$. Or (62) un tel ensemble correspond biunivoquement à un hyperplan de $\mathfrak{L}$.

Il existe donc une bijection, que nous désignerons par δ, de l'ensemble des hyperplans de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{L}^*$. A l'hyperplan H de $\mathfrak{L}$ dont une équation est $h(\vec{M}) = 0$, δ fait correspondre l'élément de $\mathfrak{L}^*$ dont un représentant homogène est la forme h; cet élément est noté $\delta(H)$.

La bijection δ est *canonique*, en ce sens qu'elle ne fait intervenir aucun repère.

3° **Rang d'un système d'hyperplans de $\mathfrak{L}$.** — Nous conviendrons d'appeler rang du système $\mathcal{G} = \{ H_1, \ldots, H_p \}$, formé par un nombre fini p d'hyperplans de $\mathfrak{L}$, le rang r du système $\delta(\mathcal{G})$ d'éléments de $\mathfrak{L}^*$, images des hyperplans de $\mathcal{G}$ par la bijection canonique δ.

Il en résulte que si $h_i(\vec{M}) = 0$ est une équation, arbitrairement choisie, de l'hyperplan H_i, le rang de $\mathcal{G}$ n'est autre que le rang du système formé par les formes linéaires $\{ h_1, \ldots, h_p \}$ sur $\vec{E}$.

94. ***Faisceaux linéaires d'hyperplans.*** — Nous reprenons les notations du n° 93.

DÉFINITION. — **On appelle faisceau (resp. réseau) linéaire toute famille d'hyperplans de l'espace projectif $\mathfrak{L}$ dont l'image par la bijection canonique δ est une variété linéaire de dimension 1 (resp. 2) de l'espace projectif dual $\mathfrak{L}^*$.**

En abrégé, on pourra dire *faisceau* au lieu de *faisceau linéaire*.

2° Représentation d'un faisceau linéaire. Abscisse projective. — Montrons que le faisceau $\mathcal{F}$ d'hyperplans de $\mathfrak{L}$ peut être déterminé par deux quelconques de ses éléments, distincts, F et G, qui seront dits hyperplans de base du faisceau.

En effet, si $f(\vec{M}) = 0$ et $g(\vec{M}) = 0$ sont deux équations arbitrairement choisies des hyperplans F et G, nous pouvons déterminer la variété linéaire projective $\delta(\mathcal{F})$ de $\mathfrak{L}^*$ par les formes linéaires f et g, qui sont indépendantes puisque $F \neq G$. L'élément générique de $\delta(\mathcal{F})$ admet pour représentant homogène la forme

$$h = \alpha f + \beta g, \qquad \text{classe } (\alpha, \beta) \in \tilde{K}$$

et l'hyperplan générique H de $\mathcal{F}$ admet l'équation

$$h(\vec{M}) = 0 \qquad \text{avec} \qquad h = \alpha f + \beta g.$$

L'élément de $\tilde{K}$ dont un représentant homogène est (α, β) a été appelé abscisse projective de $\delta(H)$; nous dirons que c'est aussi l'abscisse projective de l'hyperplan H du faisceau $\mathcal{F}$; on ne perdra pas de vue que cette abscisse dépend non seulement du choix des hyperplans de base F et G, mais aussi de celui des équations de ces hyperplans.

3° Birapport de quatre hyperplans d'un faisceau. — Par définition, le birapport des quatre hyperplans H_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, du faisceau $\mathcal{F}$ est le birapport des quatre éléments $\delta(H_i)$ de la variété linéaire de dimension 1, $\delta(\mathcal{F})$, de $\mathfrak{L}^*$. Il en résulte que ce birapport est égal à celui des abscisses projectives des H_i, et cela quel que soit le choix de la représentation du faisceau; on le désigne par la notation

$$(H_1, H_2, H_3, H_4).$$

4° Hyperplans d'un faisceau $\mathcal{F}$ qui passent par un point donné A. — Avec les notations du 2°, nous avons, en désignant par $\vec{A}$ un représentant homogène, arbitrairement choisi, de A dans $\vec{E}^\bullet$:

$$A \in H \iff \alpha f(\vec{A}) + \beta g(\vec{A}) = 0.$$

D'après l'étude d'une équation du premier degré sur $\tilde{K}$ (69), deux cas sont à considérer :

1er Cas : A *appartient à* F *et à* G. Le point A appartient alors à tout hyperplan de $\mathcal{F}$.

2e Cas : A *n'appartient pas à l'un, au moins, des hyperplans* F *et* G. Il existe un, et un seul hyperplan de $\mathcal{F}$ qui passe par A; une équation de cet hyperplan est

$$g(\vec{A}).f(\vec{M}) - f(\vec{A}).g(\vec{M}) = 0.$$

Étant donné le libre choix des hyperplans de base, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Par un point A de $\mathcal{L}$ passe, en général, un et un seul hyperplan d'un faisceau $\mathcal{F}$. Toutefois si A appartient à deux hyperplans distincts de $\mathcal{F}$, tout hyperplan de $\mathcal{F}$ passe par A, qui est dit point fixe de $\mathcal{F}$.**

REMARQUE. — Soit D une droite de $\mathcal{L}$ qui passe par un point fixe A du faisceau $\mathcal{F}$, et soit B un second point de D.

Si B est, lui aussi, un point fixe de $\mathcal{F}$, tout hyperplan de $\mathcal{F}$, contenant A et B, contient tout point de D : tout point de D est point fixe de $\mathcal{F}$. Dans le cas contraire, il existe un, et un seul, hyperplan de $\mathcal{F}$ qui contient la droite D (celui qui contient B).

5° **Interprétation du birapport de quatre hyperplans d'un faisceau $\mathcal{F}$.** — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau linéaire d'hyperplans et D une droite de $\mathcal{L}$. Nous supposons qu'aucun hyperplan de $\mathcal{F}$ ne contient D, ce qui implique (d'après la remarque précédente) que D ne contient aucun point fixe de $\mathcal{F}$.

Il en résulte que, si F et G sont des hyperplans de base de $\mathcal{F}$, arbitrairement choisis, D coupe F et G en des points distincts A et B; soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ des représentants homogènes de ces points dans $\vec{E}^\bullet$, le point générique de D admet le représentant

$$\vec{M} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B}.$$

Soient $f = 0$ et $g = 0$ des équations arbitrairement choisies de F et G; l'hyperplan générique H de $\mathcal{F}$ admet l'équation

$$\alpha f(\vec{M}) + \beta g(\vec{M}) = 0.$$

Cela posé

$$M \in H \iff \alpha f(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}) + \beta g(\lambda\vec{A} + \mu\vec{\beta}) = 0$$

ce qui, compte-tenu de $f(\vec{A}) = g(\vec{B}) = 0$, $g(\vec{A}) \neq 0$, $f(\vec{B}) \neq 0$ s'écrit

$$M \in H \iff \alpha\mu f(\vec{B}) + \lambda\beta g(\vec{A}) = 0.$$

Il en résulte que l'abscisse projective, classe (α, β), de l'hyperplan générique H de $\mathcal{F}$ est liée homographiquement à l'abscisse projective, classe (λ, μ), du point d'intersection M de H et de la droite projective D de $\mathcal{L}$. On en déduit :

THÉORÈME. — **Le birapport de quatre hyperplans d'un faisceau linéaire est égal au birapport de leurs quatre points d'intersection avec toute droite qui n'appartient à aucun des hyperplans du faisceau.**

6° **Gerbe harmonique** (1). — DÉFINITION. — **Les deux hyperplans H_3 et H_4 du faisceau $\mathcal{F}$ sont dits conjugués harmoniques par rapport aux hyperplans H_1 et H_2 de $\mathcal{F}$ si**

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = -1.$$

On en déduit (cf. 70) que la propriété de conjugaison appartient aux couples non rangés (H_1, H_2), (H_3, H_4) et qu'elle est réciproque par rapport à ces couples. On dit que $\{ H_1, H_2, H_3, H_4 \}$ est une *gerbe harmonique*.

D'après le 5°, nous avons :

THÉORÈME. — **Quatre hyperplans d'un faisceau linéaire constituent une gerbe harmonique si, et seulement si, il existe une droite qui les coupe suivant une division harmonique.**

L'équivalence $(\lambda, \lambda', 0, \infty) = -1 \iff \lambda + \lambda' = 0$ permet d'énoncer :

THÉORÈME. — **Dans un faisceau linéaire d'hyperplans, deux hyperplans sont conjugués harmoniques par rapport aux hyperplans de base si, et seulement si, leurs abscisses projectives sont opposées.**

95. ***La dualité dans les espaces projectifs de dimension finie.*** — Nous supposons ici que l'espace vectoriel $\vec{E}$ (et par suite l'espace vectoriel dual $\vec{E}^*$) admet la dimension finie $n + 1$.

Il en résulte que les espaces projectifs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ ont la dimension commune n.

1° Rappelons (I, 186) que nous avons su associer biunivoquement un sous-espace vectoriel $\vec{E}'$ de $\vec{E}$ et un sous-espace vectoriel $\vec{E}''^*$ de $\vec{E}^*$ (dont les dimensions ont pour somme $n + 1$), de façon que

$$\begin{cases} \vec{E}''^* \text{ est l'ensemble des formes } g \text{ telles que : } \forall \vec{X} \in \vec{E}', \quad g(\vec{X}) = 0 \\ \vec{E}' \text{ est l'ensemble des vecteurs } \vec{X} \text{ tels que : } \forall g \in \vec{E}''^*, \ g(\vec{X}) = 0. \end{cases}$$

En passant des sous-espaces vectoriels aux variétés linéaires projectives qui en sont issues, nous constatons que nous savons associer biunivoquement une variété linéaire projective $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ et une variété linéaire projective $\mathcal{E}''^*$ de $\mathcal{E}^*$ (dont les dimensions ont pour somme $n - 1$), de façon que (2)

$$\begin{cases} \mathcal{E}''^* \text{ est l'ensemble des images par la bijection } \delta \text{ des hyperplans de } \mathcal{E} \text{ qui contiennent } \mathcal{E}'. \\ \mathcal{E}' \text{ est l'intersection des hyperplans de } \mathcal{E} \text{ dont l'image par } \delta \text{ constitue } \mathcal{E}''^*. \end{cases}$$

---

(1) Le mot *gerbe* est utilisé ici, à propos de quatre hyperplans d'un faisceau, de la même façon que le mot *division* a été utilisé à propos de quatre points d'une droite projective; le programme emploie aussi l'expression « faisceau harmonique » à propos de droites et de plans.

(2) Le lecteur observera que $\mathcal{E}'$, considéré comme un espace projectif autonome, admet un espace vectoriel dual, qui a la même dimension que lui, et qui n'est naturellement pas $\mathcal{E}''^*$.

Nous constatons que

$$\dim \mathfrak{L}''^* = 1 \text{ (resp. 2)} \iff \dim \mathfrak{L}' = n - 2 \text{ (resp. } n - 3).$$

Autrement dit :

THÉORÈME. — **Dans un espace projectif $\mathfrak{L}$ de dimension finie n, un faisceau linéaire (resp. réseau linéaire) d'hyperplans** est la famille des hyperplans qui contiennent **une variété linéaire donnée de $\mathfrak{L}$, de dimension $n - 2$ (resp. $n - 3$).**

C'est ainsi que :

THÉORÈME. — **Dans un espace projectif de dimension 3, un faisceau linéaire** (resp. réseau linéaire) **de plans est la famille des plans qui passent par une droite donnée** (resp. un point donné).

THÉORÈME. — **Dans un espace projectif de dimension 2, un faisceau linéaire de droites est la famille des droites qui passent par un point donné.**

2° **Repères duaux.** — DÉFINITION. — **Les repères $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ des espaces projectifs duaux $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ (de dimension finie n) sont dits duaux si on peut les déduire de bases duales $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ des espaces vectoriels duaux $\vec{E}$ et $\vec{E}^*$ dont $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ sont issus,**

Étant donné un repère $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{L}$ il existe un, et un seul, repère dual $\mathfrak{R}^*$ de $\mathfrak{L}^*$.

En effet $\mathfrak{R}$ détermine (79) une base $\mathcal{E}$ de $\vec{E}$ et, à une homothétie près, une seule; de $\mathcal{E}$ on déduit une base duale $\mathcal{E}^*$ de $\vec{E}^*$ définie, elle aussi, à une homothétie près; d'où un repère $\mathfrak{R}^*$ et un seul.

APPLICATION PRATIQUE. — *a) Supposons* $n = 3$; nous obtiendrons $\mathfrak{R}^*$, dual du repère $\mathfrak{R}$ défini au n° 80, en transformant par la bijection δ d'une part les faces du tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$, c'est-à-dire les plans.

F_1, déterminé par les points $A_2A_3A_4$, dont une équation est $X = 0$,

. . . .

F_4, déterminé par les points $A_1A_2A_3$, dont une équation est $T = 0$,
d'autre part, le *plan unitaire*, Φ, dont une équation est $X + Y + Z + T = 0$.

Notons que Φ se construit, à partir du point unitaire ω de $\mathfrak{R}$, en remarquant qu'il passe par le point B', conjugué harmonique par rapport à A_1 et A_2 du point d'intersection ω' de la droite A_1A_2 et du plan $A_3A_4\,\omega$.

En effet la droite A_1A_2 a pour équations $Z = 0$ et $T = 0$; on a

$$A_1\,(1, 0, 0, 0), \quad A_2\,(0, 1, 0, 0), \quad \omega'\,(1, 1, 0, 0) \implies B'\,(1, -1, 0, 0),$$

ce qui prouve que B' appartient au plan d'équation $X + Y + Z + T = 0$.

En utilisant trois arêtes de $\mathfrak{T}$, on obtient ainsi trois points de Φ, linéairement indépendants, ce qui détermine Φ.

b) Supposons $n = 2$; $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des sommets A_1, A_2, A_3 d'un *triangle de référence* $\mathfrak{T}$, et d'un point unitaire ω. On obtient $\mathfrak{R}^*$ en transformant par la bijection δ, d'une part les côtés de $\mathfrak{T}$, d'autre part la *droite* unitaire Φ qui contient le conjugué harmonique C_3 (resp. C_1) par rapport à A_1 et A_2 (resp. A_2 et A_3) du point d'intersection de A_1A_2 avec $A_3\,\omega$ (resp. de A_2A_3 avec $A_1\,\omega$).

3° **Coordonnées (tangentielles) d'un hyperplan de $\mathfrak{L}$.** — Soient

$$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n+1}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$$

avec $\varphi_j(\vec{e}_i) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)

des bases duales de $\vec{E}$ et $\vec{E}^*$.

Le vecteur générique $\vec{M}$ de $\vec{E}$ et la forme générique h de $\vec{E}^*$ s'écrivent respectivement

$$(1) \qquad \vec{M} = \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e}_i X_i \quad \text{et} \quad h = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \varphi_j.$$

Les $n + 1$ scalaires X_i constituent un système de coordonnées homogènes, dans la base $\mathcal{E}$ ou dans le repère $\mathfrak{R}$, du point M de $\mathfrak{L}$ dont $\vec{M}$, supposé non nul, est un représentant homogène dans $\vec{E}^\bullet$; nous avons introduit la matrice unicolonne

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n+1} \end{bmatrix}$$

De la même façon, nous repérerons un hyperplan H de $\mathfrak{L}$ par l'une quelconque de ses équations $h(\vec{M}) = 0$ ou encore, du fait de l'homogénéité, par les $n + 1$ coordonnées u_j de la forme linéaire h dans la base $\mathcal{E}^*$ de $\vec{E}^*$. Nous dirons que les $n + 1$ scalaires u_j de K, non tous nuls, sont les coordonnées de l'hyperplan H de $\mathfrak{L}$ dans la base $\mathcal{E}$ ou dans le repère $\mathfrak{R}$ (en ajoutant parfois l'adjectif *tangentielles*) et nous introduirons la matrice uniligne

$$\mathcal{H} = [u_1 \ldots u_{n+1}].$$

Autrement dit :

DÉFINITION. — **Soit H un hyperplan de $\mathfrak{L}$ et δ (H) l'élément de $\mathfrak{L}^*$ qui lui est associé par la bijection canonique de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{L}^*$. On appelle coordonnées (tangentielles) de H, par rapport à un repère $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{L}$, les coordonnées de δ (H) dans le repère $\mathfrak{R}^*$ dual de $\mathfrak{R}$.**

4° **Changement de coordonnées.** — Rappelons (7) que, quand on passe du premier couple ($\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^*$) au second couple ($\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'^*$) de bases duales de $\vec{E}$ et $\vec{E}^*$ les matrices de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et de $\mathcal{E}^*$ à $\mathcal{E}'^*$ sont inverses l'une de l'autre, selon le schéma

$$\vec{e}_i \overset{\vec{e}'_j}{\boxed{[p_{ij}]}} = P \qquad P^{-1} = \overset{\varphi_i}{\boxed{[q_{ji}]}}\, \varphi'_j;$$

les formules de changement de coordonnées pour un point M et un hyperplan H s'écrivent donc

$$\mathcal{M} = \mathrm{P}\mathcal{M}' \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}'\mathrm{P}^{-1}.$$

5° **Étude du rang d'un système d'hyperplans** $\mathcal{G} = \{ \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_p \}$. —

a) Soit $\qquad \mathcal{H}_i = [u_{i,1} \ldots u_{i,n+1}]$

une matrice uniligne formée de coordonnées homogènes de l'hyperplan H_i dans le repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{L}$. C'est que

$$\mathrm{M} \in \mathrm{H}_i \iff h_i(\vec{\mathrm{M}}) = 0 \quad \text{avec} \quad h_i(\vec{\mathrm{M}}) = u_{i,1}\,\mathrm{X}_1 + \ldots + u_{i,n+1}\,\mathrm{X}_{n+1}.$$

On sait que le rang r du système d'hyperplans $\mathcal{G}$ est le rang du système de formes linéaires $\{ h_1, \ldots, h_p \}$. Il en résulte que r est le rang de la matrice $(p, n+1)$

$$\omega = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \ldots & u_{1,n+1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ u_{p,1} & \ldots & u_{p,n+1} \end{bmatrix} \quad \text{qui s'écrit symboliquement} \quad \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{H}_p \end{bmatrix}$$

b) L'intersection des hyperplans H_i est la partie $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ qui est issue de la partie $\vec{\mathrm{E}}'$ de $\vec{\mathrm{E}}$ formée par les solutions $\vec{\mathrm{M}}$ du système

$$\begin{cases} h_1(\vec{\mathrm{M}}) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_p(\vec{\mathrm{M}}) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_{1,1}\,\mathrm{X}_1 + \ldots + u_{1,n+1}\,\mathrm{X}_{n+1} = 0. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{p,1}\,\mathrm{X}_1 + \ldots + u_{p,n+1}\,\mathrm{X}_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Nous constatons qu'il s'agit d'un système de p équations linéaires homogènes à $n + 1$ inconnues, dont le rang est celui de la matrice ω, soit r. D'après l'étude faite au n° **216**, 3° du tome I, $\vec{\mathrm{E}}'$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathrm{E}}$ dont la dimension est $n + 1 - r$; $\mathcal{L}'$ est donc une variété linéaire projective de $\mathcal{L}$, de dimension $n - r$.

Énonçons :

<u>Théorème.</u> — **Si p hyperplans de l'espace projectif $\mathcal{L}$, de dimension n, forment un système de rang r, leur intersection est une variété linéaire projective de $\mathcal{L}$, de dimension $n - r$.**

On peut retrouver cette proposition en utilisant l'étude faite au 1° : les p éléments $\delta(\mathrm{H}_i)$ de $\mathcal{L}^*$ engendrent une variété linéaire projective de $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}''^*$, dont la dimension est $r - 1$.

96. ***Corrélation.*** — 1° Définition. — **On appelle corrélation toute application homographique d'un espace projectif $\mathcal{L}$, de dimension finie n, sur son dual $\mathcal{L}^*$.**

Rapportons $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ à des repères duaux $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$. Une corrélation c est alors représentée par une matrice régulière $\mathcal{C}$ d'ordre $n + 1$.

Au point générique M de $\mathcal{L}$, de coordonnées homogènes X_i, correspond l'élément c (M) de $\mathcal{L}^*$ (ou encore l'hyperplan δ^{-1} [c (M)]) de coordonnées homogènes u_i telles que

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \mathcal{C} \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n+1} \end{bmatrix}$$

En utilisant les notations du paragraphe précédent, (1) s'écrit

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{C}\mathcal{M} \iff \mathcal{H} = \tilde{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{C}}.$$

2° **Propriétés des corrélations.** — *a*) Une corrélation transforme toute variété linéaire de $\mathcal{L}$ en une variété linéaire de $\mathcal{L}^*$ de même dimension.

b) *Une corrélation conserve le birapport* : quatre points $M_k (k = 1, 2, 3, 4)$ d'une droite de $\mathcal{L}$ sont transformés en les images par δ de quatre hyperplans H_k d'un faisceau de $\mathcal{L}$, tels que

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4).$$

97. ***Propriétés projectives.*** — 1° **Définition.** — Une propriété qui fait intervenir des variétés linéaires $\mathcal{L}_i$ d'un espace projectif $\mathcal{L}$ est dite *projective* si elle est vérifiée par les variétés linéaires homologues des $\mathcal{L}_i$ dans toute application homographique de $\mathcal{L}$ sur lui-même.

C'est ainsi que l'*appartenance* (et en particulier l'*alignement*), l'*intersection*, le *birapport* sont des propriétés projectives.

2° **Propriétés corrélatives.** — Soit Π une propriété projective d'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}$ formée de variétés linéaires (on dit que $\mathcal{F}$ est une *figure* de $\mathcal{L}$). Une corrélation transforme $\mathcal{F}$ en une figure $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{L}^*$ qui possède une propriété projective Π^* : celle-ci est dite *corrélative de* Π.

L'intérêt pratique de la notion de propriétés corrélatives est le suivant : il suffit de démontrer que $\mathcal{F}$ possède Π (resp. $\mathcal{F}^*$ possède Π^*) pour être en droit d'affirmer que $\mathcal{F}^*$ possède Π^* (resp. $\mathcal{F}$ possède Π).

3° **Courbe unicursale. Tangente. Plan osculateur.** — Soit $\mathcal{L}$ un espace projectif de dimension finie n, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, sur un corps K.

Soient $X_j(u)$, $(j = 1, \ldots, n + 1)$, des polynômes sur K, à l'indéterminée u, premiers

entre eux dans leur ensemble. Ils ne prennent pas simultanément la valeur 0, si bien que, $\mathcal{R}$ étant un repère arbitrairement choisi de $\mathcal{L}$, la matrice

$$\mathcal{M}(u) \doteq \begin{bmatrix} X_1(u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n+1}(u) \end{bmatrix}$$

représente, pour toute valeur de u, un point $M(u)$. La partie, Γ, de $\mathcal{L}$ qui est engendrée par $M(u)$ quand u parcourt K est appelée *courbe unicursale.*

Désignons par $\mathcal{M}^{(m)}(u)$ la matrice unicolonne dont les éléments sont les dérivées d'ordre m des polynômes $X_j(u)$.

Pour une valeur donnée de u, on peut (sauf exception) déterminer p et q $(p < q)$ comme étant les plus petits entiers tels que les matrices

$$[\mathcal{M}(u), \mathcal{M}^{(p)}(u)] \qquad \text{et} \qquad [\mathcal{M}(u), \mathcal{M}^{(p)}(u), \mathcal{M}^{(q)}(u)]$$

admettent les rangs respectifs 2 et 3. En général on a : $p = 1$, $q = 2$.

La condition précédente implique que $\mathcal{M}^{(p)}(u)$ et $\mathcal{M}^{(q)}(u)$ ne sont pas formés exclusivement de 0, c'est-à-dire qu'elles représentent, dans $\mathcal{R}$, deux points $M^{(p)}(u)$ et $M^{(q)}(u)$ de $\mathcal{L}$; ces points sont dits points dérivés d'ordre p, pour la valeur u. Par définition on appelle :

tangente à Γ *au point* $M(u)$: la droite définie par les points, linéairement indépendants, $M(u)$ et $M^{(p)}(u)$.

plan osculateur à Γ *au point* $M(u)$: le plan défini par les points, linéairement indépendants, $M(u)$, $M^{(p)}(u)$, $M^{(q)}(u)$.

a) Ces éléments sont indépendants du choix du repère $\mathcal{R}$. En effet, si nous effectuons un changement de repère, la matrice $\mathcal{M}(u)$ est multipliée à gauche par une matrice régulière P; on en déduit aisément qu'il en est de même pour $\mathcal{M}^{(m)}(u)$, que p et q ne changent pas, enfin, que les points $M^{(p)}(u)$ et $M^{(q)}(u)$ ne changent pas.

b) Il s'agit d'une propriété projective. En effet si on effectue une transformation homographique, h, de matrice régulière $\mathcal{H}$, on constate — comme en *a*) — que p et q ne changent pas et que $M(u)$, $M^p(u)$, $M^q(u)$ sont tous trois transformés par h.

Nous montrerons au n° 20 du tome IV que, dans le cas particulier où $\mathcal{L}$ est la complétion projective d'un espace affine réel, de dimension 3, la tangente qui vient d'être définie ici n'est autre (pour un point à distance finie) que la tangente définie en géométrie affine au n° 12 du tome IV. Le même raisonnement permet de montrer que le plan osculateur qui vient d'être défini ici est le plan osculateur défini en géométrie affine au n° 32 du tome IV. Enfin l'étude s'étend à des « courbes non unicursales ».

EXERCICES

1. — *a*) On considère un système $\mathcal{S}$ de quatre points d'une droite projective $\mathcal{L}$. Montrer qu'il existe en général quatre applications homographiques de $\mathcal{L}$ sur elle-même qui conservent $\mathcal{S}$, dans son ensemble; étudier le cas d'exception.

b) Étudier les applications homographiques qui conservent globalement trois points donnés de $\mathcal{L}$.

2. — On donne une application homographique h de la droite projective $\mathcal{L}$ sur elle-même qui admet un, et un seul, point invariant P; montrer que, M désignant le point générique de $\mathcal{L}$:

$$(P, M, h^{-1}(M), h(M)) = -1.$$

3. — Une application homographique h de $\tilde{\mathbb{C}}$ sur lui-même transforme x en x_1, x_1 en x_2, ..., x_{n-1} en x_n. Déterminer h pour que :

$$\forall x \in \tilde{\mathbb{C}}, \qquad x_n = x.$$

4. — Étant donnés les quatre éléments deux à deux distincts, a, b, c, d de $\tilde{\mathbb{C}}$, on désigne par $\mathfrak{J}$ l'involution qui transforme a en b et c en d, par $\mathfrak{J}'$ l'involution qui transforme a en c et b en d. Montrer que les éléments invariants de $\mathfrak{J}$ sont conjugués harmoniques par rapport à ceux de $\mathfrak{J}'$.

5. — Étudier le produit de deux involutions sur une droite projective complexe; trouver une condition pour que ce soit une involution.

6. — On donne une application homographique h d'une droite projective $\mathfrak{L}$ sur elle-même.

a) On suppose que h admet deux points invariants distincts P et Q. Montrer qu'il existe, une, et une seule, involution $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{L}$ qui commute avec h.

Montrer que, M désignant le point générique de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{J}(M)$ est le conjugué harmonique de M par rapport aux points $h(M)$ et $h^{-1}(M)$.

b) On suppose que h admet deux points invariants confondus. Montrer qu'il n'existe aucune involution de $\mathfrak{L}$ qui commute avec h.

7. — Étant donnés quatre points P, Q, R, S d'une droite projective complexe $\mathfrak{L}$, on désigne par $\mathcal{H}[P, Q; R, S]$ toute application homographique de $\mathfrak{L}$ sur elle-même transformant P en Q et R en S.

On donne les points A, A', B, B' de $\mathfrak{L}$.

a) Démontrer que les points invariants des homographies $\mathcal{H}[A, A'; B, B']$ se correspondent dans une involution $\mathfrak{J}$, ainsi que ceux des homographies $\mathcal{H}[A, B; A', B']$.

b) Les points invariants des homographies $\mathcal{H}[A, B'; B, A']$ et ceux des homographies $\mathcal{H}[A', B; B', A]$ se correspondent de même dans une involution $\mathcal{J}$. Étudier l'homographie $\mathfrak{J} \circ \mathcal{J}$.

8. — On considère la suite de nombres complexes déterminée par la donnée de $x_0 = x$ et par la relation de récurrence

$$x_n x_{n-1} - 2\alpha x_n - 2\beta x_{n-1} + 2(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Démontrer que $x + x_1 + x_2 + x_3$ est une fraction rationnelle en x qui reste invariante par trois substitutions homographiques.

9. — Étant donnée l'application homographique h de la droite projective complexe $\mathfrak{L}$ sur elle-même, montrer qu'il existe une infinité de couples $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ d'involutions de $\mathfrak{L}$ telles que : $h = \mathfrak{J}' \circ \mathfrak{J}$.

10. — Deux points M et M' décrivent deux divisions homographiques dont les bases sont dans un même plan projectif $\mathfrak{L}$. Comment faut-il choisir un point S dans $\mathfrak{L}$ pour que les droites SM, SM' décrivent deux faisceaux en involution?

11. — Les trois couples (x, x'), (y, y'), (z, z') appartiennent à une même involution $\mathfrak{J}$ sur $\tilde{\mathbb{C}}$ si, et seulement si,

$$(x, x', y, z) - (x', x, y', z') = 0.$$

Le premier membre est divisible par $x' - x$; montrer que le quotient peut se mettre sous forme d'un déterminant d'ordre 3 par rapport aux fonctions symétriques élémentaires des trois couples donnés.

12. — Pour que les racines des équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0, \qquad a''x^2 + b''x + c'' = 0$$

forment trois couples d'une involution sur $\tilde{C}$, il faut et il suffit que le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

soit nul. Soit Δ l'adjoint de δ; ses éléments étant désignés par des majuscules, démontrer que l'équation de l'involution peut s'écrire

$$CXX' - B(X + X') + A = 0.$$

13. — On donne trois points A, B, C d'une droite affine D. Déterminer une translation qui transforme A, B, C en trois points A', B', C' tels que les couples (A', B), (B', C), (C', A) appartiennent à une même involution de la complétion projective de D.

14. — Soit h_i, $(i = 1, 2, 3)$, trois applications homographiques de $\tilde{C}$ sur lui-même qui ont en commun un élément invariant p; on désigne par q_i l'autre élément invariant de h_i, et par (x_i, x_i') le couple commun à h_α et h_β $(\alpha \neq i, \beta \neq i)$.

Démontrer que les trois couples (x_i, q_i) se correspondent dans une même involution ainsi que les trois couples (x_i', q_i).

15. — Soit h une application homographique de $\tilde{C}$ sur lui-même, qui admet deux éléments invariants distincts p et q. L'équation non homogène de h peut s'écrire sous l'une et l'autre des formes

$$xy - \alpha x - \beta y + \gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x' - p}{x' - q} = k\frac{x - p}{x - q}.$$

a) Montrer que k est racine d'une équation du second degré de la forme

$$k^2 - \Omega k + 1 = 0,$$

dans laquelle Ω désigne une fraction rationnelle en α, β, γ.

b) Déterminer γ en fonction de α et β de manière que

$$h^3 = e \quad \text{ou} \quad h^4 = e \quad \text{ou} \quad h^6 = e \qquad (e : \text{application identique de } \tilde{C}).$$

$$\left(\text{Réponses : } \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2;\ \ \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2;\ \ \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\right).$$

16. — Dans un plan projectif, une droite Δ coupe les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC aux points α, β, γ. Soient α', β', γ' les homologues de α, β, γ dans une involution de Δ. Montrer que les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont concourantes.

17. — Dans un plan projectif, une droite Δ coupe les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC aux points A', B', C'. Montrer que les trois couples de droites (PA, PA'), (PB, PB'), (PC, PC') sont homologues dans une même involution du faisceau de droites dont le point fixe est P.

18. — On se place dans la complétion projective d'un espace affine euclidien.

Soient deux droites, Δ, Δ' distinctes ou confondues; on définit une application homographique de Δ sur Δ' en donnant les points A', B', C' de Δ' qui correspondent à trois points A, B, C donnés sur Δ. Construire le point homologue d'un point quelconque M de Δ en utilisant une division déduite de celle portée par Δ' au moyen d'un déplacement qui amène A' en A. En supposant Δ et Δ' confondues peut-on trouver ainsi les points invariants des divisions homographiques données? Appliquer une méthode analogue à la construction des rayons homologues de deux faisceaux homographiques définis par trois couples de rayons et à la construction des rayons invariants dans le cas où les deux faisceaux sont dans le même plan et ont même sommet.

19. — *a*) Si les n sommets d'un polygone décrivent n droites fixes concourantes situées dans un plan tandis que les droites portant $n - 1$ des côtés passant par des points fixes, la droite qui porte le n-ième côté passe aussi par un point fixe.

b) Si les droites portant les n côtés d'un polygone situé dans un plan passant par n points alignés tandis que $n - 1$ sommets décrivent des droites fixes, le n-ième sommet décrit aussi une droite.

20. — Dans un plan projectif rapporté à un repère, déterminer une application homographique h qui conserve le point (0, 0, 1) et la droite $T = 0$, de façon que, d'autre part, h^2 transforme les points (1, 2, 1) et (15, 16, 1) respectivement en les points (0, 1, 1) et (6, 7, 1).

21. — On dit qu'une application homographique h d'un plan projectif $\mathfrak{P}$ sur lui-même est du type Σ s'il existe trois points non alignés A, B, C tels que les points h (A), h (B), h (C) soient respectivement situés sur les droites BC, CA, AB.

a) Démontrer qu'une application homographique est du type Σ si la matrice (3, 3) qui la représente dans un repère quelconque a une trace nulle.

Étudier la réciproque.

b) Démontrer que, si h est une application homographique du type Σ, les points h (M), h^2 (M), h^4(M) sont alignés, quel que soit le point M de $\mathfrak{P}$.

22. — Soient $\mathfrak{P}$ un plan projectif complexe et h l'application homographique de $\mathfrak{P}$ sur lui-même telle que, dans un repère donné $\mathfrak{R}$, le point $M' = h$ (M) soit déterminé par

$$\begin{cases} X' = Y + T \\ Y' = T + X \\ T' = X + Y \end{cases}$$

Trouver les points invariants de h; donner une définition géométrique de la transformation; écrire la matrice qui représente h dans un nouveau repère $\mathfrak{R}'$, choisi de façon que les sommets du triangle de référence soient des points invariants de h.

Application. — Trouver tous les polynômes F (X, Y, T), à coefficients complexes, tels qu'il existe une constante k assurant l'égalité entre polynômes :

$$F(Y + T, T + X, X + Y) = k\,F(X, Y, T).$$

23. — Dans un plan projectif complexe, toute application homographique et involutive, non identique, est une homologie harmonique.

24. — Dans un espace projectif complexe de dimension 3 on donne deux points S et S' et deux plans $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ tels que : $S \in \mathfrak{Q}'$, $S \notin \mathfrak{Q}$, $S' \in \mathfrak{Q}$, $S' \notin \mathfrak{Q}'$.

On désigne par h (resp. h') l'homologie harmonique dont les éléments invariants sont S et $\mathfrak{Q}$ (resp. S' et $\mathfrak{Q}'$). Montrer que $h' \circ h$ est une homologie harmonique biaxiale.

25. — Soit h une application homographique d'un espace projectif complexe de dimension 3 sur lui-même. S'il existe une droite invariante point par point, il existe un faisceau de plans invariants globalement, et réciproquement.

26*. — On donne, dans un plan projectif réel, un triangle ABC. Utiliser une transformation homographique pour déterminer les courbes Γ satisfaisant à la condition suivante : quel que soit le point M de Γ, la tangente en M à Γ rencontre les droites BC, CA, AB en des points α, β, γ tels que $(\alpha, \beta, \gamma, M) = k$, k étant un nombre réel donné. Cas particulier $k = -1$.

CHAPITRE VIII

LIAISON ENTRE ESPACES AFFINES ET ESPACES PROJECTIFS

98. ***Structure affine sur le complémentaire d'un hyperplan dans un espace projectif.*** — 1° **Données.** — Nous partons d'un ensemble qui sera considéré tantôt comme un espace vectoriel $\vec{G}$, sur un corps K, tantôt comme l'espace affine G obtenu en munissant $\vec{G}$ de sa structure affine canonique (49). Nous désignons par :

$\mathcal{L}$: l'espace projectif qui est issu de $\vec{G}$,

$\vec{F}$: un hyperplan, donné, de $\vec{G}$,

$\mathcal{H}$: l'hyperplan projectif de $\mathcal{L}$ qui est issu de $\vec{F}$,

$\mathcal{Q}$: le complémentaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$.

Notons que $\mathcal{Q}$ n'est pas une variété linéaire projective de $\mathcal{L}$.

2° **Structure affine sur** $\mathcal{Q}$. — Choisissons arbitrairement un vecteur $\vec{\omega}$ non nul de $\vec{G}$, n'appartenant pas à $\vec{F}$. Le sous-espace vectoriel de $\vec{G}$ engendré par $\vec{\omega}$ est supplémentaire de $\vec{F}$; tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{G}$ s'écrit, d'une façon et d'une seule

$$\vec{X} = k\vec{\omega} + \vec{X}', \qquad k \in K, \qquad \vec{X}' \in \vec{F}.$$

Le vecteur $\vec{X}$ est un représentant homogène d'un point de $\mathcal{Q}$ si, et seulement si, $k \neq 0$, ce qui entraîne qu'un autre représentant du même point de $\mathcal{Q}$ est

$$\vec{\omega} + \frac{1}{k}\vec{X}'.$$

Autrement dit, tout point $\mathcal{M}$ de $\mathcal{Q}$ admet un, et un seul, représentant de la forme

$$(1) \qquad \vec{m} = \vec{\omega} + \vec{\mu}, \qquad \vec{\mu} \in \vec{F}.$$

Inversement tout vecteur de la forme (1) appartient à $\vec{G}$ et représente un point de $\mathcal{Q}$.

Cela posé, associons au bipoint générique ($\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$) de $\mathcal{Q}$ la différence de leurs représentants de la forme (1), $\vec{m} = \vec{\omega} + \vec{\mu}$ et $\vec{m}' = \vec{\omega} + \vec{\mu}'$. Nous définissons ainsi une application de $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ dans $\vec{F}$:

$$(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \longrightarrow \vec{\mu}' - \vec{\mu} \qquad \left(\text{vecteur désigné par } \overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}'}\right).$$

Montrons que cette application vérifie les axiomes de structure d'espace affine.

I. Étant donnés $\mathcal{M} \in \mathcal{Q}$ et $\vec{T} \in \vec{F}$, il existe un point $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{Q}$ tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}'} = \vec{T}$. Ce point $\mathcal{M}'$ est représenté par $\vec{\omega} + \vec{\mu} + \vec{T}$.

II. $\overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}'} = \vec{0}$ ou $\vec{\mu}' - \vec{\mu} = \vec{0}$ entraîne $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

III. $\left(\vec{\mu}' - \vec{\mu}\right) + \left(\vec{\mu}'' - \vec{\mu}'\right) = \vec{\mu}'' - \vec{\mu}$ s'écrit $\overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}'} + \overrightarrow{\mathcal{M}'\mathcal{M}''} = \overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}''}$.

Autrement dit, $\mathcal{Q}$ peut être considéré comme un espace affine associé à l'espace vectoriel $\vec{F}$. Nous sommes en mesure d'énoncer :

<u>Théorème.</u> — **Dans tout espace projectif, le complémentaire d'un hyperplan peut être muni d'une structure affine.**

3° **Bijection de $\mathcal{Q}$ sur un hyperplan affine de** G. — En considérant $\vec{m}$ et $\vec{\omega}$ non plus comme des vecteurs de $\vec{G}$, mais comme des points, m et ω, de l'espace affine G, la relation (1) s'écrit

$$(2) \qquad m = \omega + \vec{\mu}, \qquad \vec{\mu} \in \vec{F}.$$

Quand, ω étant fixe, $\vec{\mu}$ parcourt $\vec{F}$, le point m engendre l'hyperplan affine E de G qui contient ω et admet $\vec{F}$ pour direction. L'étude du 2° nous apprend qu'il existe une bijection

$$\mathcal{M} \in \mathcal{Q} \quad \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \quad m \in \text{E}.$$

On peut mettre en évidence cette bijection, sans utiliser le point ω, en remarquant qu'à tout point $\mathcal{M}$ de $\mathcal{Q}$ on peut associer biunivoquement la droite (M) de G, issue de l'origine affine O, constituée par O et par les représentants homogènes $\vec{M}$ de $\mathcal{M}$ dans $\vec{G}$ et constater que

$$\mathcal{M} \in \mathcal{Q} \iff \mathcal{M} \notin \mathcal{H} \iff \vec{M} \notin \vec{F}$$

ou encore que

$$\mathcal{M} \in \mathcal{Q} \iff \begin{cases} \text{(M) n'est pas parallèle à E} \\ \text{ou (M) coupe E en un, et un seul, point.} \end{cases}$$

Cela pose [1] : *a*) A tout point $\mathcal{M}$ de $\mathcal{Q}$ nous pouvons associer le point d'intersection *m* de la droite (M) et de l'hyperplan E de G. Nous définissons ainsi l'application φ de $\mathcal{Q}$ dans E : $m = \varphi(\mathcal{M})$.

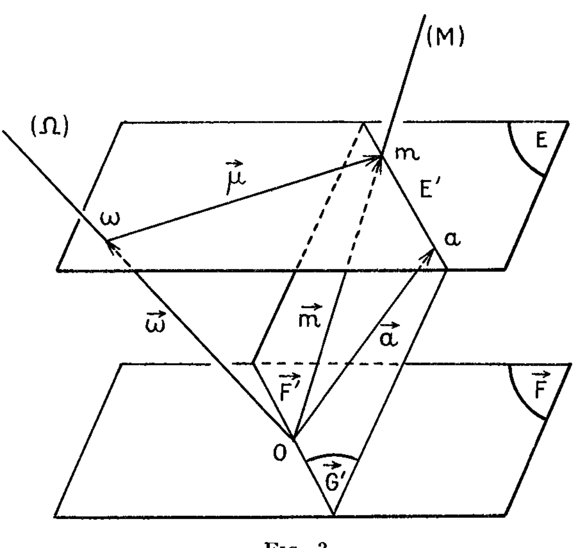


FIG. 3.

b) Inversement tout point *m* de E est l'image par φ d'un, et d'un seul, point de $\mathcal{Q}$, le point $\mathcal{M}$ qui est associé à la droite (M) $=$ O*m* de G; en effet cette droite n'est pas parallèle à E.

Le caractère bijectif de l'application φ est ainsi établi. En reprenant le résultat obtenu au 2°, nous dirons que *la bijection φ permet de transférer à $\mathcal{Q}$ la structure affine de* E.

99. *Complétion projective d'un espace affine.* — Nous partons, cette fois, d'un espace affine E attaché à un espace vectoriel $\vec{F}$, sur un corps K.

Nous allons construire un espace projectif $\mathcal{L}$ et un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$ tels que nous nous retrouvions dans la situation du n° **98.**

Soit $\vec{G}$ l'ensemble, $\vec{F} \times K$, des couples

$$\left(\vec{\mu}, \lambda\right), \qquad \vec{\mu} \in \vec{F}, \qquad \lambda \in K.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\vec{G}$, muni des deux lois

$$\left(\vec{\mu}, \lambda\right) + \left(\vec{\mu}', \lambda'\right) = \left(\vec{\mu} + \vec{\mu}', \lambda + \lambda'\right)$$
$$\alpha\left(\vec{\mu}, \lambda\right) = \left(\alpha\vec{\mu}, \alpha\lambda\right),$$

(1) Le lecteur pourra utiliser la figure n° 3, faite dans le cas où l'espace vectoriel $\vec{G}$ est de dimension trois.

possède une structure d'espace vectoriel sur K, que la partie, $\vec{F} \times \{0\}$, de $\vec{G}$, (formée des éléments pour lesquels $\lambda = 0$), est un sous-espace vectoriel de $\vec{G}$, enfin que la bijection qui associe

$$\vec{\mu} \in \vec{F} \longleftrightarrow (\vec{\mu}, 0) \in \vec{F} \times \{0\}$$

est un isomorphisme entre espaces vectoriels.

Cet isomorphisme nous autorise à *identifier* (c'est-à-dire à représenter par un même symbole) un élément de $\vec{F} \times \{0\}$ et celui qui lui correspond dans $\vec{F}$; $(\vec{\mu}, 0)$ et $\vec{F} \times \{0\}$ seront respectivement désignés par $\vec{\mu}$ et $\vec{F}$.

Dans $\vec{G}$, $\vec{F} \times \{0\}$ admet pour sous-espace supplémentaire $\{\vec{0}\} \times K$, dont la dimension est un; on peut donc considérer $\vec{F}$ comme un hyperplan de $\vec{G}$.

La partie, $\vec{F} \times \{1\}$ de $\vec{G}$, (formée des éléments dans lesquels $\lambda = 1$), n'est pas un sous-espace vectoriel de $\vec{G}$; en revanche, on peut la considérer comme une variété linéaire de l'espace affine G obtenu en munissant $\vec{G}$ de sa structure affine canonique; la direction de cette variété linéaire affine est $\vec{F}$.

ω désignant une origine arbitrairement choisie dans E, on constate que E et $\vec{F} \times \{1\}$ sont respectivement engendrés par le point $m = \omega + \vec{\mu}$ et par le couple $(\vec{\mu}, 1)$ quand $\vec{\mu}$ parcourt $\vec{F}$; d'où l'existence d'une bijection qui associe

$$(\vec{\mu}, 1) \in \vec{F} \times \{1\} \longleftrightarrow \omega + \vec{\mu} \in E.$$

Cet isomorphisme nous autorise à *identifier* (c'est-à-dire à représenter par le même symbole) un élément de $\vec{F} \times \{1\}$ et celui qui lui correspond dans E; $(\vec{\mu}, 1)$ et $\vec{F} \times \{1\}$ seront respectivement désignés par $\omega + \vec{\mu}$ et E.

Il suffit maintenant de désigner par $\mathcal{E}$ l'espace projectif qui est issu de l'espace vectoriel $\vec{G}$, par $\mathcal{H}$ l'hyperplan projectif de $\mathcal{E}$ qui est issu de l'hyperplan $\vec{F}$ de $\vec{G}$, enfin par $\mathcal{Q}$ le complémentaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}$ pour retrouver la situation du nº 98 : le point générique $\mathcal{M}$ de $\mathcal{Q}$ admet ici, parmi ses représentants homogènes, le vecteur $(\vec{\mu}, 1)$ de $\vec{G}$ et il existe une bijection φ de $\mathcal{Q}$ sur E qui associe à $\mathcal{M}$ le point $m = \omega + \vec{\mu}$ de E.

Nous dirons que l'espace projectif $\mathcal{E}$ a été *engendré par complétion* à partir de l'espace affine E, ou que l'espace affine E a été *plongé* dans l'espace projectif $\mathcal{E}$.

$\mathcal{H}$ est appelé *hyperplan à l'infini* de $\mathcal{E}$, et aussi de E (par abus de langage).

100. ***Liaison entre variétés linéaires affines et variétés linéaires projectives.*** — Nous reprenons les notations des nºs 98 et 99 (il est indifférent de supposer que le point de départ est $\mathcal{E}$ ou E). Nous allons montrer que l'application bijective φ de $\mathcal{Q}$ sur E permet de définir une bijection — qui sera dési-

gnée par θ — de l'ensemble des variétés linéaires projectives de $\mathcal{L}$ non contenues dans $\mathcal{H}$ sur l'ensemble des variétés linéaires affines de E.

a) *Partons d'abord d'une variété linéaire projective $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$*, issue d'un sous-espace vectoriel $\vec{G}'$ de $\vec{G}$; nous supposons que $\mathcal{L}'$ n'est pas contenue dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que $\vec{G}'$ n'est pas contenu dans $\vec{F}$. Posons :

$$\mathcal{L}' \cap \mathcal{H} = \mathcal{H}', \qquad \mathcal{L}' \cap \mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \qquad (\mathcal{Q}' \neq \emptyset).$$

$\mathcal{H}'$ est la variété linéaire de $\mathcal{L}$ qui est issue du sous-espace $\vec{F}' = \vec{G}' \cap \vec{F}$ de $\vec{G}$; $\mathcal{Q}'$ est le complémentaire de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{L}'$. L'image de $\mathcal{Q}'$ par la bijection φ est une partie non vide de E, que nous désignons par E'. Nous allons montrer que E' est une variété linéaire affine de E, que nous conviendrons de désigner par $E' = \theta(\mathcal{L}')$.

Pour cela, choisissons arbitrairement un point a de E', que nous pouvons considérer comme un vecteur $\vec{a}$ de $\vec{E}$ n'appartenant pas à $\vec{F}$. Soit $(\vec{A})$ le sous-espace vectoriel de $\vec{G}$, de dimension 1, dont une base est $\{\vec{a}\}$. Puisque le vecteur $\vec{a}$ n'appartient pas à $\vec{F}$, $(\vec{A})$ est un sous-espace supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{G}$; on a (I, 160)

$$\vec{G} = (\vec{A}) \oplus \vec{F}.$$

En particulier, tout vecteur de $\vec{G}'$ s'exprime, d'une façon et d'une seule, comme la somme d'un vecteur de $(\vec{A})$ et d'un vecteur de $\vec{F}$; ce dernier appartient à $\vec{G}' \cap \vec{F} = \vec{F}'$.

On a donc : $$\vec{G}' = (\vec{A}) \oplus \vec{F}'.$$

Autrement dit, $\vec{F}'$ est un hyperplan de l'espace vectoriel $\vec{G}'$ et $\mathcal{H}'$ est un hyperplan de l'espace projectif $\mathcal{L}'$; nous dirons que $\mathcal{H}'$ est l'hyperplan à l'infini de $\mathcal{L}'$.

Soit alors $\mathcal{M}$ un point de $\mathcal{Q}'$, $\vec{M}$ un de ses représentants homogènes.

$$\mathcal{M} \in \mathcal{Q}' \iff \left\{\begin{array}{l}\mathcal{M} \in \mathcal{L}' \\ \mathcal{M} \notin \mathcal{H}'\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}\vec{M} \in \vec{G}' \\ \vec{M} \notin \vec{F}'.\end{array}\right.$$

Par suite l'appartenance de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{Q}'$ est réalisée si, et seulement si, un représentant homogène $\vec{M}$ est de la forme

$$\vec{a} + \vec{\mu}, \qquad \vec{\mu} \in \vec{F}'.$$

Il en résulte que $E' = \theta(\mathcal{L}')$ est la variété linéaire affine de E qui contient le point a et admet $\vec{F}'$ pour direction.

b) Partons cette fois d'une variété linéaire E′ *de* E; E′ ne contient pas O puisque E ne le contient pas. Si $\vec{F}'$, sous-espace vectoriel de $\vec{F}$, est la direction de E′, E′ est engendré par le point

$$m = a + \vec{\mu} \begin{cases} a & \text{point de E}' \\ \vec{\mu} & \text{vecteur de } \vec{F}'. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse $\vec{Oa}$ ou $\vec{a}$ n'appartient pas à $\vec{F}$.

Analyse. — Supposons qu'il existe une variété linéaire projective $\mathcal{L}_1$ de $\mathcal{L}$ telle que $E' = \theta(\mathcal{L}_1)$. L'intersection de $\mathcal{L}_1$ avec $\mathcal{Q}$ est la partie $\varphi^{-1}(E')$ de $\mathcal{Q}$ qui est connue *a priori;* posons

$$\mathcal{Q}' = \varphi^{-1}(E').$$

$\mathcal{L}_1$ contient $\mathcal{Q}'$.

$\mathcal{L}_1$ est issue d'un sous-espace vectoriel $\vec{G}_1$ de $\vec{G}'$ qui contient l'ensemble des représentants homogènes des points de $\mathcal{Q}'$, et en particulier l'ensemble $\vec{E}'$ des vecteurs $\vec{m} = \vec{a} + \vec{\mu}$. $\left(E' \text{ et } \vec{E}'\right.$ désignant le même ensemble, considéré soit comme formé de points de G, soit comme formé de vecteurs de $\left.\vec{G}\right)$; $\vec{E}'$ est une partie de la somme directe

$$\vec{\Sigma} = (\vec{A}) \oplus \vec{F}',$$

où $(\vec{A})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\vec{G}$ engendré par $\vec{a}$;

$\vec{G}_1$ contient tout vecteur colinéaire à $\vec{a}$, et tout vecteur colinéaire aux vecteurs de $\vec{F}'$, par suite

$$\left.\begin{matrix} (\vec{A}) \subset \vec{G}_1 \\ (\vec{F}') \subset \vec{G}_1 \end{matrix}\right\} \implies \vec{\Sigma} \subseteq \vec{G}_1.$$

$\vec{\Sigma}$, intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $\vec{G}$ contenant $\vec{E}'$, est le plus petit sous-espace vectoriel de $\vec{G}$ contenant $\vec{E}'$ (tome I, n° 159).

Synthèse. — I) Soit alors $\mathcal{L}'$ la variété linéaire projective issue du sous-espace vectoriel $\vec{\Sigma}$.

Tout point $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}'$ admet des représentants homogènes de la forme

$$\rho\vec{a} + \vec{\mu} \qquad \rho \in K, \qquad \vec{\mu} \in \vec{F}'$$
$$\mathcal{M} \in \mathcal{H}' = \mathcal{L}' \cap \mathcal{H} \iff \rho = 0$$
$$\mathcal{M} \notin \mathcal{H}' \iff \rho \neq 0.$$

Un point $\mathcal{M}$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}'$ a un représentant homogène de la forme

$$\vec{m} = \vec{a} + \vec{V}, \qquad \vec{V} \in \vec{F}',$$

c'est donc que $\mathcal{M}$ appartient à $\mathcal{Q}'$.

$\mathcal{Q}'$ et $\mathcal{H}'$ sont complémentaires pour $\mathcal{L}'$, par suite

$$\theta(\mathcal{L}') = E'.$$

II) Si l'on considère une variété linéaire projective $\mathcal{L}_1$ issue d'un sous-espace vectoriel $\vec{G}_1$ dont $\vec{\Sigma}$ est un sous-espace strict, un point $\mathcal{M}_1$ de $\mathcal{L}_1$ a des représentants homogènes de la forme

$$\rho\vec{a} + \vec{\mu} + \vec{\nu}, \begin{cases} \vec{\nu} \notin (\vec{A}) \\ \vec{\nu} \notin \vec{F}'. \end{cases}$$

Avec $\rho \neq 0$, $\vec{\mu} = \vec{0}$, la bijection φ associe à $\mathcal{M}_1$ un point m_1 de E qui n'appartient pas à E', puisque $\overrightarrow{am_1}$ n'appartient pas à $\vec{F}'$. Par suite, $\mathcal{L}'$ est la seule variété linéaire projective de $\mathcal{L}$ dont l'image par l'application θ est E'.

c) En conclusion nous avons retrouvé avec

$$\mathcal{L}', \ \mathcal{H}' = \mathcal{L}' \cap \mathcal{H}, \ \mathcal{Q}' = \mathcal{L}' - \mathcal{H}', \ E' = \theta(\mathcal{L}')$$

la situation que nous avions initialement avec

$$\mathcal{L}, \quad \mathcal{H}, \quad \mathcal{Q}, \quad E.$$

Comme au n° 99 nous dirons, par abus de langage, que $\mathcal{H}'$ est l'intersection de E' et de l'hyperplan à l'infini de E.

En nous reportant aux définitions posées au n° **52**, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les deux théorèmes suivants :

<u>Théorème.</u> — **Deux variétés linéaires d'un espace affine E sont parallèles si, et seulement si, elles sont la même intersection avec l'hyperplan à l'infini de E.**

<u>Théorème.</u> — **Dans un espace affine E, une variété linéaire E' est parallèle à une variété linéaire E″ si, et seulement si, l'intersection de E' et de l'hyperplan à l'infini de E est une partie de l'intersection de E″ et de cet hyperplan à l'infini.**

En particulier, à condition d'adjoindre aux espaces affines E_2 et E_3, de dimensions 2 et 3, respectivement une droite à l'infini et un plan à l'infini, les résultats obtenus au n° **64** prennent la forme plus symétrique suivante :

<u>Théorème I.</u> — **Deux droites distinctes d'un espace affine de dimension deux ont en commun un point et un seul (ce point est à l'infini si les droites sont parallèles).**

<u>Théorème II.</u> — **Dans un espace affine de dimensions trois :**

α) un plan et une droite qui n'est pas contenue dans le plan ont en commun un point et un seul (ce point est à l'infini si la droite est parallèle au plan),

β) l'intersection de deux plans distincts est une droite (cette droite est à l'infini si les plans sont parallèles).

101. *Liaison entre applications affines et applications projectives.* — Nous reprenons les notations des nos 98 et 99. Nous allons montrer que l'application bijective φ de $\mathfrak{Q}$ sur E permet de définir une bijection — qui sera désignée par ψ — de l'ensemble des applications homographiques de $\mathfrak{L}$ sur lui-même qui conservent globalement $\mathcal{H}$, sur l'ensemble des applications affines bijectives de E sur lui-même.

a) Partons d'abord d'une application homographique h de $\mathfrak{L}$ sur lui-même, dans laquelle l'image de l'hyperplan à l'infini $\mathcal{H}$ est $\mathcal{H}$ lui-même.

h est obtenu, par passage aux quotients, à partir d'un automorphisme f de $\vec{G}$ qui conserve $\vec{F}$.

f étant bijectif, $$\vec{V} \in \vec{F} \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \vec{V}' \in \vec{F}$$

La restriction $\hat{f}$ de f à $\vec{F}$ est un automorphisme de $\vec{F}$.

Il en résulte, par l'absurde, que

$$\left.\begin{matrix}\vec{V} \in \vec{G} \\ \vec{V} \notin \vec{F}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \vec{V}' = f(\vec{V}) \left\{\begin{matrix}\in \vec{G} \\ \notin \vec{F}\end{matrix}\right.$$

Par suite $\mathfrak{Q}$ étant le complémentaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathfrak{L}$, l'image de $\mathfrak{Q}$ par h est $\mathfrak{Q}$ lui-même, et la restriction $\hat{h}$ de h à $\mathfrak{Q}$ est une bijection de $\mathfrak{Q}$ sur $\mathfrak{Q}$.

Il en résulte que $\varphi \circ \hat{h} \circ \varphi^{-1}$, qui est un produit de bijections, est une bijection de E sur lui-même; désignons-la par g et posons $g = \psi(h)$. Nous avons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \in \mathfrak{Q} & \xrightarrow{\hat{h}} & \mathcal{M}' \in \mathfrak{Q} \\ \uparrow \varphi^{-1} & & \downarrow \varphi \\ m \in E & \xrightarrow[g]{} & m' \in E \end{array}$$

Nous allons montrer que g est une application affine.

En désignant par m et ω respectivement le point générique de E et un point arbitrairement choisi de E, on a $m = \omega + \vec{\mu}$, $\vec{\mu}$ étant le vecteur générique de $\vec{F}$.

$\varphi^{-1}(m)$ est le point de $\mathfrak{Q}$ dont un représentant est le vecteur $\vec{m} = \vec{\omega} + \vec{\mu}$.

Par hypothèse, $\vec{m}$ et $\vec{\omega}$ n'appartiennent pas à $\vec{F}$.

$\hat{h}[\varphi^{-1}(m)]$ est le point de $\mathfrak{Q}$ dont un représentant est $\hat{f}(\vec{\omega} + \vec{\mu})$, vecteur qui s'écrit $f(\vec{\omega} + \vec{\mu})$ et aussi $f(\vec{\omega}) + \hat{f}(\vec{\mu})$.

Par hypothèse,

$$f(\vec{\omega}) \notin \vec{F} \quad \text{et} \quad \hat{f}(\vec{\mu}) \in \vec{F}.$$

La droite affine issue de O et dirigée par $f(\vec{\omega})$ perce E en un point ω_1, et comme l'automorphisme f n'est déterminé qu'à une constante multiplicative près, non nulle, nous pouvons choisir cette constante de façon que $\vec{\omega}_1 = f(\vec{\omega})$.

On en déduit que $g(m)$, image par φ du point de $\mathfrak{Q}$ dont un représentant est $\vec{\omega}_1 + \hat{f}(\vec{\mu})$, n'est autre que le point $\omega_1 + \hat{f}(\vec{\mu})$ de E. Autrement dit, la bijection g de E sur E est telle que

$$(1) \qquad \forall \vec{\mu} \in \vec{F}, \qquad g(\omega + \vec{\mu}) = \omega_1 + \hat{f}(\vec{\mu}),$$

ce qui prouve que g est une bijection affine de E, associée à l'automorphisme $\hat{f}$ de $\vec{F}$.

b) Partons cette fois d'une bijection affine k de E *sur lui-même,* associée à un automorphisme σ de $\vec{F}$.

En désignant par m et ω respectivement le point générique de E et un point arbitrairement choisi de E, on a $m = \omega + \vec{\mu}$, $\vec{\mu}$ étant le vecteur générique de $\vec{F}$; k est définie par

$$(2) \qquad k(\omega + \vec{\mu}) = \omega_1 + \sigma(\vec{\mu}) \qquad \omega_1 = k(\omega).$$

Par hypothèse, puisque ω et ω_1 sont des points de E, $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}_1$ n'appartiennent pas à $\vec{F}$.

Analyse. — Supposons qu'il existe une application homographique h de $\mathfrak{L}$ sur lui-même telle que $\psi(h) = k$. Il existe alors un automorphisme f de $\vec{G}$ qui conserve $\vec{F}$, admet σ pour restriction à $\vec{F}$ et transforme $\vec{\omega}$ en $\vec{\omega}_1$ (h s'obtient, à partir de f, par passage aux quotients).

Tout vecteur de $\vec{G}$ s'écrit, d'une façon et d'une seule,

$$\vec{X} = \lambda\vec{\omega} + \vec{V}, \qquad \lambda \in K, \qquad \vec{V} \in \vec{F}$$

et par suite

$$f(\vec{X}) = \lambda f(\vec{\omega}) + f(\vec{V})$$

ou

$$f(\vec{X}) = \lambda\vec{\omega}_1 + \sigma(\vec{V}).$$

Synthèse. — Considérons l'application f de $\vec{G}$ dans $\vec{G}$ définie par

$$\vec{X} = \lambda\vec{\omega} + \vec{V}, \quad \lambda \in K, \vec{V} \in \vec{F} \qquad f(\vec{X}) = \lambda\vec{\omega}_1 + \sigma(\vec{V}) \qquad (3)$$

α) L'application f vérifie les critères de linéarité.

β) Montrons que f est injective.

$$f(\lambda\vec{\omega} + \vec{V}) = f(\lambda_0\vec{\omega} + \vec{V}_0) \iff (\lambda - \lambda_0)\vec{\omega}_1 + \sigma(\vec{V} - \vec{V}_0) = \vec{0}.$$

Dans $\vec{G}$ le sous-espace vectoriel $\vec{F}$ et le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $\vec{\omega_1}$ sont supplémentaires; par suite cette dernière relation équivaut à

$$\lambda = \lambda_0 \quad \text{et} \quad \vec{V} = \vec{V_0} \qquad \text{ou} \qquad \lambda\vec{\omega} + \vec{V} = \lambda_0\vec{\omega} + \vec{V_0}.$$

γ) L'application f définie par (3) est donc un automorphisme de $\vec{G}$, dans lequel

$$\forall \vec{V} \in \vec{F}, \quad f(\vec{V}) = \sigma(\vec{V}) \qquad \text{et} \qquad f(\vec{\omega}) = \vec{\omega_1},$$

et il est le seul automorphisme de $\vec{G}$ à vérifier ces conditions.

δ) L'application homographique h obtenue, à partir de f, par passage aux quotients, est alors telle que $\psi(h) = k$; elle répond à la question.

Le caractère bijectif de ψ est ainsi établi.

c) Dans le cas où l'espace projectif $\mathcal{E}$ a été engendré par complétion à partir de l'espace affine E, nous dirons que l'application homographique h est le *prolongement projectif* de la bijection affine g telle que $g = \psi(h)$.

102. *Interprétation analytique.* — Nous allons retrouver par le calcul quelques-uns des résultats obtenus aux nos 98 à 101, en nous limitant ici au cas d'espaces de dimensions finies.

Nous reprenons les notations du no 98, en supposant que l'espace vectoriel $\vec{G}$ est de dimension $n + 1$; $\mathcal{E}$, $\vec{F}$, $\mathcal{H}$ et E ont les dimensions n, n, $n - 1$ et n.

1° **Bijection de $\mathcal{Q}$ sur E.** — Choisissons arbitrairement un repère de E, c'est-à-dire une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ de $\vec{F}$ et un point ω de E, que l'on peut considérer comme un vecteur $\vec{\omega}$ de $\vec{G}$, qui n'appartient pas à $\vec{F}$; $\vec{\omega}$ est une base d'un sous-espace supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{G}$ et

$$\mathcal{U} = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}, \vec{\omega}\} \qquad \text{est une base de } \vec{G}.$$

Le point générique $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ admet, par rapport à $\mathcal{U}$ des coordonnées homogènes de la forme $(X_1, \ldots, X_n, T)$, ce qui signifie que l'un des représentants homogènes de $\mathcal{M}$ dans $\vec{G}^\bullet$ est

$$\vec{M} = X_1\vec{e_1} + \ldots + X_n\vec{e_n} + T\vec{\omega}.$$

Cela posé : $\quad \mathcal{M} \in \mathcal{Q} \iff \vec{M} \notin \vec{F} \iff T \neq 0.$

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire qu'au point générique $\mathcal{M}$ de $\mathcal{Q}$, dont un représentant privilégié est

$$\vec{m} = x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n} + \vec{\omega} \qquad \left(x_1 = \frac{X_1}{T}, \ldots, x_n = \frac{X_n}{T}\right)$$

on peut faire correspondre biunivoquement le point m de E qui est défini dans le repère $\}\ \omega, \mathcal{E}\ \{$ par

$$m = \omega + \left(x_1 \vec{e_1} + \ldots + x_n \vec{e_n}\right)$$

On retrouve ainsi la bijection φ de $\mathfrak{Q}$ sur E introduite au n° 98.

2° **Changement de coordonnées.** — Soit $\}\ \omega', \mathcal{E}'\ \{$ un second repère de l'espace affine E défini par rapport au premier par les coordonnées affines $(a_1, \ldots, a_n)$ de ω' dans le repère $\}\ \omega, \mathcal{E}\ \{$ et par la matrice de passage S, dans $\vec{F}$, de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$.

L'égalité entre vecteurs de $\vec{F}$

$$x_1 \vec{e_1} + \ldots + x_n \vec{e_n} = \left(x'_1 \vec{e'_1} + \ldots + x'_n \vec{e'_n}\right) + \overrightarrow{\omega\omega'}$$

s'écrit matriciellement (49, 2°)

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

La relation (2) s'écrit

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} & a_1 \\ & \cdot \\ S & \cdot \\ & \cdot \\ & a_n \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \\ T \end{bmatrix} = \rho \mathcal{G} \begin{bmatrix} X'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X'_n \\ T' \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ρ désigne un scalaire non nul, que l'on peut prendre égal à 1.

On a ainsi les formules de changement de coordonnées dans $\mathfrak{L}$ quand on passe de la base $\}\ \mathcal{E}, \vec{\omega}\ \{$ de $\vec{G}$ à la base $\}\ \mathcal{E}', \vec{\omega'}\ \{$, ce qui ne constitue naturellement pas le changement de base le plus général dans $\vec{G}$.

3° **Prolongement d'une application affine.** — Partons de l'application affine régulière g de E sur E déterminée, dans le repère $\{\ \omega, \mathcal{E}\ \}$ de E par

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

A désignant une matrice carrée régulière $[a_{ij}]$ d'ordre n, et α_k les coordonnées de $g(\omega)$.

La relation (4) s'écrit

$$(5)\qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} & & & \alpha_1 \\ & & & \cdot \\ & A & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \alpha_n \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

ce qui prouve que $\varphi^{-1} \circ g$ est la restriction à $\mathcal{Q}$ de l'application homographique de $\mathcal{E}$ sur lui-même déterminée, dans la base $\{ \mathcal{E}, \vec{\omega} \}$ de $\vec{G}$ par la matrice régulière $\mathcal{A}$, d'ordre $n + 1$.

Nous retrouvons ainsi un résultat déjà obtenu au n° **101**, 1°, *b*.

4° **Exercices.** — Nous allons, sur deux exemples, montrer comment on utilise un repère en géométrie projective, et comment on passe d'un espace projectif à un espace affine.

Considérons dans le plan projectif deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ qui se coupent en O; soit A, B, C trois points de $\mathcal{D}$, deux à deux distincts (distincts de O) et soit A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$ deux à deux distincts (distincts de O).

Rapportons le plan projectif au repère formé par le triangle de référence OAA', auquel on a adjoint un point unitaire ω. Le tableau suivant fournit un système de coordonnées homogènes de chacun des points donnés.

	O	A	A'	B	B'	C	C'
X	0	1	0	1	0	1	0
Y	0	0	1	0	1	0	1
T	1	0	0	*b*	*b'*	*c*	*c'*

I. La droite AA' a pour équation $T = 0$;

La droite BB' a pour équation $\begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ Y & 0 & 1 \\ T & b & b' \end{vmatrix} = 0$

ou
$$bX + b'Y - T = 0.$$

Le point commun à ces deux droites est le point M $(b', -b, 0)$.

Les trois droites AA', BB', CC' sont concourantes si, et seulement si,

$$(b', -b, 0) \qquad \text{et} \qquad (c', -c, 0)$$

sont des coordonnées homogènes du même point, c'est-à-dire

$$(1)\qquad \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}.$$

Ce résultat s'interprète de la façon suivante : les points A, O, B, C ont pour coordonnées homogènes, sur $\mathcal{D}$, les couples

$$(1, 0) \qquad (0, 1) \qquad (1, b) \qquad (1, c);$$

leurs abscisses projectives sont ainsi

$$\infty, \quad 0, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c};$$

$$(A, O, B, C) = \frac{b}{c};$$

La condition (1) s'exprime donc par

$$(2) \qquad (A, O, B, C) = (A', O, B', C').$$

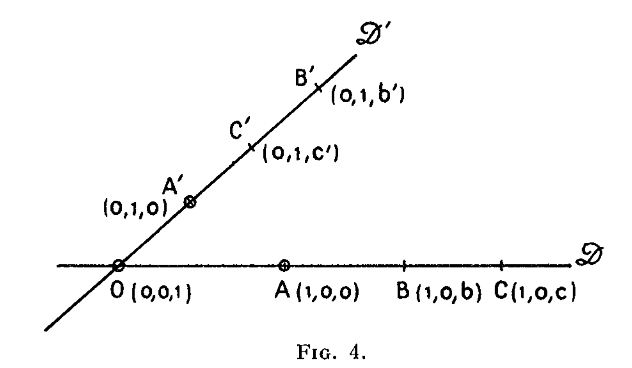


Fig. 4.

Plaçons-nous dans le plan affine complémentaire de la droite AA' (considérée comme droite à l'infini) du plan projectif.

$$(A, O, B, C) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}; \qquad (A', O, B' C') = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}},$$

la condition (2) se traduit par

$$(3) \qquad \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}}$$

les droites BB' et CC' se coupant sur la droite de l'infini sont alors parallèles, et la condition (3) est équivalente au théorème de Thalès.

II. Le théorème de Pappus. — Nous gardons les notations du début. Démontrons la proposition suivante, connue sous le nom de théorème de Pappus :

Les points d'intersection P, Q, R, *des droites* BC' *et* CB', CA' *et* AC', AB' *et* BA' *sont alignés.*

Les droites BC' et CB' admettent pour équations :

$$\begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ Y & 0 & 1 \\ T & b & c' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ Y & 0 & 1 \\ T & c & b' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} bX + c'Y - T = 0 \\ cX + b'Y - T = 0. \end{cases}$$

On en déduit un système de coordonnées homogènes de P

$$X_1 = b' - c', \qquad Y_1 = b - c, \qquad T_1 = bb' - cc'.$$

Les droites CA' et AC' admettent pour équations :

$$\begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ Y & 0 & 1 \\ T & c & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ Y & 0 & 1 \\ T & 0 & c' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} cX - T = 0 \\ c'Y - T = 0. \end{cases}$$

On en déduit un système de coordonnées homogènes de Q

$$X_2 = c', \qquad Y_2 = c, \qquad T_2 = cc'.$$

En remplaçant c et c' par b et b', on en déduit un système de coordonnées homogènes de R

$$X_3 = b', \qquad Y_3 = b, \qquad T_3 = bb'.$$

L'alignement de P, Q, R tient au fait que

$$\begin{vmatrix} b'-c' & c' & b' \\ b-c & c & b \\ bb'-cc' & cc' & bb' \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration « géométrique ». — Plaçons-nous dans le plan affine complémentaire de la droite QR (considérée comme droite à l'infini), dans le plan projectif (fig. 5 et 6).

Il s'agit de démontrer que le parallélisme des droites CA′ et AC′ d'une part, AB′ et BA′ d'autre part, entraîne le parallélisme des droites BC′ et CB′.

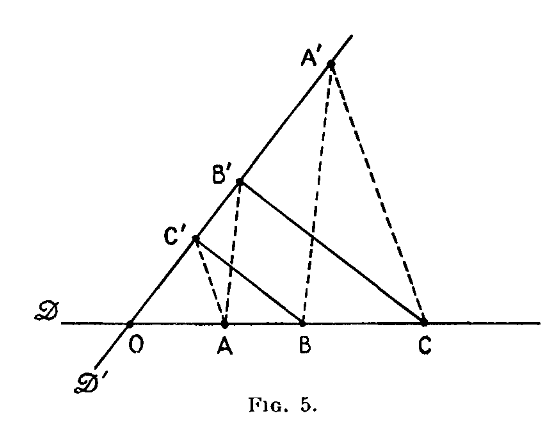


FIG. 5.

1[er] *cas : 𝔇 et 𝔇′ ne sont pas parallèles* (ce qui signifie que, dans la figure initiale, la droite QR ne passe pas par O).

L'hypothèse :

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OC'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

entraîne la conclusion :

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}.$$

2[e] *Cas :*
𝔇 et 𝔇′ sont parallèles.

L'hypothèse :

$$\overline{CA} = \overline{A'C'}$$

et $$\overline{AB} = \overline{B'A'}$$

entraîne la conclusion :

$$\overline{CB} = \overline{B'C'}.$$

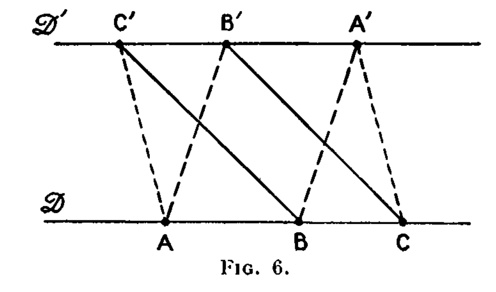


FIG. 6.

EXERCICES

Pour traiter les exercices suivants, on passera d'un espace projectif à un espace affine ou réciproquement.

1. — Reprendre l'exercice n° 6 du chapitre VI sur les triangles homologiques.

2. — Dans un plan projectif 𝔓, on considère un hexagone ABCDEF tel que les droites AB, CD et EF d'une part, les droites BC, DE et FA d'autre part sont concourantes. Démontrer que les droites AD, BE et CF sont concourantes.

3. — Démontrer qu'une diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.

4. — Dans un espace affine de dimension n, on donne un système libre de $n + 1$ points $\mathcal{S} = \{ A_1, \ldots, A_{n+1} \}$. On désigne par H_i l'hyperplan que contient les points A_j de $\mathcal{S}$ tels que $j \neq i$. Une droite quelconque D coupe l'hyperplan H_i au point B_i; soit le C_i le milieu du segment A_iB_i. Démontrer que les $n + 1$ points C_i sont dans un même hyperplan.

*5. — On se place dans la complétion projective d'un espace affine euclidien. Si l'on établit entre les points de deux plans P_1, P_2 une correspondance homographique qui n'est pas affine, à la droite de l'infini de P_1 correspond une droite J_2 à distance finie dans P_2 et à la droite de l'infini de P_2 correspond une droite I_1 à distance finie dans P_1 : 1° à toute droite Δ_1 parallèle à I_1 tracée dans le plan P_1 correspond une droite Δ_2 parallèle à J_2 et les points homologues déterminent sur Δ_1 et Δ_2 des divisions semblables; 2° Il existe dans le plan P_1 deux droites Δ_1 équidistantes de I_1, soit Δ_1', Δ_1'', auxquelles correspondent Δ_2', Δ_2'' équidistantes de J_2 et telles que les divisions qu'elles portent soient isométriques; 3° On transforme P_2 par une isométrie de façon à faire coïncider la division portée par Δ_2' avec la division isométrique portée par Δ_1 : la correspondance homographique entre les plans P_1 et P_2 devient en général une perspective ou une homologie suivant que la nouvelle position de P_2 coïncide avec P_1 ou coupe P_1 suivant Δ_1'.

CHAPITRE IX

COMPLEXIFICATION

103. ***Complexification d'un espace vectoriel réel.*** — 1° **Introduction.** Soit E un espace vectoriel réel, c'est-à-dire un espace vectoriel sur le corps R; soit E_C l'espace produit $E \times E$ dont chaque élément est un couple rangé $(\vec{X}, \vec{Y})$ de deux vecteurs de E. Nous allons montrer qu'il est possible de définir sur E_C une loi interne (addition) et une loi externe dont l'ensemble des opérateurs est C (multiplication par un nombre complexe) conférant à E_C la structure d'espace vectoriel sur C, de telle manière qu'on puisse établir un isomorphisme entre E et une partie E* de E_C; pour éclairer ce qui va suivre, disons dès maintenant que nous convenons de désigner par E* l'ensemble des éléments de E_C de la forme $(\vec{X}, \vec{0})$.

2° **Addition sur** E_C. — <u>Définition.</u> — **On appelle addition l'opération interne, notée +, définie sur** E_C **par**

$$(1) \qquad (\vec{X}, \vec{Y}) + (\vec{X}', \vec{Y}') = (\vec{X} + \vec{X}', \vec{Y} + \vec{Y}')$$

(au second membre le signe + désigne l'addition sur l'espace vectoriel E).

L'addition que nous venons de définir sur E_C est, comme l'addition sur E, associative et commutative; elle possède l'élément neutre $(\vec{0}, \vec{0})$, dit élément nul de E_C; enfin tout élément $(\vec{X}, \vec{Y})$ de E_C a un opposé, et un seul, $(-\vec{X}, -\vec{Y})$, qui sera noté $-(\vec{X}, \vec{Y})$.

L'ensemble E_C est ainsi muni d'une structure de groupe abélien.

3° **Multiplication d'un élément de** E_C **par un nombre complexe.**

<u>Définition.</u> — **On appelle produit de l'élément** $(\vec{X}, \vec{Y})$ **de** E_C **par le nombre complexe** $\alpha = a + ib$ **et on note** $\alpha(\vec{X}, \vec{Y})$ **l'élément de** E_C **tel que**

$$(2) \qquad \alpha(\vec{X}, \vec{Y}) = (a\vec{X} - b\vec{Y}, b\vec{X} + a\vec{Y}).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la loi externe que nous venons de définir sur E_c vérifie les axiomes

$$\beta\left(\alpha\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)\right) = \beta\alpha\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$$
$$\alpha\left[\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) + \left(\vec{X}', \vec{Y}'\right)\right] = \alpha\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) + \alpha\left(\vec{X}', \vec{Y}'\right)$$
$$(\alpha + \beta)\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \alpha\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) + \beta\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$$
$$1\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$$

(1 désignant l'élément unité de C).

En tenant compte de la structure de groupe abélien introduite au 2°, nous pouvons affirmer que l'*ensemble* E_c *a été muni d'une structure d'espace vectoriel sur* C.

Cet espace vectoriel est appelé le *complexifié* de E.

3° **Autre écriture d'un vecteur du complexifié.** — Comme tout espace vectoriel sur C, E_c peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur R : la loi externe est alors définie par

$$(2') \qquad a\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left(a\vec{X}, a\vec{Y}\right), \qquad a \in \mathrm{R}.$$

La partie E^* de E_c formée par les éléments de la forme $\left(\vec{X}, \vec{0}\right)$ peut être considérée comme un sous-espace de E_c, espace vectoriel sur R.

Cela posé, la bijection

$$\vec{X} \in E \longleftrightarrow \left(\vec{X}, \vec{0}\right) \in E^*$$

est un isomorphisme entre E et E^*, chaque ensemble étant muni de sa structure d'espace vectoriel sur R. Nous nous autoriserons dorénavant de cet isomorphisme pour désigner l'élément $\left(\vec{X}, \vec{0}\right)$ de E_c par $\vec{X}$ et pour dire qu'il s'agit d'un *vecteur réel* de E_c.

Les opérations définies au 2° et au 3° permettent d'écrire

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left(\vec{X}, \vec{0}\right) + \left(\vec{0}, \vec{Y}\right) \quad \text{et} \quad \left(\vec{0}, \vec{Y}\right) = i\left(\vec{Y}, \vec{0}\right).$$

En tenant compte de la convention précédente, on écrira

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \vec{X} + i\vec{Y}.$$

Désignons par iE la partie de E_c formée par les vecteurs $i\vec{Y}$ qui sont dits imaginaires purs; iE est un espace vectoriel sur R et E_c, considéré comme espace vectoriel sur R, est la somme directe de ses sous-espaces E et iE.

Les formules (1) et (2) deviennent

$$(1) \qquad \left(\vec{X} + i\vec{Y}\right) + \left(\vec{X}' + i\vec{Y}'\right) = \left(\vec{X} + \vec{X}'\right) + i\left(\vec{Y} + \vec{Y}'\right)$$

$$(2) \qquad (a + ib)\left(\vec{X} + i\vec{Y}\right) = \left(a\vec{X} - b\vec{Y}\right) + i\left(b\vec{X} + a\vec{Y}\right).$$

DÉFINITION. — **$\vec{X}$ et $\vec{Y}$ étant des vecteurs quelconques de E, les vecteurs $\vec{X} + i\vec{Y}$ et $\vec{X} - i\vec{Y}$ de E_c sont dits imaginaires conjugués.**

104. ***Extension au complexifié d'un espace vectoriel réel des notions d'endomorphisme, de forme bilinéaire, de forme quadratique.*** — Soit E un espace vectoriel sur R et E_c son complexifié.

1° THÉORÈME I. — **Si f est un endomorphisme de E, l'application f_c de E_c dans lui-même définie par**

$$(1) \qquad f_c(\vec{X} + i\vec{Y}) = f(\vec{X}) + if(\vec{Y})$$

est un endomorphisme de E_c. On dit que f_c est le prolongement de f sur E_c.

En effet, l'image par f_c du vecteur $\alpha\vec{Z} + \vec{Z}'$ de E_c,

avec : $\alpha = a + ib, \quad \vec{Z} = \vec{X} + i\vec{Y}, \quad \vec{Z}' = \vec{X}' + i\vec{Y}'$

s'écrit : $$f_c\left[\left(a\vec{X} - b\vec{Y} + \vec{X}'\right) + i\left(b\vec{X} + a\vec{Y} + \vec{Y}'\right)\right]$$

ou : $$f\left(a\vec{X} - b\vec{Y} + \vec{X}'\right) + if\left(b\vec{X} + a\vec{Y} + \vec{Y}'\right)$$

ou : $$af(\vec{X}) - bf(\vec{Y}) + f(\vec{X}') + ib\,f(\vec{X}) + ia\,f(\vec{Y}) + if(\vec{Y}')$$

ou : $$(a + ib)\left[f(\vec{X}) + if(\vec{Y})\right] + \left[f(\vec{X}') + if(\vec{Y}')\right]$$

ou, enfin : $$\alpha f_c(\vec{Z}) + f_c(\vec{Z}').$$

REMARQUE. — Si f et g sont deux endomorphismes de E et si f_c et g_c sont leurs prolongements, on vérifie que $g_c \circ f_c$ est le prolongement de $g \circ f$.

En particulier si f est un automorphisme de E, f_c est un automorphisme de E_c et $(f_c)^{-1}$ est le prolongement de f^{-1}.

2° THÉORÈME II. — **Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E; soient φ_c et ψ_c les applications de $E_c \times E_c$ dans C déterminées par**

$$(2) \quad \varphi_c(\vec{X} + i\vec{Y}, \vec{X}' + i\vec{Y}') = \varphi(\vec{X}, \vec{X}') - \varphi(\vec{Y}, \vec{Y}') + i\left[\varphi(\vec{Y}, \vec{X}') + \varphi(\vec{X}, \vec{Y}')\right]$$

$$(3) \quad \psi_c(\vec{X} + i\vec{Y}, \vec{X}' + i\vec{Y}') = \varphi(\vec{X}, \vec{X}') + \varphi(\vec{Y}, \vec{Y}') + i\left[\varphi(\vec{Y}, \vec{X}') - \varphi(\vec{X}, \vec{Y}')\right]$$

Alors φ_c est une forme bilinéaire symétrique sur E_c, ψ_c est une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur E_c.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette proposition.

REMARQUE I. $\psi_c(\vec{X} + i\vec{Y}, \vec{X}' + i\vec{Y}') = \varphi_c(\vec{X} + i\vec{Y}, \vec{X} - i\vec{Y}).$

Remarque II. — Les formes quadratique et hermitienne sur E_c, Φ_c et Ψ_c, respectivement associées à φ_c et à ψ_c, sont données par

$$\Phi_c\left(\vec{X} + i\vec{Y}\right) = \Phi\left(\vec{X}\right) - \Phi\left(\vec{Y}\right) + 2\,i\,\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right); \quad \Psi_c\left(\vec{X} + i\vec{Y}\right) = \Phi\left(\vec{X}\right) + \Phi\left(\vec{Y}\right),$$

en désignant par Φ la forme quadratique sur E, associée à φ.

On en déduit que la forme hermitienne Ψ_c est positive (resp. définie positive) si et seulement si la forme quadratique Φ_c est positive (resp. définie positive).

Remarque III. — Si $\vec{X} + i\,\vec{Y}$ est un vecteur du noyau S_c de φ_c (resp. ψ_c), alors $\vec{X} + i\,\vec{Y}$ est conjugué, en particulier, de tout vecteur $\vec{X}'$ de E, ce qui s'écrit

$$\left(\forall\, \vec{X}' \in E\right) \qquad \varphi\left(\vec{X}, \vec{X}'\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi\left(\vec{Y}, \vec{X}'\right) = 0;$$

$\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont donc des vecteurs du noyau S de φ.

La réciproque s'établit aisément. On en déduit que la forme Φ_c (resp. ψ_c) est non dégénérée si, et seulement si la forme Φ est non dégénérée.

105. ***Complexification d'un espace vectoriel réel de dimension finie.*** — Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel sur le corps R, de dimension finie n; E_c désigne le complexifié de E.

1° Nous allons montrer que (à condition d'en considérer les vecteurs comme des éléments de E_c) *toute base de* E *est une base de* E_c, qui est donc aussi de dimension n (1).

Soit $\mathcal{U} = \left\{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \right\}$ une base de E.

a) $\mathcal{U}$ est un système libre de E_c. En effet, soit $\zeta_k = x_k + iy_k \in C$,

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k)\, \vec{u}_k$$

est l'élément nul de E_c si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} x_k \vec{u}_k$ et $\sum_{k=1}^{n} y_k \vec{u}_k$ sont tous deux le vecteur nul de E, c'est-à-dire si les réels x_k et y_k sont tous nuls ou encore si les complexes ζ_k sont tous nuls.

b) Tout vecteur de E_c s'écrit

$$\vec{X} + i\vec{Y} \qquad \text{avec} \qquad \vec{X} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{u}_k \qquad \text{et} \qquad \vec{Y} = \sum_{k=1}^{n} y_k \vec{u}_k$$

ou encore (1) $\qquad \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \vec{u}_k \qquad \text{avec} \qquad \zeta_k = x_k + iy_k.$

Le système $\mathcal{U}$, libre et générateur, est une base de E_c.

---

(1) E_c, espace vectoriel sur R, est alors de dimension $2\,n$ (cf. I, 157, 5°).

Nous dirons que $\mathcal{U}$ est une base réelle de E_C et *nous nous astreindrons à n'utiliser dans* E_C *que des bases réelles.*

COROLLAIRE. — *Un vecteur de* E_C *est réel si et seulement si ses coordonnées dans une base réelle de* E_C *sont toutes réelles.*

Cette proposition résulte de l'écriture (1).

2° Soit f un endomorphisme de E et f_C le prolongement de f sur E_C. Soit A la matrice qui représente f dans la base $\mathcal{U}$ de E; les colonnes de A sont formées par les coordonnées des vecteurs $f\left(\vec{u_k}\right)$ dans la base $\mathcal{U}$ de E, qui sont aussi les coordonnées des vecteurs $f_C\left(\vec{u_k}\right)$ dans la base $\mathcal{U}$ de E_C. Il en résulte que A est aussi la matrice représentative de f_C dans la base $\mathcal{U}$ de E_C.

3° Soit φ une forme bilinéaire symétrique et soient φ_C et ψ_C les prolongements de φ à $E_C \times E_C$ qui ont été introduits au 2°. Soit $\Omega = [\omega_{lk}]$ la matrice symétrique réelle qui représente φ dans la base $\mathcal{U}$ de E. On a :

$$\omega_{lk} = \varphi\left(\vec{u_l}, \vec{u_k}\right) \implies \omega_{lk} = \varphi_C\left(\vec{u_l}, \vec{u_k}\right) = \psi_C\left(\vec{u_l}, \vec{u_k}\right)$$

Il en résulte que Ω représente φ_C, et aussi ψ_C dans $\mathcal{U}$, base de E_C.

106. *Complexification d'un espace vectoriel euclidien.* — Soit E un espace vectoriel réel qui a été muni d'une structure euclidienne par l'introduction sur E d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique $\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ dont la forme quadratique associée $\Phi\left(\vec{X}\right)$ est définie positive. Sur le complexifié E_C de E, nous disposons des deux prolongements φ_C et ψ_C de φ qui ont été introduits au n° **105**, 2° ainsi que des prolongements Φ_C et Ψ_C de Φ.

1° La forme bilinéaire symétrique φ_C, que l'on appelle *produit scalaire euclidien* sur E_C ne présente pas un grand intérêt. En effet la forme quadratique associée, Φ_C, ne prend pas ses valeurs sur R et, si elle est non dégénérée (Rem. III du **105**, 2°), elle n'est pas définie. Dans l'étude des coniques :

- un vecteur singulier de Φ_C sera dit *vecteur isotrope* de E_C,
- deux vecteurs conjugués relativement à φ_C seront dits *vecteurs orthogonaux* de E_C.

2° **Structure hermitienne sur** E_C. — La forme hermitienne Ψ_C étant définie positive (Rem. II du **105**, 2°), la forme bilinéaire à symétrie hermitienne ψ_C peut être adoptée comme *produit scalaire hermitien* sur E_C, qui est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel hermitien.

$\sqrt{\Psi_C\left(\vec{X} + i\vec{Y}\right)}$, qui s'écrit $\sqrt{\vec{X}.\vec{X} + \vec{Y}.\vec{Y}}$ est la *norme hermitienne* du vecteur $\vec{X} + i\vec{Y}$ de E_C; dans le cas d'un vecteur de E, elle coïncide, naturellement, avec la norme euclidienne.

3° Théorème. — **Le prolongement f_C à E_C d'une isométrie f de l'espace vectoriel euclidien E est une isométrie de l'espace hermitien E_C.**

Prolongement d'un automorphisme, f_C est un automorphisme (104, 1°).

De plus, $\vec{X} + i\,\vec{Y}$ étant le vecteur générique de E_C, on a

$$\Psi_C\left[f_C\left(\vec{X} + i\,\vec{Y}\right)\right] = \Psi_C\left[f\left(\vec{X}\right) + if\left(\vec{Y}\right)\right] \quad \text{ou} \quad \Phi\left[f\left(\vec{X}\right)\right] + \Phi\left[f\left(\vec{Y}\right)\right]$$

Mais : $\Phi\left[f\left(\vec{X}\right)\right] = \Phi\left(\vec{X}\right)$ et $\Phi\left[f\left(\vec{Y}\right)\right] = \Phi\left(\vec{Y}\right)$. D'où :

$$\Psi_C\left[f_C\left(\vec{X} + i\,\vec{Y}\right)\right] = \Phi\left(\vec{X}\right) + \Phi\left(\vec{Y}\right) \quad \text{ou} \quad \Psi_C\left(\vec{X} + i\,\vec{Y}\right).$$

La proposition en résulte.

Remarque. — On montre, de la même façon, que f_C est aussi un opérateur orthogonal de E_C, relativement à φ_C.

4° **Cas où l'espace vectoriel** E **a une dimension finie** n. — Soit $\mathcal{U}$ une base orthonormée de E, ce qui signifie que le produit scalaire φ est représenté par la matrice-unité I dans la base $\mathcal{U}$.

D'après le n° **106**, 3°, les formes φ_C et ψ_C sont représentées par I dans la base $\mathcal{U}$ de E_C, ce qui montre que cette base est orthonormée relativement à φ_C et aussi relativement à ψ_C. Si les (ζ_k) et les (ζ'_k) sont les coordonnées (complexes) des deux vecteurs $\vec{Z}$ et $\vec{Z'}$ de E_C dans la base $\mathcal{U}$, on a

$$\varphi_C\left(\vec{Z}, \vec{Z'}\right) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \zeta'_k\,; \qquad \psi_C\left(\vec{Z}, \vec{Z'}\right) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \overline{\zeta'_k}.$$

En particulier : $\vec{Z}$ isotrope $\Longleftrightarrow$ $\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2 = 0.$

107. ***Extensions de la notion de complexification.*** — 1° **Complexifié d'un espace affine réel.** — Soit E un espace affine, attaché à un espace vectoriel $\vec{E}$, sur le corps des réels. Nous désignons par $\vec{E}_C$ le complexifié de $\vec{E}$; $\vec{E}_C$ est un espace vectoriel sur le corps des complexes et $\vec{E}$ peut être identifié à une partie de $\vec{E}_C$.

Fixons arbitrairement une origine O dans l'espace affine E; le point $O + \vec{M}$ engendre E quand le vecteur $\vec{M}$ engendre $\vec{E}$, ce qui nous a permis d'identifier M à $\vec{M}$ et E à $\vec{E}$ muni de sa structure affine canonique.

Autrement dit, l'espace affine E peut être identifié à une partie de $\vec{E}_C$, muni de sa structure affine canonique, c'est-à-dire à une partie de l'ensemble des « points »

$$M = O + \vec{M}, \qquad \vec{M} \in \vec{E}_C.$$

L'ensemble précédent est un espace affine, noté E_C; on dit que E_C est le *complexifié* de l'espace affine E et que les points de E sont les *points réels* de E_C.

Si O est un point réel de E_c et si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont des vecteurs de $\vec{E}$, les points

$$O + \vec{X} + i\vec{Y} \qquad \text{et} \qquad O + \vec{X} - i\vec{Y}$$

de E_c sont dits *imaginaires conjugués.*

Il en résulte que le centre des moyennes distances (ou milieu) de deux points imaginaires conjuguées est un point réel.

2° **Complexifié d'un espace projectif réel.** — Soit $\mathfrak{L}$ un espace projectif, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, sur le corps des réels. Nous désignons par $\vec{E}_c$ le complexifié de $\vec{E}$; $\vec{E}_c$ est un espace vectoriel sur le corps des complexes. L'espace projectif $\mathfrak{L}_c$ qui est issu de $\vec{E}_c$ est dit *complexifié* de $\mathfrak{L}$.

On peut considérer $\mathfrak{L}$ comme l'ensemble des points de $\mathfrak{L}_c$ qui admettent, parmi leurs représentants, un vecteur réel de $\vec{E}_c$.

CHAPITRE X

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Dans ce chapitre, E designe un espace vectoriel euclidien.

Dans le cas où cet espace est de dimension finie n, il pourra être commode de le noter E_n; c'est ainsi que E_2 (resp. E_3) désignera systématiquement un espace de dimension 2 (resp. 3).

Il est commode de supposer que E a été muni de sa structure affine canonique ou encore que E est un espace affine euclidien, dans lequel on a choisi une origine O. L'élément générique, $\vec{V}$ ou $\vec{M}$, de E peut donc être considéré soit comme un vecteur de l'espace vectoriel E, soit comme un bipoint (O, M) de l'espace affine E.

I. ISOMÉTRIES

108. *Rotations.* — 1° **Rotations et retournements.** — Nous avons montré (I, 228, 5°) que le déterminant de la matrice représentative d'un endomorphisme f est indépendant du choix de la base, ce qui nous a conduits à la notion de déterminant de f.

Nous savons (22) que, pour une isométrie de E_n : dét $f = \pm 1$. Nous pouvons donc distinguer les *isométries droites* ou *rotations* (dét $f = +1$) et les *isométries gauches* ou *retournements* (dét $f = -1$); elles sont respectivement associées aux matrices orthogonales droites et aux matrices orthogonales gauches dans l'isomorphisme considéré au n° 22, 3°, *b*.

En raisonnant soit directement, soit par l'isomorphisme précédent, nous obtenons :

THÉORÈME. — **L'ensemble $\mathcal{R}$ (E_n) des rotations de E_n forme un sous-groupe du groupe orthogonal** O (E_n).

Rappelons que O (E_n) est lui-même un sous-groupe du groupe linéaire de E_n.

Le produit de deux retournements étant une rotation, l'ensemble des retournements ne constitue pas un groupe.

2° THÉORÈME. — **Si n est impair, toute rotation de E_n laisse invariants des vecteurs non nuls.**

a) Il s'agit de démontrer que, si $n = 2m + 1$, toute rotation f admet $+1$ pour valeur propre. Le polynôme caractéristique de f s'écrit

$$\Delta(\lambda) = (-\lambda)^n + \ldots + \text{dét } f \qquad \text{ou} \qquad \Delta(\lambda) = -\lambda^{2m+1} + \ldots + 1.$$

Étudions sur C les zéros de $\Delta(\lambda)$. Les seuls zéros réels possibles sont $+1$ et -1 (**21**, 2°); les zéros imaginaires éventuels sont deux à deux conjugués, ce qui exige l'existence d'au moins un zéro réel et, plus précisément, d'un nombre impair de zéros réels (éventuellement confondus); enfin le produit des zéros est $+1$. Le produit de deux nombres imaginaires conjugués étant un réel positif, il n'est pas possible que tous les zéros réels de $\Delta(\lambda)$ soient égaux à -1; en effet le produit des zéros serait alors négatif. Finalement, le polynôme caractéristique de la rotation f admet $+1$ pour zéro.

b) Le sous-espace propre E′ qui correspond à la valeur propre 1 est formé de vecteurs invariants; soient p la dimension de E′, et E″ le sous-espace orthogonal de E′; E′ et E″ sont supplémentaires, E″ est de dimension $2m + 1 - p$. Le vecteur générique $\vec{M}$ de E admet la décomposition, unique,

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{M}'', \quad \vec{M}' \in E', \quad \vec{M}'' \in E''.$$

Rappelons que $\vec{M}'$ (resp. $\vec{M}''$) est la projection orthogonale de $\vec{M}$ sur E′ (resp. E″)

$$f(\vec{M}') = \vec{M}' \implies f(\vec{M}) = \vec{M}' + f(\vec{M}'')$$

Or le sous-espace E″ est stable par f : en effet, par conservation du produit scalaire

$$\vec{X}' \in E' \text{ et } \vec{X}'' \in E'' \implies \vec{X}'.\vec{X}'' = 0 \implies \vec{X}'.f(\vec{X}'') = 0 \implies f(\vec{X}'') \in E''.$$

La restriction $\hat{f}$ de f à E″ est un endomorphisme de E″ et même une isométrie de E″, la norme euclidienne étant conservée par $\hat{f}$, comme par f. Nous dirons que $\hat{f}$ est la projection orthogonale de f sur E″; montrons que, plus précisément, $\hat{f}$ est une rotation de E″.

En effet, dans la base de E obtenue en réunissant une base orthonormée $\mathfrak{U}''$ de E″ et une base orthornomée $\mathfrak{U}'$ de E′, f, qui se traduit par

$$f(\vec{M}) = \hat{f}(\vec{M}'') + \vec{M}',$$

est représentée par une matrice (orthogonale, droite) de la forme

$$S = \left[\begin{array}{c|c} \hat{S} & O \\ \hline O & I_p \end{array}\right]$$

$\hat{S}$ est la matrice orthogonale qui représente l'isométrie $\hat{f}$ de E″, dans la base $\mathfrak{U}''$. I_p est la matrice unité qui représente l'application identique de E′, dans la base $\mathfrak{U}'$. On en déduit : dét S = dét S. Or dét S = + 1.

Ainsi : dét $\hat{S}$ = 1, ce qui prouve que $\hat{f}$ est une rotation de E″.

D'autre part, E′ et E″ n'ayant en commun que $\vec{0}$, aucun vecteur non nul de E″ n'est invariant dans f, c'est-à-dire dans $\hat{f}$. D'après le théorème précédent, cela exige que la dimension $2m + 1 - p$ de E″ soit paire, c'est-à-dire que la dimension p de E′ soit impaire. Le polynôme caractéristique, $\Delta(\lambda)$, de f, ou de S, s'écrit

$$\Delta(\lambda) = \hat{\Delta}(\lambda) \times (1 - \lambda)^p;$$

$\hat{\Delta}(\lambda)$ désigne le polynôme caractéristique de $\hat{f}$, ou de $\hat{S}$, qui ne peut admettre la valeur propre + 1. Il en résulte que la dimension du sous-espace propre E′ est ici exactement égale à l'ordre de multiplicité du zéro + 1 dans $\Delta(\lambda)$.

3° L'étude du cas particulier où $n = 3$ est faite en détail au n° 172

109. ***Symétries.*** — **1° Symétrie par rapport à l'origine.** DÉFINITION. — **Sur tout espace vectoriel, on appelle symétrie par rapport à l'origine l'endomorphisme involutif qui, au vecteur générique $\vec{X}$, associe le vecteur opposé, $-\vec{X}$.**

Sur un espace euclidien, il s'agit d'une isométrie, puisque $\|-\vec{X}\| = \|\vec{X}\|$.

Sur un espace euclidien E_n de dimension finie n, cette isométrie est représentée, dans une base quelconque, par la matrice $-I_n$; son déterminant est $(-1)^n$: *la symétrie par rapport à l'origine est une rotation ou un retournement suivant que la dimension de E_n est paire ou impaire.*

D'autre part, *sur un espace vectoriel euclidien de dimension impaire, tout retournement peut être considéré comme le produit commutatif d'une rotation par la symétrie par rapport à l'origine, et réciproquement.*

2° Symétrie par rapport à un sous-espace. — *a)* DÉFINITION I. — **Soient E′ et E″ deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel E. On appelle symétrie par rapport à E′, parallèlement à E″, l'endomorphisme involutif σ, qui au vecteur générique de E**

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{M}'', \quad \textbf{avec} \quad \vec{M}' \in E' \quad \text{et} \quad \vec{M}'' \in E''$$

associe le vecteur

$$\sigma(\vec{M}) = \vec{M}' - \vec{M}'' \quad \text{ou} \quad \vec{M} - 2\vec{M}''.$$

REMARQUE I. — Tout vecteur de E′ est invariant dans la symétrie σ.

REMARQUE II. — La symétrie par rapport à l'origine n'est autre que la symétrie par rapport au sous-espace $\{\vec{0}\}$, parallèlement au sous-espace E.

b) DÉFINITION II. — Soit E_n un espace vectoriel euclidien de dimension finie n et E' un sous-espace de E_n. **On appelle symétrie orthogonale par rapport à E', la symétrie, σ', par rapport à E', parallèlement au sous-espace orthogonal E'' de E'.**

La symétrie orthogonale σ' est une isométrie; en effet, d'après une propriété générale des formes quadratiques, nous avons

$$\text{(1)} \qquad \left\|\vec{M'} + \vec{M''}\right\|^2 - \left\|\vec{M'} - \vec{M''}\right\|^2 = 4\,\vec{M'}.\vec{M''}.$$

D'autre part : $\vec{M} = \vec{M'} + \vec{M''}$, $\quad \sigma'\left(\vec{M}\right) = \vec{M'} - \vec{M''}$,

avec $\vec{M'} \in E'$ et $\vec{M''} \in E''$, ce qui entraîne $\vec{M'}.\vec{M''} = 0$. On en déduit :

$$\forall\, \vec{M} \in E_n, \qquad \left\|\sigma'\left(\vec{M}\right)\right\| = \left\|\vec{M}\right\|.$$

Soient p et q les dimensions de E' et de E''; on dit que $q = n - p$ est la *codimension* de E'.

Dans la base de E_n obtenue en réunissant une base orthonormée, $\mathcal{U}'$, de E' et une base orthonormée, $\mathcal{U}''$, de E'', σ' est représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} I_p & O \\ O & -I_q \end{bmatrix}$$

et on a : $\text{dét}\ \sigma' = (-1)^q$; il en résulte que *la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace* E' *est une rotation ou un retournement suivant que la codimension de* E' *est paire ou impaire.*

REMARQUE. — Étudions le produit des deux symétries orthogonales σ' et σ'', par rapport aux sous-espaces orthogonaux E' et E'' :

$$\vec{M'} + \vec{M''} \xrightarrow{\sigma'} \vec{M'} - \vec{M''} \xrightarrow{\sigma''} -\vec{M'} - \vec{M''} = -\left(\vec{M'} + \vec{M''}\right)$$

$$\vec{M'} + \vec{M''} \xrightarrow{\sigma''} -\vec{M'} + \vec{M''} \xrightarrow{\sigma'} -\vec{M'} - \vec{M''} = -\left(\vec{M'} + \vec{M''}\right).$$

Le produit de σ' et σ'' est commutatif; c'est la symétrie par rapport à l'origine. Comme il s'agit d'endomorphismes involutifs, chacune des symétries σ' et σ'' est le produit de l'autre par la symétrie par rapport à l'origine.

110. ***Les isométries d'un espace affine euclidien.*** — Soit E un espace affine euclidien, associé à un espace vectoriel euclidien $\vec{E}$.

1° DÉFINITION. — **Une bijection affine g de E sur E est dite isométrie si elle conserve la distance,** c'est-à-dire si, pour tout bipoint (P, Q) de $E \times E$,

$$P' = g(P), \qquad Q' = g(Q) \implies \left\|\overrightarrow{P'Q'}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|.$$

THÉORÈME. — **Une bijection affine g de E sur E est une isométrie si, et seulement si, l'automorphisme f de E auquel elle est associée est une isométrie.**

En effet, d'après la définition d'une application affine

$$P' = g(P) \quad \text{et} \quad Q' = g(Q) \iff P' = g(P) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P'Q'} = f\left(\overrightarrow{PQ}\right).$$

Nous supposerons dorénavant que E et $\vec{E}$ admettent une dimension finie n.

DÉFINITION. — **Une isométrie de l'espace affine euclidien E_n est dite déplacement ou antidéplacement suivant qu'elle est associée à une rotation ou à un retournement de l'espace vectoriel euclidien $\vec{E}_n$.**

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer :

THÉORÈME. — **Les isométries d'un espace affine euclidien constituent un groupe, dont les déplacements constituent un sous-groupe.**

Notons que les translations de E_n sont les déplacements associés à l'application identique de $\vec{E}_n$.

2° Une origine O étant arbitrairement fixée dans l'espace affine E_n une isométrie g de E_n, associée à une isométrie f de $\vec{E}_n$, s'écrit, en désignant par O′ et M′ les homologues de O et du point générique M de E_n :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + f\left(\overrightarrow{OM}\right).$$

En identifiant E_n, d'origine O, à $\vec{E}_n$ muni de sa structure affine canonique, on en déduit :

a) Tout déplacement (resp. antidéplacement) de E_n qui admet un point invariant O peut être identifié à une rotation (resp. à un retournement) de $\vec{E}_n$; une telle isométrie de E_n est dite *rotation* dont un point invariant est O (resp. *retournement* dont un point invariant est O); elle peut, naturellement, admettre d'autres points invariants que O.

b) Tout déplacement (resp. antidéplacement) peut être considéré comme le produit commutatif d'une translation et d'une rotation (resp. retournement).

3° **Symétries orthogonales dans un espace affine euclidien.** — Soit E′ une variété linéaire affine de E_n, de direction $\vec{E}'$ et soit $\vec{E}''$ le sous-espace orthogonal de $\vec{E}'$ dans $\vec{E}_n$.

Si O est un point arbitrairement choisi dans E′, associons au point générique M de E_n les projections orthogonales, $\vec{M}'$ et $\vec{M}''$, de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$.

$\vec{M}''$ est indépendant du choix de O, car si O_1 est un second point de E′ on a

$$\overrightarrow{O_1M} = \vec{M}_1' + \vec{M}_1'' \qquad \text{avec} \qquad \vec{M}_1' = \overrightarrow{O_1O} + \vec{M}' \qquad \text{et} \qquad \vec{M}_1'' = \vec{M}''.$$

Il en résulte que l'application g de E_n dans E_n qui, au point M associe le point μ tel que $\overrightarrow{M\mu} = -2\,\overrightarrow{M''}$ est indépendante du choix de O; cette application est appelée *symétrie orthogonale* (en abrégé : *symétrie*) par rapport à la variété linéaire E'.

En identifiant E_n, d'origine $O \in E'$, à $\overrightarrow{E}_n$ muni de sa structure affine canonique, on constate que g est identique à la symétrie par rapport à $\overrightarrow{E'}$, dans $\overrightarrow{E}_n$. Il s'agit donc d'une isométrie.

En particulier, si $E' = \{O\}$, g est la symétrie par rapport au point O, dans laquelle

$$\overrightarrow{O\mu} = -\overrightarrow{OM}.$$

Remarque. — Le point μ' défini par $\overrightarrow{M\mu'} = -\overrightarrow{M''}$ est, lui aussi, indépendant du choix de O dans E'; on l'appelle *projection orthogonale* du point M sur la variété linéaire E'.

II. ANGLES

111. ***Angles dans un espace vectoriel euclidien,*** E_2, ***de dimension deux.*** — Remarquons que, une base de E_2 étant choisie, il existe une correspondance bijective entre les vecteurs unitaires de E_2 et les éléments de l'ensemble $R/2\pi Z$. (II, 279). En effet

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists\, \theta \in R/2\pi Z \quad \text{tel que} \quad a = \cos\theta \quad \text{et} \quad b = \sin\theta.$$

1° Forme générale des matrices (2,2), réelles, orthogonales droites. Une matrice (2,2) réelle, S, ne peut être orthogonale que si ses vecteurs colonnes sont unitaires c'est-à-dire si

$$S = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta' \\ \sin\theta & \sin\theta' \end{bmatrix}$$

Inversement, la matrice S que nous venons d'écrire est orthogonale droite si, et seulement si, elle vérifie les deux conditions

$$\begin{cases} \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0 \\ \text{et} \quad \cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \cos(\theta' - \theta) = 0 \\ \text{et} \quad \sin(\theta' - \theta) = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire si $\theta' = \theta + \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

La forme générale des matrices (2,2), réelles, orthogonales droites, est donc

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

En effectuant le produit de S_θ par $S_{\theta'}$ ou de $S_{\theta'}$ par S_θ on obtient $S_{\theta+\theta'}$. En particulier $S_{-\theta} \times S_\theta = S_0$, matrice unité I :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S_{-\theta}$ est l'inverse de S_θ.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Le groupe multiplicatif des matrices réelles (2,2), orthogonales droites est commutatif et isomorphe au groupe additif $R/2\pi Z$.**

2° **Étude des rotations dans E_2.** — *a) Mesure d'une rotation.* — Soit r une rotation donnée de E_2. Orientons E_2 (ce qui n'est d'ailleurs pas nécessaire pour définir une rotation). Soient $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ deux bases orthonormées ayant la même orientation; d'après le 1°, $P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'}$, qui est une matrice (2,2) orthogonale droite, s'écrit S_α et on a $P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}} = S_{-\alpha}$ (cf I, n° **224** et III, n° **23**).

Si S_θ désigne la matrice orthogonale droite qui représente la rotation r dans la base $\mathfrak{U}$, la matrice qui représente r dans la base $\mathfrak{U}'$ est

$$P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}} S_\theta P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'} = S_{-\alpha} S_\theta S_\alpha \quad \text{ou} \quad S_{-\alpha+\theta+\alpha} \quad \text{ou} \quad S_\theta.$$

Ainsi dans un espace vectoriel euclidien de dimension 2, *la matrice qui représente une rotation dans une base orthonormée d'orientation donnée est indépendante du choix de cette base.*

Cela nous conduit à énoncer :

DÉFINITION. — **Si la rotation r est représentée, dans les bases orthonormées de E_2 considérées comme positives, par la matrice S_θ, on dit que l'élément θ de $R/2\pi Z$ est la mesure de r dans E_2 orienté.**

Nous avons les bijections

$$r \longleftrightarrow S_\theta \longleftrightarrow \theta$$

et, si nous considérons deux rotations r et r', de mesures θ et θ'

$$r' \circ r \longleftrightarrow S_{\theta'} \times S_\theta \longleftrightarrow \theta + \theta'.$$

Autrement dit :

THÉORÈME. — **Il existe un isomorphisme canonique entre le groupe commutatif des rotations d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et le groupe additif $R/2\pi Z$.**

Par *canonique* on entend que l'isomorphisme ne dépend pas du choix de la base, sous la réserve que nous allons préciser.

b) Influence de l'orientation. — Montrons que *la mesure d'une rotation est remplacée par l'élément opposé de* $R/2\pi Z$ *quand on change l'orientation.*

Considérons en effet les deux bases orthonormées $\mathcal{U} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ et $\mathcal{U}' = \{\vec{j}, \vec{i}\}$. Leurs orientations sont différentes car on a

$$P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{dét } P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = -1.$$

Si une rotation r est représentée dans la base $\mathcal{U}$ par la matrice orthogonale droite S_θ, r est représentée dans la base $\mathcal{U}'$ par la matrice (I, n° 224)

$$P_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}.S_\theta.P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

qui s'écrit $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ ou $S_{-\theta}$.

La proposition en résulte.

3° **Angle de deux vecteurs unitaires.** — *a) Définition.* — Théorème I. — **Étant donnés deux vecteurs unitaires de E_2, $\vec{e}$ et $\vec{e'}$, il existe une et une seule rotation de E_2 qui transforme $\vec{e}$ en $\vec{e'}$.**

Pour la commodité de la démonstration, orientons E_2 et repérons $\vec{e}$ et $\vec{e'}$ par leurs coordonnées dans une base orthonormée positive $\mathcal{U}$, soit

$$\vec{e}\,(\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \text{et} \quad \vec{e'}\,(\cos\alpha', \sin\alpha').$$

La rotation r, de mesure θ, transforme $\vec{e}$ en $r(\vec{e})$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{U}$ sont données par

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

On a $r(\vec{e}) = \vec{e'}$ si, et seulement si, ces coordonnées sont $\cos\alpha'$ et $\sin\alpha'$, soit

$$\theta = \alpha' - \alpha \pmod{2\pi},$$

ce qui détermine r sans ambiguïté.

Notons que

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha' \quad \text{ou} \quad \boxed{\cos\theta = \vec{e}.\vec{e'}}$$

Théorème II. — **Étant donnés quatre vecteurs unitaires de E_2, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{e_4}$, il existe une rotation transformant à la fois $\vec{e_1}$ en $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ en $\vec{e_4}$ si, et seulement si, il existe une rotation transformant à la fois $\vec{e_1}$ en $\vec{e_3}$ et $\vec{e_2}$ en $\vec{e_4}$.**

Soient r, r', r'' les rotations définies (théorème I), par

$$\vec{e_2} = r(\vec{e_1}), \quad \vec{e_3} = r'(\vec{e_2}), \quad \vec{e_4} = r''(\vec{e_3}).$$

Nous avons

$$\vec{e_3} = r'\left[r\left(\vec{e_1}\right)\right], \quad \vec{e_4} = r''\left[r'\left(\vec{e_2}\right)\right].$$

α) L'hypothèse $r = r''$ entraîne $r \circ r' = r'' \circ r'$ qui s'écrit $r' \circ r = r'' \circ r'$ (commutativité).

β) L'hypothèse $r' \circ r = r'' \circ r'$, qui s'écrit $r \circ r' = r'' \circ r'$, entraîne $r = r''$ (multiplication à droite par $(r')^{-1}$).

La proposition est ainsi démontrée.

Théorème III et définition. — **Dans l'ensemble des couples rangés de vecteurs unitaires de E_2, la relation binaire « il existe une rotation r telle que $r\left(\vec{e_1}\right) = \vec{e_3}$ et $r\left(\vec{e_2}\right) = \vec{e_4}$ » est une relation d'équivalence entre les couples $\left\{ \vec{e_1}, \vec{e_2} \right\}$ et $\left\{ \vec{e_3}, \vec{e_4} \right\}$. La classe d'équivalence dont un représentant est $\left\{ \vec{e_1}, \vec{e_2} \right\}$ est dite angle des vecteurs unitaires $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$;** on la note

$$\text{angle}\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right).$$

La relation binaire considérée est, en effet,

réflexive : pour tout couple $\left\{ \vec{e_1}, \vec{e_2} \right\}$, la rotation identique ρ assure $\rho\left(\vec{e_1}\right) = \vec{e_1}$ et $\rho\left(\vec{e_2}\right) = \vec{e_2}$,

symétrique : si $r\left(\vec{e_1}\right) = \vec{e_3}$ et $r\left(\vec{e_2}\right) = \vec{e_4}$, on a $r^{-1}\left(\vec{e_3}\right) = \vec{e_1}$ et $r^{-1}\left(\vec{e_4}\right) = \vec{e_2}$,

transitive : si d'une part $r\left(\vec{e_1}\right) = \vec{e_3}$ et $r\left(\vec{e_2}\right) = \vec{e_4}$, si d'autre part $r'\left(\vec{e_3}\right) = \vec{e_5}$ et $r'\left(\vec{e_4}\right) = \vec{e_6}$, on a, en posant $r'' = r' \circ r$, $r''\left(\vec{e_1}\right) = \vec{e_5}$ et $r''\left(\vec{e_2}\right) = \vec{e_6}$.

b) *Mesure d'un angle.* — D'après le théorème II, on a

$$\text{angle}\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right) = \text{angle}\left(\vec{e_3}, \vec{e_4}\right)$$

si, et seulement si, la rotation qui transforme $\vec{e_1}$ en $\vec{e_2}$ transforme en même temps $\vec{e_3}$ en $\vec{e_4}$.

Il en résulte qu'à tout angle Θ de deux vecteurs unitaires est associée (biunivoquement) une rotation r, celle qui transforme $\vec{e_1}$ en $\vec{e_2}$ pour n'importe quel représentant $\left\{ \vec{e_1}, \vec{e_2} \right\}$ de l'angle; d'où la bijection canonique

$$\text{angle } \Theta \quad \longleftrightarrow \quad \text{rotation } r;$$

on dit que r *est la rotation d'angle* Θ et que Θ *est l'angle de la rotation* r.

Sur l'ensemble des angles, on définit une loi interne (notée additivement) en convenant que, si r et r' sont les rotations d'angles Θ et Θ', $\Theta + \Theta'$ désigne l'angle de la rotation $r' \circ r$. Il en résulte :

Théorème. — **Dans E_2, l'ensemble des angles de deux vecteurs unitaires est un groupe abélien isomorphe au groupe des rotations de E_2.**

Si en outre, E_2 est orienté, on dispose de la mesure θ de la rotation r (cf. 2°), et on peut compléter l'isomorphisme précédent par

$$\Theta \longleftrightarrow r \longleftrightarrow \theta;$$

on dit que θ est la mesure de l'angle Θ.

(Naturellement cette mesure est remplacée par l'élément opposé de $R/2\pi Z$ si on change l'orientation de E_2).

Dans toute la suite nous désignerons par $\theta = (\vec{e}, \vec{e'})$ la mesure de l'angle Θ dont un représentant est $\{\vec{e}, \vec{e'}\}$.

Remarque. — D'après un résultat obtenu au 3°, *a*), on a

$$\cos(\vec{e}, \vec{e'}) = \vec{e}.\vec{e'},$$

résultat indépendant du choix de l'orientation de E_2, ce qui est dû à ce que $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

c) ***Propriétés des angles***. — I. — D'après la définition de l'addition : l'élément neutre de l'addition est représenté par $\{\vec{e}, \vec{e}\}$ quel que soit $\vec{e}$;

on a

$$\forall \vec{e}, \forall \vec{e'} \qquad \text{angle}(\vec{e}, \vec{e'}) = -\text{angle}(\vec{e'}, \vec{e});$$

$$\forall \vec{e}, \forall \vec{e'}, \forall \vec{e''} \qquad \text{angle}(\vec{e}, \vec{e'}) + \text{angle}(\vec{e'}, \vec{e''}) = \text{angle}(\vec{e}, \vec{e''}),$$

cette dernière formule est dite *relation de Chasles*.

II. Angle plat. — Tous les couples $\{\vec{e}, -\vec{e}\}$, formés de vecteurs unitaires opposés (au sens de l'addition dans E_2) sont les représentants d'un même angle dit *angle plat*, dont la rotation associée est la symétrie par rapport à l'origine.

La matrice de cette rotation est $-I$, ou S_π; la mesure de l'angle plat est donc π (par exception, elle est indépendante du choix de l'orientation).

III. Angles droits. — Si un angle a un représentant formé de deux vecteurs orthogonaux, $\vec{e}$ et $\vec{e'}$, sa mesure θ vérifie : $\cos\theta = \vec{e}.\vec{e'}$ ou 0, c'est-à-dire $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

Inversement, tous les couples des vecteurs d'une base orthonormée positive (resp. négative) de E_2 sont des représentants de l'angle dont la mesure est $+\frac{\pi}{2}\left(\text{resp.} -\frac{\pi}{2}\right)$.

En effet soit $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ une base orthonormée positive; $\{\vec{i}, -\vec{j}\}$ est une

base orthonormée négative. La rotation de mesure $+\frac{\pi}{2}\left(\text{resp.} -\frac{\pi}{2}\right)$ a pour matrice représentative, dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, J (resp. — J), avec

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On constate que cette rotation transforme $\vec{i}$ en $\vec{j}\left(\text{resp.} -\vec{j}\right)$, ce qui établit la propriété.

Les deux angles de mesures $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont dits *angles droits*. Ils se transposent quand on change l'orientation du plan. Θ étant l'un quelconque d'entre eux, $2\,\Theta$, qui admet la mesure π, est l'angle plat.

Application. — *Interprétation d'une rotation.* — Toute matrice réelle (2, 2) orthogonale droite s'écrit

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad I\cos\theta + J\sin\theta.$$

Il en résulte que si r et ρ désignent les rotations dont les mesures dans E_2 orienté sont respectivement θ et $+\frac{\pi}{2}$, et dont les matrices sont S_θ et J, on a, pour tout vecteur $\vec{M}$ de E_2 :

$$r\left(\vec{M}\right) = \vec{M}\cos\theta + \rho\left(\vec{M}\right)\sin\theta.$$

4° **Angle de deux vecteurs non nuls de E_2.** — Définition. — **Étant donné un couple rangé $\{\vec{V}, \vec{V'}\}$ de vecteurs de E_2, on appelle angle de ces vecteurs l'angle des deux vecteurs unitaires $\vec{e}$ et $\vec{e'}$ définis par**

$$\vec{V} = \left\|\vec{V}\right\|\vec{e} \qquad \text{et} \qquad \vec{V'} = \left\|\vec{V'}\right\|\vec{e'}.$$

La mesure de cet angle, dans E_2 orienté, est désignée par $\left(\vec{V}, \vec{V'}\right)$.

On a, indépendamment du choix de l'orientation, $\cos\left(\vec{V}, \vec{V'}\right) = \vec{e}.\vec{e'}$ ou

$$\boxed{\cos\left(\vec{V}, \vec{V'}\right) = \frac{\vec{V}.\vec{V'}}{\left\|\vec{V}\right\|\left\|\vec{V'}\right\|}} \tag{1}$$

5° **Angle de deux vecteurs dans un espace vectoriel euclidien de dimension quelconque, finie ou infinie.** — Définition. — **On appelle angle de deux vecteurs non nuls, dans un espace vectoriel euclidien, l'angle de ces vecteurs dans le sous-espace vectoriel E_2 qu'ils engendrent ou, s'ils sont colinéaires, dans tout sous-espace de dimension 2 qui les contient.**

La formule (1) reste valable.

112. ***Angles dans un espace affine euclidien.*** — Soit E un espace affine euclidien, associé à un espace vectoriel euclidien $\vec{E}$, de dimension finie ou infinie.

1° Définition. — **On appelle angle de deux bipoints, ou vecteurs liés,** (P, Q) **et** (P′, Q′) **de** E, **l'angle des vecteurs** $\overrightarrow{PQ}$ **et** $\overrightarrow{P'Q'}$ **de** $\vec{E}$.

2° Étant donné un point A de E et un vecteur $\vec{V} \neq \vec{0}$ de $\vec{E}$, on appelle demi-droite l'ensemble des points de E de la forme $A + \rho\vec{V}, \rho > 0$; $\vec{V}$ est un vecteur directeur de la demi-droite.

Définition. — **On appelle angle de deux demi-droites de l'espace affine** E **l'angle de deux vecteurs directeurs, arbitrairement choisis.**

Cette définition est justifiée par le fait que l'angle de deux vecteurs de $\vec{E}$ ne change pas quand on multiplie l'un d'eux par un réel positif.

Remarquons que, dans les questions d'angles, les demi-droites de l'espace affine E n'interviennent qu'à une translation près.

III. PRODUIT MIXTE. PRODUIT VECTORIEL

113. ***Isomorphisme canonique entre un espace vectoriel euclidien de dimension finie et son dual.*** — 1° Théorème direct. — **Étant donné un espace vectoriel euclidien** E, **et un vecteur fixe** $\vec{G}$ **de** E, **l'application** g **de** E **dans** R **qui au vecteur générique** $\vec{X}$ **de** E **associe le réel** $g(\vec{X}) = \vec{G}.\vec{X}$ **est une forme linéaire sur** E.

Cela résulte du fait que, par sa définition même, le produit scalaire est une forme bilinéaire.

2° Théorème réciproque. — **Étant donné un espace vectoriel euclidien** E, **de dimension finie, et une forme linéaire sur** E, g, **il existe un vecteur fixe** $\vec{G}$ **de** E, **et un seul, tel que**

$$\forall \vec{X} \in E \qquad g(\vec{X}) = \vec{G}.\vec{X}.$$

En effet, les applications linéaires de E dans E*, δ et γ associées (n° 7) à droite et à gauche au produit scalaire $\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$ dont E a été muni sont *confondues*, puisque la forme bilinéaire φ est *symétrique*. On a vu (7, 3°) que, la forme φ étant *non dégénérée*, δ est injective; et comme E et E* ont une dimension finie, δ est *bijective*.

Autrement dit, l'application linéaire bijective δ de E sur E* associe au vecteur générique $\vec{Y}$ de E la forme linéaire $y = \delta(\vec{Y})$ déterminée par

$$(\forall \vec{X} \in E) \qquad y(\vec{X}) = \vec{X}.\vec{Y}.$$

En associant à une forme g quelconque de E* le vecteur $\vec{G} = \delta^{-1}(g)$ de E, on obtient le théorème réciproque.

Notons que l'isomorphisme δ de E sur E* que nous venons d'introduire dans le cas d'espaces vectoriels de dimension finie est canonique, en ce sens qu'aucune base n'intervient (il dépend cependant du choix du produit scalaire sur E).

3° **Analogie entre endomorphisme transposé et endomorphisme symétrique.** — Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E, de dimension finie n. Nous avons défini (I, 186) l'application linéaire $\tilde{f}$ transposée de f, qui est ici l'endomorphisme de E* déterminé par

$$(\forall \psi \in E^*) \qquad \tilde{f}(\psi) = \psi \circ f.$$

En remplaçant ψ par $y = \delta(\vec{Y})$,

$$\tilde{f}\left[\delta(\vec{Y})\right] = \delta(\vec{Y}) \circ f \qquad \text{ou} \qquad (\tilde{f} \circ \delta)(\vec{Y}) = y \circ f.$$

L'image du vecteur générique $\vec{X}$ de E par $y \circ f$ est $y\left[f(\vec{X})\right] = f(\vec{X}).\vec{Y}$.

D'autre part, δ étant une bijection, $\tilde{f} \circ \delta$ peut s'écrire $\delta \circ (\delta^{-1} \circ \tilde{f} \circ \delta)$. En posant

$$g = \delta^{-1} \circ \tilde{f} \circ \delta,$$

on a : $$(\tilde{f} \circ \delta)(\vec{Y}) = (\delta \circ g)(\vec{Y}) \qquad \text{ou} \qquad \delta\left[g(\vec{Y})\right]$$

et l'image que cette forme linéaire donne du vecteur générique $\vec{X}$ de E est

$$\vec{X}.g(\vec{Y}).$$

En conclusion, $g = \delta^{-1} \circ \tilde{f} \circ \delta$ est un endomorphisme de E qui vérifie

$$(\forall (\vec{X}, \vec{Y}) \in E \times E) \qquad X.\vec{g}(\vec{Y}) = f(\vec{X}).\vec{Y}.$$

g est donc un endomorphisme symétrique de f, au sens de la définition donnée au n° 43, 1°.

Tout autre endomorphisme symétrique de f, soit g_1, coïncide avec g : en effet, en posant $h = g - g_1$, nous avons

$$(\forall (\vec{X}, \vec{Y}) \in E \times E) \qquad \vec{X}.h(\vec{Y}) = 0.$$

La forme bilinéaire φ du produit scalaire n'étant pas dégénérée, l'égalité précédente, vraie quelque soit $\vec{X}$ de E, entraîne que $h(\vec{Y}) = \vec{0}$ quel que soit l'élément $\vec{Y}$ de E, ce qui montre que h est l'endomorphisme nul de E.

Remarque. — Si on a pris dans E et E* des bases duales orthonormées, les matrices de δ et δ^{-1} sont confondues avec la matrice-unité d'ordre n; si, dans les matrices qui représentent f (resp. $\tilde{f}$) on met en colonnes les coordonnées de l'image par f (resp. $\tilde{f}$) d'un élément de E (resp. E*), la matrice de $\tilde{f}$ est la transposée de celle de f (I, 186, 3°), et on retrouve le résultat du n° 43, 2°.

114. *Produit mixte.* — Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension finie n, orienté par le choix d'une base de référence (orthonormée).

1° Théorème et définition. — **Le déterminant d'un système rangé**

$$\mathcal{V} = \{\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n\}$$

de n vecteurs de E est le même dans toutes les bases orthonormées positives de E; il est appelé produit mixte (1) des vecteurs de $\mathcal{V}$ et désigné par la notation $(\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n)$.

En effet, $\mathcal{U} = \{\vec{u}_i\}$ et $\mathcal{U}' = \{\vec{u}'_i\}$ étant deux bases quelconques de E, nous avons (I, 199, 2°)

$$\text{dét}_{\mathcal{U}}[\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n] = \text{dét}_{\mathcal{U}'}[\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n] \times \text{dét}_{\mathcal{U}}[\vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n].$$

Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont deux bases orthonormées de même orientation

$$\text{dét}_{\mathcal{U}}[\vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n] = \text{dét}\,P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = +1,$$

ce qui démontre la proposition.

2° **Propriétés du produit mixte.** — Le lecteur se reportera aux propriétés des déterminants.

a) *Le produit mixte est une notion axiale* : si on change l'orientation de E, le produit mixte de n vecteurs de E est remplacé par le nombre réel opposé.

b) *Le produit mixte est une forme n-linéaire et alternée sur* E (I, 192).

c) Le produit mixte de n vecteurs de E est nul si, et seulement si, ces vecteurs forment un système lié.

d) *Une base $\mathcal{V}$ de* E *est positive ou négative suivant que le produit mixte des vecteurs de $\mathcal{V}$ est positif ou négatif;* ce produit mixte est en effet la matrice de passage de la base de référence à la base $\mathcal{V}$.

e) Le produit mixte de n vecteurs de E est égal au produit mixte de leurs transformés dans tout endomorphisme de E dont le déterminant est $+1$, et en particulier dans toute rotation.

---

(1) Le vocable *produit mixte* provient de ce qu'il s'agit — ainsi que nous le montrerons au n° 115 — du produit *scalaire* de deux vecteurs, dont l'un est lui-même un produit *vectoriel*.

115. *Produit vectoriel.* — Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geqslant 3$, orienté.

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donné un système rangé $\{\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n-1}\}$ de $n-1$ vecteurs de E, il existe un vecteur $\vec{G}$ de E et un seul tel que, pour tout vecteur $\vec{X}$ de E, le produit mixte $(\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n-1}, \vec{X})$ soit égal au produit scalaire $\vec{G}.\vec{X}$; $\vec{G}$ est appelé produit vectoriel des $n-1$ vecteurs donnés et désigné par la notation $\vec{V}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{V}_{n-1}$.**

En effet, d'après le caractère multilinéaire du produit mixte, quand $\vec{X}$ parcourt E, le produit mixte

$$(1) \qquad f(\vec{X}) = (\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n-1}, \vec{X})$$

est une forme linéaire sur E. Il existe donc (113, 2°) un vecteur $\vec{G}$ de E et un seul tel que

$$(2) \qquad \forall \vec{X} \in E, \qquad f(\vec{X}) = \vec{G}.\vec{X}.$$

REMARQUE : $(\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n-1}, \vec{G})$, qui est égal à $\vec{G}.\vec{G}$ est un scalaire positif ou nul.

2° **Propriétés du produit vectoriel.** — *a) Le produit vectoriel est une notion axiale* : si on change l'orientation de E, le produit vectoriel de $n-1$ vecteurs de E est remplacé par le vecteur opposé.

b) Le produit vectoriel est une application multilinéaire et alternée de $(E)^{n-1}$ *dans* E.

c) Le produit vectoriel de $n-1$ vecteurs de E *est nul si, et seulement si ces vecteurs forment un système lié.*

En effet, en utilisant les relations (1) et (2), les trois propositions suivantes sont successivement équivalentes :

α) $\vec{G} = \vec{0}$

β) la forme linéaire f est nulle

γ) $\forall \vec{X} \in E$, le système $\{\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n-1}, \vec{X}\}$ est lié.

La proposition (γ) est évidemment réalisée si $\{\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n-1}\}$ est un système lié.

Si $\{\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n-1}\}$ est un système libre, on peut trouver, d'après le théorème de la base incomplète, un vecteur $\vec{V}_n$ tel que $\{\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n-1}, \vec{V}_n\}$ est un système libre, mais alors la proposition (γ) n'est pas vraie.

On en conclut, par l'absurde, l'équivalence logique

$$\vec{G} = \vec{0} \iff \{\vec{V}_1 \ldots, \vec{V}_{n-1}\} \text{ est lié.}$$

d) Le produit vectoriel de $n-1$ vecteurs de E *est orthogonal à chacun de ces vecteurs.*

En effet $\vec{G}.\vec{V}_j = f(\vec{V}_j)$ est le produit mixte d'un système lié; il est égal à 0.

3° **Coordonnées du produit vectoriel.** — Soit $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_i\}$ une base orthonormée positive, arbitrairement choisie de E. Posons

$$\vec{V}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i a_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n-1); \quad \vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i g_i.$$

L'égalité des deux formes linéaires

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} & x_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2,n-1} & x_2 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-1} & x_n \end{vmatrix} = g_1x_1 + g_2x_2 + \ldots + g_nx_n$$

se traduit par l'égalité des coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; il en résulte :

THÉORÈME. — **Dans toute base $\mathfrak{U}$ orthonormée positive de E, les coordonnées du produit vectoriel de $n-1$ vecteurs de E sont les cofacteurs des éléments de la dernière colonne d'un déterminant d'ordre n dont les $n-1$ premières colonnes sont formées avec les coordonnées des vecteurs donnés dans la base $\mathfrak{U}$.**

116. ***Le produit mixte et le produit vectoriel dans un espace vectoriel euclidien,*** E_3, ***de dimension trois, orienté.*** — Nous utiliserons dans E_3 les propriétés générales du produit mixte (n° 114) et du produit vectoriel (n° 115).

1° **Propriétés générales.** *a)* $\vec{G} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est orthogonal à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, soit

(I) $$\vec{G}.\vec{V}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{G}.\vec{V}_2 = 0.$$

b) $\vec{G} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ vérifie

(II) $$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{G}) \geqslant 0.$$

c) $$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = 0 \iff \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\} \text{ est un système lié.}$$
$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \iff \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\} \text{ est un système lié.}$$

d) $$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1, \quad (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = -(\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_3)$$
$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2).$$

Application. — Comme, d'après la définition même du produit vectoriel,

$$\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right).\vec{V}_3,$$

l'invariance du premier membre par substitution circulaire entraîne

$$\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right).\vec{V}_1 \quad \text{et} \quad \left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1\right).\vec{V}_2.$$

2° **Produit vectoriel des vecteurs d'une base orthonormée positive.** — Montrons que, pour toute base orthonormée, positive, $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, on a

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

En effet $\vec{i} \wedge \vec{j}$ étant orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$ est colinéaire à $\vec{k}$, soit

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \lambda \vec{k}.$$

Le produit mixte $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, égal à 1, s'écrit $\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right).\vec{k}$ ou $\lambda \vec{k}.\vec{k}$ ou λ.

3° **Norme d'un produit vectoriel.** — Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ de E_3. Supposons d'abord $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$; désignons par Δ le sous-espace vectoriel de E_3 qui est engendré par $\vec{V}_1$ et par Π le sous-espace orthogonal de Δ dans E_3; Δ et Π sont respectivement une droite et un plan issus de l'origine.
Désignons par $\vec{V}'_2$ et $\vec{V}''_2$ les projections orthogonales de $\vec{V}_2$ sur Δ et sur Π.

Compte tenu de : $\quad \vec{V}_2 = \vec{V}'_2 + \vec{V}''_2$

et de $\quad \vec{V}_1.\vec{V}''_2 = 0 \quad$ et $\quad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}'_2 = \vec{0}$

la linéarité des produits scalaire et vectoriel donne

$$(1) \qquad \vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{V}_1.\vec{V}'_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}''_2.$$

a) La formule de Cauchy-Schwarz, appliquée au système lié $\left\{\vec{V}_1, \vec{V}'_2\right\}$, s'écrit

$$(2) \qquad \left(\vec{V}_1.\vec{V}'_2\right)^2 = \left\|\vec{V}_1\right\|^2 \times \left\|\vec{V}'_2\right\|^2.$$

b) Il existe deux vecteurs unitaires orthogonaux, $\vec{I}$ et $\vec{J}$, tels que

$$\vec{V}_1 = \left\|\vec{V}_1\right\| \vec{I} \qquad \text{et} \qquad \vec{V}''_2 = \left\|\vec{V}''_2\right\| \vec{J}$$

(le vecteur $\vec{J}$ n'est d'ailleurs pas unique si $\vec{V}''_2 = \vec{0}$).

Nous avons

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}''_2 = \left(\left\|\vec{V}_1\right\| \times \left\|\vec{V}''_2\right\|\right) \vec{I} \wedge \vec{J}.$$

Compte tenu de $\left\|\vec{I} \wedge \vec{J}\right\| = 1$, il en résulte

$$\left\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2''\right\|^2 = \left\|\vec{V}_1\right\|^2 \times \left\|\vec{V}_2''\right\|^2. \tag{3}$$

c) Compte tenu de (1), on déduit de (2) et (3), par addition membre à membre

$$\left(\vec{V}_1 . \vec{V}_2\right)^2 + \left\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right\|^2 = \left\|\vec{V}_1\right\|^2 \times \left(\left\|\vec{V}_2'\right\|^2 + \left\|\vec{V}_2''\right\|^2\right).$$

Or la relation de Pythagore (17, 2°), donne

$$\left\|\vec{V}_2'\right\|^2 + \left\|\vec{V}_2''\right\|^2 = \left\|\vec{V}_2\right\|^2.$$

Finalement on obtient l'égalité, dite de Lagrange,

$$\boxed{\left(\vec{V}_1 . \vec{V}_2\right)^2 + \left\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right\|^2 = \left\|\vec{V}_1\right\|^2 \times \left\|\vec{V}_2\right\|^2.} \tag{III}$$

Notons que cette égalité, établie en supposant $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$, est vérifiée même si $\vec{V}_1 = \vec{0}$, car dans ce cas les deux membres sont égaux à 0, pour tout vecteur $\vec{V}_2$.

4° **Deuxième définition du produit vectoriel dans** E_3. — Le 3° nous apprend que, étant donnés les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, le vecteur $\vec{G} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est une solution du système formé par les équations vectorielles suivantes dans lesquelles $\vec{W}$ désigne l'inconnue :

$$\vec{W} . \vec{V}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{W} . \vec{V}_2 = 0 \tag{I}$$

$$\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W}\right) \geqslant 0 \tag{II}$$

$$\left\|\vec{W}\right\|^2 = \left\|\vec{V}_1\right\|^2 \times \left\|\vec{V}_2\right\|^2 - \left(\vec{V}_1 . \vec{V}_2\right)^2. \tag{III}$$

Inversement, considérons l'un quelconque des vecteurs $\vec{W}$ qui vérifient (I), (II), (III).

La relation (III) impose : $\left\|\vec{W}\right\| = \left\|\vec{G}\right\|$.

Cela posé distinguons :

1er CAS : $\left\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\right\}$ *est lié.* On a $\vec{G} = \vec{0}$; l'égalité des normes impose $\vec{W} = \vec{G}$.

2e CAS : $\left\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\right\}$ *est libre.* $\vec{G}$ et $\vec{W}$ sont non nuls; d'après (I), ils appartiennent au sous-espace vectoriel de E_3 orthogonal au sous-espace engendré par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$; autrement dit

$$\vec{W} = \rho \vec{G} \qquad (\rho \neq 0).$$

On a alors

$$\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W}\right) = \rho\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{G}\right)$$

et la relation (II) impose $\rho > 0$.

Compte tenu de l'égalité des normes : $\rho = 1$ et $\vec{W} = \vec{G}$.

Cette étude nous permet d'énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donnés deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, il existe un, et un seul, vecteur $\vec{G}$ qui vérifie les trois conditions**

(I) $$\vec{G}.\vec{V}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{G}.\vec{V}_2 = 0$$

(II) $$\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{G}\right) \geqslant 0$$

(III) $$\|\vec{G}\|^2 = \|\vec{V}_1\|^2 \times \|\vec{V}_2\|^2 - \left(\vec{V}_1 \,.\, \vec{V}_2\right)^2.$$

Ce vecteur $\vec{G}$ est appelé produit vectoriel de $\vec{V}_1$ par $\vec{V}_2$.

REMARQUE. — Si (ce qui est actuellement le cas pour nous), on dispose de la notion d'angle, la relation (III) peut prendre une forme nouvelle. En effet, si $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$ est libre, on peut introduire l'angle des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$; on a alors (quelle que soit l'orientation), en désignant par θ la mesure algébrique de l'angle :

$$\vec{V}_1 \,.\, \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \times \cos\theta.$$

Compte tenu de $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$, on constate que

$$\text{(III)} \iff \begin{cases} \|\vec{G}\| = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \times |\sin\theta| & \text{si } \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\} \text{ est libre.} \\ \vec{G} = \vec{0} & \text{si } \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\} \text{ est lié.} \end{cases}$$

5° **Expressions analytiques du produit mixte et du produit vectoriel.** — Soit $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ une base orthonormée, positive, arbitrairement choisie, de E_3.

Posons $$\vec{V}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nous avons (114 et 115) :

$$\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

et $$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}, \quad \text{avec}$$

$$L = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = Y_1Z_2 - Z_1Y_2, \qquad M = -\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = Z_1X_2 - X_1Z_2,$$

$$N = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix} = X_1Y_2 - Y_1X_2,$$

formules qu'il peut être commode de retenir sous la forme symbolique

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \vec{i} \\ Y_1 & Y_2 & \vec{j} \\ Z_1 & Z_2 & \vec{k} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} L \\ M \\ N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{vmatrix}$$

L'égalité de Lagrange, obtenue au 3° s'écrit :

$$(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2)^2 + (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + (Z_1X_2 - X_1Z_2)^2 + (X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 = (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)(X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2).$$

6° **Division vectorielle et double produit vectoriel.** — Ces questions sont traitées aux nos 127 et 129.

D'autre part le lecteur trouvera au n° 124, 2° un complément sur l'expression du produit scalaire dans un repère qui n'est pas orthonormé.

EXERCICES

1. — Dans l'espace affine euclidien E_n, rapporté à un repère $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, (orthonormé ou non), on donne le point M de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et l'hyperplan H d'équation : $u_1x_1 + \ldots + u_nx_n + h = 0$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale de M sur H et celles du symétrique de M par rapport à H.

2. — Dans l'espace affine euclidien E_n, on donne deux points A et B. Montrer qu'il existe un, et un seul, hyperplan H tel que la symétrie par rapport à H échange A et B; H, qui est le lieu des points équidistants de A et B, est appelé *plan médiateur* de AB.

3. — *a*) Montrer que, dans l'espace affine euclidien E_n, toute isométrie g peut être considérée comme le produit de symétries par rapport à des hyperplans, en nombre au plus égal à $n + 1$. On considérera un repère orthonormé $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_k\}$ et on lui associera le repère orthonormé $\mathcal{R}' = \{O', \vec{e}'_k\}$, tel que $O' = g(O)$ et $O' + \vec{e}'_k = g(O + \vec{e}_k)$.

On désignera par σ_0 la symétrie par rapport à un hyperplan qui transforme O' en O, par σ_1 celle qui transforme $\sigma_0(O + \vec{e}_1)$ en $O + \vec{e}'_1$, ...

b) Montrer que, dans l'espace affine euclidien E_4, tout déplacement peut être considéré comme le produit de 4 symétries par rapport à 4 hyperplans.

4. — *a*) Dans l'espace vectoriel euclidien $\vec{E}_n$, on considère une isométrie involutive f. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_k\}$ de E_n telle que, pour tout k, $f(\vec{e}_k) = \pm \vec{e}_k$. (On considérera les parties $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ de $\vec{E}_n$ respectivement formées par les vecteurs $\vec{X}'$ tels que $f(\vec{X}') = \vec{X}'$ et par les vecteurs $\vec{X}''$ tels que $f(\vec{X}'') = -\vec{X}''$ et on montrera que $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\vec{E}_n$).

b) En déduire qu'une isométrie involutive g d'un espace affine euclidien E_n peut être considérée comme le produit de symétries par rapport à des hyperplans deux à deux orthogonaux. Que peut-on dire du nombre de ces symétries?

5. — Dans un espace vectoriel euclidien $\vec{E}_n$, une famille de vecteurs $\mathcal{G} = \{\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p\}$ est dite « obtusangle » si pour tout couple d'indices i et j tels que $i \neq j$ on a : $\vec{V}_i . \vec{V}_j < 0$.

a) Montrer que si $\mathcal{S} = \{ \vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p \}$ est obtusangle et si $\vec{V}'_k$ est la projection orthogonale de $\vec{V}_k$ sur le sous-espace $\vec{E}'$ orthogonal à $\vec{V}_p$ dans $\vec{E}_n$, le système $\mathcal{S}' = \{ \vec{V}'_1, \ldots, \vec{V}'_{p-1} \}$ est, lui aussi, obtusangle.

b) En déduire que, dans $\vec{E}_n$, un système obtusangle contient au maximum $n + 1$ vecteurs.

c) Donner, pour $n = 3$ et $n = 4$ des exemples de systèmes obtusangles formés de $n + 1$ vecteurs.

6. — Dans un espace vectoriel réel $\vec{E}_n$, une famille de vecteurs $\mathcal{S} = \{ \vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p \}$, $(p > n)$, est dite « ébouriffée » si tout système de n vecteurs de $\mathcal{S}$ est une base et si, dans cette base, les coordonnées de tout autre élément de $\mathcal{S}$ sont négatives.

a) Soit $\mathcal{S} = \{ \vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{n+1} \}$ une famille ébouriffée à $n + 1$ éléments. Montrer qu'à tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{E}_n$ on peut associer un, et un seul, système de $n + 1$ réels λ_i qui vérifient les conditions :

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{V}_i, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \exists\, i \text{ tel que } \lambda_i = 0.$$

Montrer que toute famille ébouriffée a exactement $n + 1$ éléments.

b) Dans un espace euclidien $\vec{E}_3$ montrer qu'une famille obtusangle à 4 éléments (ex. n° 5) est ébouriffée. La réciproque est-elle vraie?

7. — *a*) Montrer que dans un espace affine euclidien, un segment de droite AB est le lieu des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA}\| + \|\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

b) En déduire que toute application d'un espace affine euclidien dans lui-même qui conserve la distance conserve également l'alignement.

a) Montrer que les seules applications d'un espace affine euclidien dans lui-même qui conservent la distance sont les isométries (on étudiera d'abord le cas d'une application qui conserve un point donné).

8. — Montrer que la norme du produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs de l'espace vectoriel euclidien $\vec{E}_n$ est au plus égale au produit des normes des vecteurs; interpréter le cas d'égalité (on utilisera l'exercice n° 5, chap. II).

*9. — Dans l'espace affine euclidien E_4, on considère une courbe Γ tracée sur la sphère S de centre O et de rayon R : Γ est une application $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(t)$ d'un segment réel $[\alpha, \beta]$ dans E_4, qui vérifie, pour tout t, $\|\overrightarrow{OM}\| = R$.

On suppose que la fonction $\vec{F}$ admet une dérivée continue; on appelle abscisse curviligne sur Γ l'une des fonctions $s(t)$ définies par $\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|$ et on adopte s pour nouveau paramètre; on pose $\vec{t} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ et $\vec{N} = \frac{\overrightarrow{OM}}{R}$ (vecteur unitaire normal en M à S).

a) Montrer qu'à tout point M de Γ on peut associer un repère orthonormé

$$\{ M, \vec{t}, \vec{N}, \vec{n}, \vec{b} \}$$

tel que

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = c_n \vec{N} + c_g \vec{n}; \qquad \frac{d\vec{N}}{ds} = -c_n \vec{t}; \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} = -c_g \vec{t} - \tau \vec{b}; \qquad \frac{d\vec{b}}{ds} = \tau \vec{n}.$$

b) Calculer c_n, c_g et τ dans le cas particulier où Γ est la courbe

$x_1 = a \cos t, \quad x_2 = a \sin t, \quad x_3 = b \cos \omega t, \quad x_4 = b \sin \omega t \quad (a^2 + b^2 = R^2).$

PROBLÈMES DE RÉCAPITULATION SUR LA PREMIÈRE PARTIE

1. — Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle continues sur le segment $[0, 2\pi]$. On définit sur $\mathcal{F}$:

un *produit scalaire* : $< f, g > = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$, et une *norme* : $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$.

La *distance* des fonctions f et g de $\mathcal{F}$ est la norme de $f - g$.

a) Soit $\hat{\mathcal{F}}$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ engendér par le système :

$$\mathcal{U} = \{ u_0, u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_n \}$$

où l'on a posé $$u_p = \cos px.$$

Démontrer que les fonctions du système $\mathcal{U}$ sont deux à deux orthogonales. Calculer leurs normes. Déduire des résultats obtenus que $\mathcal{U}$ est une base de $\hat{\mathcal{F}}$.

Construire, à partir de $\mathcal{U}$, une base de $\hat{\mathcal{F}}$, soit $\mathcal{V} = \{ v_0, v_1, \ldots, v_n \}$ qui soit orthonormée. On donne $\hat{f} = \sum_0^n a_i v_i$ et $\hat{g} = \sum_0^n b_i v_i$. Calculer $< \hat{f}, \hat{g} >$ et $\|\hat{f}\|$.

b) Soit f un élément quelconque de $\mathcal{F}$. On propose de déterminer une fonction $\hat{f}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ telle que la distance $\|f - \hat{f}\|$ soit minimale.

Pour cela, on se donnera une fonction $\hat{f}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ par ses composantes dans la base $\mathcal{V}$: $\hat{f}(x) = \sum_{p=0}^n a_p v_p$, et on établira la formule :

$$\|f - \hat{f}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{p=0}^n (< f, v_p >)^2 + \sum_{p=0}^n (a_p - < f, v_p >)^2.$$

Puis on calculera les coefficients a_p qui rendent minimale la distance $\|f - \hat{f}\|$.

Démontrer qu'alors $$\|f - \hat{f}\|^2 = \|f\|^2 - \|\hat{f}\|^2.$$

$\|f - \hat{f}\|$ est appelé « *écart quadratique moyen* » de f et $\hat{f}$.

c) Déterminer $\hat{f}$ lorsque $f(x) = x^2$, ainsi que l'écart $\|f - \hat{f}\|$.

2. — Soit E_n l'espace vectoriel formé par le polynôme nul et les polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Nous désignerons par k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

a) Vérifier que si on pose

$$< p, q > = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} p(x) q(x) dx \qquad p, q \in E_n$$

on définit sur E_n une structure euclidienne.

b) Montrer qu'il existe, dans E_n, $n + 1$ polynômes linéairement indépendants $q_0, q_1, \ldots, q_n$ de degrés respectifs $0, 1, \ldots, n$, deux à deux orthogonaux et dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

Déterminer q_0, q_1, et q_2.

c) Montrer que si q est un polynôme de degré inférieur à k alors

$$< q, q_k > = 0.$$

d) Montrer que q_k peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad q_k = x q_{k-1} + \alpha q_{k-1} + \beta q_{k-2} \qquad (\alpha \text{ et } \beta \in \mathbf{R}).$$

e) Montrer que si p est un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant k - 2$, alors

$$< q_p, q'_k > = 0.$$

En déduire que $$q'_k = kq_{k-1}$$

et que dans la formule (1) on a :

$$\alpha = 0 \qquad \beta = -\frac{k-1}{2}.$$

f) Montrer que q_k satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre suivant

$$y'' - 2\,xy' + 2\,ky = 0.$$

3. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps des réels.

a) Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$, p endomorphismes de E tels que $f_1 + f_2 + \ldots + f_p$ soit l'endomorphisme identique de E et que

$$\text{rang de } f_1 + \text{rang de } f_2 + \ldots + \text{rang de } f_p = \dim E = n.$$

α) Démontrer que E est somme directe des sous-espaces $f_1(E), f_2(E), \ldots, f_p(E)$.

β) Démontrer que $f_i^2 = f_i$ et que $f_i \circ f_j = o$ ($\forall\, i, j$) (o est l'endomorphisme nul de E).

γ) Démontrer que la restriction de f_i à $f_i(E)$ est l'endomorphisme identique de $f_i(E)$.

δ) Soit $\mathcal{U}_i$ une base quelconque de $f_i(E)$. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f_i dans la base

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_p \qquad \text{de E?}$$

b) On définit sur E une structure euclidienne en y définissant un produit scalaire noté $< >$. On suppose désormais que les endomorphismes f_i sont auto-symétriques.

α) Démontrer que les sous-espaces $f_i(E)$ sont orthogonaux deux à deux. En déduire que les endomorphismes f_i sont simultanément diagonalisables dans une même base orthonormée de E.

β) Démontrer que $$<\vec{X}, \vec{X}> = \left\|\vec{X}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} <\vec{X}, f_i(\vec{X})>.$$

c) *Application.* — E étant rapporté à une base $\mathcal{B}$, on donne, sur E, p formes quadratiques $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$. On suppose que sont réalisées les conditions suivantes :

$$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg}\Phi_i = n \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \Phi_i(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \left(\forall\, \vec{X} \in E\right)$$

(les x_i sont les composantes de $\vec{X}$ dans $\mathcal{B}$).

Démontrer l'existence d'une matrice orthogonale S telle qu'en posant :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix}, \qquad \text{on ait :}$$

$$\Phi_1(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{r_1} x_i'^2, \qquad \Phi_2(\vec{X}) = \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} x_i'^2, \ldots$$

$$\Phi_p(\vec{X}) = \sum_{i=r_1+r_2+\ldots+r_{p-1}+1}^{n} x_i'^2$$

4. — On se place dans un espace vectoriel euclidien E de dimension 3.

Soit $\mathcal{V} = \{\vec{e}_i\}$ ($i = 1, \ldots, n$) un système de vecteurs tels que, pour tout vecteur $\vec{U}$ de E on ait :

(A) : $$\left\|\vec{U}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{U}.\vec{e_i}\right)^2.$$

a) Montrer que (A) est équivalente à la condition :

(B) : Quels que soient les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ de E on a :

$$\vec{V}.\vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{V}.\vec{e_k}\right)\left(\vec{W}.\vec{e_k}\right).$$

On désigne par G la matrice carrée d'ordre n d'éléments $g_{ij} = \vec{e_i}.\vec{e_j}$.
Montrer que (B) entraîne la propriété (C) : $G^2 = G$.

b) On suppose $n = 3$. Montrer que $\mathcal{V}$ est une base de E. En déduire que G est inversible et que G est la matrice unité. Qu'en résulte-t-il pour les trois vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$?

c) Dans une base orthonormée de E, on définit les trois vecteurs suivants par leurs coordonnées :

$$\vec{e_1} : \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right); \quad \vec{e_2} : \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right); \quad \vec{e_3} : \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{e_4} \neq \vec{0}$ tel que, pour tout vecteur $\vec{U}$ on ait :

$$\left\|\vec{U}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(\vec{U}.\vec{e_i}\right)^2.$$

5. — L'espace vectoriel euclidien R^4 est rapporté à une base $\mathcal{B}$ dans laquelle un vecteur $\vec{V}$ a pour composante a, b, c, d. A ce vecteur on associe le nombre réel

$$\Phi\left(\vec{V}\right) = b^2 + c^2 - 4\,ad.$$

On définit ainsi une forme quadratique Φ ; soit φ sa forme polaire.

a) Écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$. Quel est le rang de Φ? Y a-t-il des vecteurs singuliers? des vecteurs doubles?

b) On considère par ailleurs, dans un plan affine euclidien, un repère orthonormé Ox, Oy : A quelle condition peut-on associer au vecteur $\vec{V}$ de R^4 une courbe *réelle* (cercle ou droite), notée $L\left(\vec{V}\right)$, ayant pour équation

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0?$$

Que peut-on dire des courbes $L\left(\vec{V}\right)$, $L\left(\vec{V'}\right)$ associés à deux vecteurs conjugués par rapport à Φ?

c) Soient $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ deux vecteurs de R^4 tels que $L\left(\vec{V}\right)$ et $L\left(\vec{V'}\right)$ existent. Dans le cas où $L\left(\vec{V}\right)$ et $L\left(\vec{V'}\right)$ sont des cercles, exprimer

$$\omega\left(\vec{V}, \vec{V'}\right) = \varphi^2\left(\vec{V}, \vec{V'}\right) - \Phi\left(\vec{V}\right)\Phi\left(\vec{V'}\right)$$

en fonction de la distance des centres, et des rayons, de ces courbes.

Interpréter géométriquement le rapport

$$r\left(\vec{V}, \vec{V'}\right) = \frac{\varphi^2\left(\vec{V}, \vec{V'}\right)}{\Phi\left(\vec{V}\right)\Phi\left(\vec{V'}\right)}$$

Si $L\left(\vec{V}\right)$ et $L\left(\vec{V'}\right)$ sont quelconques interpréter les conditions

$$\omega\left(\vec{V}, \vec{V'}\right) > 0 \quad \text{ou} \quad < 0, \qquad r\left(\vec{V}, \vec{V'}\right) < 1 \quad \text{ou} \quad > 1.$$

(*Le problème est susceptible d'une extension à l'espace* R^5 *et aux sphères (ou plans) réels de l'espace euclidien élémentaire*).

6. — Soit E un espace affine de dimension 2, attaché à un espace vectoriel $\vec{E}$ sur le corps des réels. On rapporte E à un repère donné $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$

a) Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur $\vec{E}$ qui est représentée dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Déterminer une base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de $\vec{E}$ qui est orthonormée pour φ. Quelle est la matrice qui représente φ dans cette base? Écrire la matrice de passage de $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ à $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

b) Deux droites D et D' de E sont dites φ-perpendiculaires si elles admettent des vecteurs directeurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ tels que $\varphi(\vec{V}, \vec{V'}) = 0$.

Soient $P(x, y) = 0$ et $P'(x, y) = 0$ avec

$$P(x, y) \equiv ax + by + c \quad \text{et} \quad P'(x, y) \equiv a'x + b'y + c'$$

des équations de D et D' dans le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Exprimer par une relation entre a, b, a', b' que D et D' sont φ-perpendiculaires.

c) On appelle φ-hauteur d'un triangle la droite menée par un sommet et qui est φ-perpendiculaire au côté opposé. Prouver, en utilisant des équations dans $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, que les φ-hauteurs d'un triangle sont concourantes ou parallèles.

7. — Dans l'espace vectoriel euclidien R^n, on appelle *dynèdre* tout système libre $\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_p\}$ de p vecteurs de R^n tel que, quels que soient $i \neq j$, le réel

$$a_{ij} = -2\frac{\vec{X}_i . \vec{X}_j}{\|X_i\|^2}$$

est un entier positif ou nul.

Un dynèdre sera dit *irréductible* s'il est impossible de le considérer comme réunion de deux dynèdres disjoints et tels que tout vecteur de l'un soit orthogonal à tout vecteur de l'autre.

a) Montrer que, si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_i\}$ est une base orthonormée de R^n on a, pour tout vecteur non nul $\vec{X}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2(\vec{X}, \vec{e}_i) = 1.$$

b) Montrer que l'ensemble des vecteurs

$$\vec{X}_i = \vec{e}_i - \vec{e}_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

est un dynèdre. Est-il irréductible?

c) Pour deux vecteurs distincts $\vec{X}_i$, $\vec{X}_j$ d'un dynèdre, on pose $n_{ij} = a_{ij}a_{ji}$; calculer $\cos^2(\vec{X}_i, \vec{X}_j)$ en fonction de n_{ij} et en déduire que l'angle $(\vec{X}_i, \vec{X}_j)$ ne peut être que l'un des suivants : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$. Calculer $\frac{\|\vec{X}_i\|}{\|\vec{X}_j\|}$ en fonction de a_{ij} et de a_{ji} et en déduire les valeurs possibles pour le rapport des normes de deux vecteurs distincts et non orthogonaux d'un dynèdre.

d) Montrer que, à une homothétie et une transformation orthogonale près, il existe trois et seulement trois dynèdres irréductibles composés de deux vecteurs. Donner, dans R^2, des vecteurs $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$ d'un représentant de chacun de ces trois types de dynèdre.

e) Montrer que, pour un dynèdre $\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_p\}$, au plus $p-1$ des entiers $n_{ij} = 1, 2, \ldots, p$; $i \neq j$) peuvent être différents de 0 $\left(\text{calculer la norme du vecteur } \vec{X} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\vec{X}_i}{\|\vec{X}_i\|}\right)$.

f) Montrer qu'il existe au plus, à une permutation de 1, 2, 3 près, deux systèmes d'entiers n_{12}, n_{23}, n_{31} possibles pour un dynèdre irréductible $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3\}$. (On pourra procéder ainsi : utiliser d'abord le *e*) pour montrer que l'on peut supposer $\vec{X}_2$ et $\vec{X}_3$ orthogonaux; puis introduire un vecteur $\vec{Z}$ orthogonal à $\vec{X}_2$ et $\vec{X}_3$ et appartenant au sous-espace vectoriel engendré par $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3\}$ et déduire du *a*) que $n_{12} + n_{31} < 4$). Trouver dans R^3, un dynèdre $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3\}$ correspondant à chacun des systèmes obtenus.

8. — On désigne par I le segment réel $[a, b]$, avec $a < b$, et respectivement par $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ les espaces vectoriels des fonctions réelles de la variable réelle qui sont

($\mathcal{C}$) : continues sur I.

($\mathcal{E}$) : à dérivée continue sur I.

($\mathcal{F}$) : à dérivée seconde continue sur I, avec en outre : $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.

a) A toute fonction f de $\mathcal{E}$ on associe les réels

$$N_1(f) = \sup_{x \in I} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathcal{E}$ et que

$$(1) \qquad \forall f \in \mathcal{C}, \quad \forall g \in \mathcal{C} \qquad \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant N_2(f)N_2(g).$$

b) Dans cette question f est une fonction de $\mathcal{E}$. Montrer

$$(2) \qquad \forall x \in I \qquad |f(x) - f(a)| \leqslant \sqrt{x-a}\,N_2(f')$$

Montrer
$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{b-a}} N_2(f) + \sqrt{\frac{b-a}{2}} N_2(f')$$

En déduire qu'il existe deux réels positifs A et B tels que

$$N_1(f) \leqslant AN_2(f) + BN_2(f').$$

c) Montrer que l'application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans R déterminée par

$$(3) \qquad < f, g > = \int_a^b [f(x)g(x) + f'(x)g'(x)]\,dx$$

est un produit scalaire et que $N_3(f) = \sqrt{< f, f >}$ est une norme sur $\mathcal{E}$.

Vérifier que, si g est une fonction de $\mathcal{F}$, on a

$$< f, g > = \int_a^b f(x)[g(x) - g''(x)]\,dx.$$

Montrer qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall f \in \mathcal{E} \qquad N_1(f) \leqslant MN_3(f).$$

d) On donne les réels α et β, ainsi que la fonction p de $\mathcal{C}$. Montrer que l'application Φ de $\mathcal{E}$ dans R déterminée par

$$\Phi(f) = \int_a^b [f'^2(x) + p(x)f^2(x)]\,dx - \alpha f^2(a) - \beta f^2(b)$$

est une forme quadratique.

Montrer que, si $f \in \mathcal{E}$ et $g \in \mathcal{F}$, la forme polaire φ de Φ vérifie

$$\varphi(f, g) = \int_a^b [p(x)f(x)g(x) - f(x)g''(x)]\,dx.$$

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

CHAPITRE XI

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Le chapitre XI *ne s'adresse pas au lecteur qui aura déjà étudié la première partie du présent tome* III *(compléments d'algèbre) ; ce lecteur se reportera directement au chapitre* XII, *page* 252.

I. POINTS ET DIRECTIONS EN GÉOMÉTRIE AFFINE

Les notions affines sur les vecteurs de la géométrie élémentaire sont supposées connues du lecteur; elles ont été rappelées au chapitre IV du tome I. Nous désignerons par E l'espace vectoriel des vecteurs de la géométrie élémentaire, par $\mathcal{E}$ l'espace affine associé.

117. ***Repère dans un espace affine.*** — (Rappel de I, n° 65 et n° 66).

1° **Définitions.** — Un repère cartésien est défini dans l'espace par un point O (appelé origine) et par trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ indépendants; il s'agit de trois vecteurs non nuls tels que leurs représentants issus de O soient portés par les arêtes d'un trièdre. On peut omettre l'adjectif « cartésien » quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Ces représentants sont les vecteurs unitaires sur les axes correspondants $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

La relation

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

établit une correspondance biunivoque entre les points M de l'espace $\mathcal{E}$ et les triplets rangés (x, y, z), éléments de l'ensemble R^3; les composants du triplet sont respectivement appelés *abscisse, ordonnée, cote* de M.

Le repère précédent est désigné par la notation $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ou $Oxyz$.

Dans une question de géométrie plane, le repère est $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ ou Oxy.

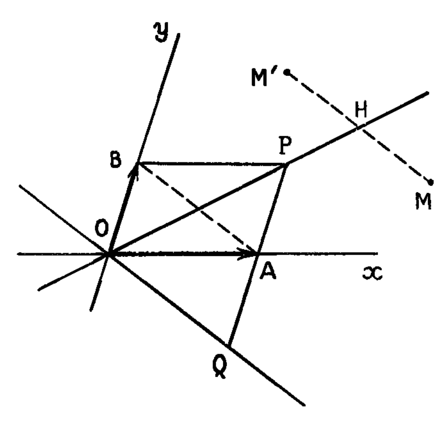


Fig. 7.

2° Diagonales d'un repère cartésien plan. — Soit Oxy un repère plan;

soit $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ (fig. 7);

$\overrightarrow{OP} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{i} - \vec{j}$;

OP est une diagonale du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, OQ est parallèle à l'autre diagonale de ce parallélogramme. Les droites OP et OQ sont appelées *première diagonale* et *seconde diagonale* du repère cartésien Oxy.

Ces diagonales interviennent lorsqu'on compare les points $M(a, b)$ et $M'(b, a)$ obtenus par transposition de leurs coordonnées.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= a\vec{i} + b\vec{j}\\ \overrightarrow{OM'} &= b\vec{i} + a\vec{j}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} &= (a+b)(\vec{i}+\vec{j})\\ \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} &= (b-a)(\vec{i}-\vec{j}).\end{aligned}\right.$$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à la seconde diagonale, et le milieu de MM' est un point de la première diagonale.

Les points M et M' sont symétriques par rapport à la première diagonale, relativement à la direction de la seconde diagonale.

118. *Vecteurs colinéaires* — 1° Définition. — **On dit que deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont colinéaires pour exprimer qu'ils forment un système lié.**

Cela signifie qu'il existe deux nombres réels λ et λ' non simultanément nuls tels que

$$\lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V'} = \vec{0};$$

α) ou bien l'un des vecteurs est nul;

β) ou bien si $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne sont pas nuls, leurs représentants de même origine ont même support; deux représentants quelconques ont des supports parallèles.

Supposons que les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$, non nuls tous les deux, soient donnés, dans le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ par la matrice $\mathcal{M}$

$$\begin{array}{c|c} & \vec{V} \quad \vec{V}' \\ \hline \begin{array}{c}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{array} & \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{M}.$$

Un résultat général (I, n° 205) permet d'écrire

$$\vec{V} \text{ et } \vec{V}' \text{ sont colinéaires} \iff \mathcal{M} \text{ est de rang } 1.$$

Si, par exemple a n'est pas nul,

$$\mathcal{M} \text{ est de rang } 1 \iff \begin{cases} ab' - ba' = 0 \\ ac' - ca' = 0 \end{cases}$$

Plus particulièrement :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V} \text{ et } \vec{V}', \text{ distincts de } \vec{0} \\ \text{sont colinéaires}\end{array}\right\} \iff (1) \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$ avec les conventions usuelles des rapports égaux.

En géométrie plane :

$$\vec{V} \text{ et } \vec{V}' \text{ sont colinéaires} \iff (2) \quad ab' - ba' = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0.$$

2° Application. — *Condition pour que trois points soient alignés.* — I. Les points M et M′ sont alignés avec O si, et seulement si, les vecteurs $\vec{OM} = \vec{V}$, $\vec{OM'} = \vec{V}'$ sont colinéaires, ce qui s'exprime par les égalités précédentes (1) et (2).

II. Les trois points $M_1 (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 (x_3, y_3, z_3)$ sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\vec{M_1M_2}$ et $\vec{M_1M_3}$ sont colinéaires; d'où la condition

$$(3) \qquad \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.$$

Dans le cas du plan, la condition s'écrit

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or le déterminant précédent s'écrit successivement

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La condition d'alignement est donc

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On observera que la relation (4) fait jouer aux trois points des rôles symétriques; il n'en est pas ainsi pour les relations (3).

119. ***Vecteurs coplanaires.*** — 1° DÉFINITION. — **On dit que trois vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\vec{V}''$ sont coplanaires pour exprimer qu'ils forment un système lié.**

Cela signifie qu'il existe trois nombres réels λ, λ', λ'' non simultanément nuls tels que

$$\lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V}' + \lambda''\vec{V}'' = \vec{0};$$

α) ou bien l'un des vecteurs est nul;

β) ou bien, aucun des vecteurs n'étant nul, deux d'entre eux sont colinéaires;

γ) ou bien, aucun des vecteurs n'étant nul et deux quelconques d'entre eux n'étant pas colinéaires, leurs représentants de même origine O sont portés par trois droites distinctes, deux à deux situées dans un même plan.

Supposons que les vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\vec{V}''$, non nuls tous les trois, soient donnés dans le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ par la matrice $\mathcal{M}$

$$\begin{array}{c|c} & \vec{V} \quad \vec{V}' \quad \vec{V}'' \\ \hline \begin{array}{c}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{array} & \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{M}.$$

Un résultat général (I, n° 205) permet d'écrire

$$\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'' \text{ sont coplanaires} \iff (1) \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si la matrice $\mathcal{M}$ est de rang 2, deux des vecteurs donnés ne sont pas colinéaires, ils déterminent une direction de plan à laquelle le troisième vecteur est parallèle.

Si la matrice $\mathcal{M}$ est de rang 1, les vecteurs donnés sont deux à deux colinéaires.

APPLICATION. — *Condition pour que quatre points soient dans un même plan.*

I. La condition (1) est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que le plan des trois points M (a, b, c), M′ (a', b', c') et M″ (a'', b'', c'') contienne l'origine O.

II. Les quatre points M_i (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont dans un même plan si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ sont coplanaires, d'où par un calcul analogue à celui du n° 118, 2°, formule (4), la condition

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

120. ***Représentation d'une direction.*** — 1. **Paramètres directeurs d'une direction de droite.** — *a*) Soit δ une *direction de droite*, c'est-à-dire la classe d'équivalence de toutes les droites Δ parallèles à δ; δ est déterminée par la donnée d'un vecteur *non nul* $\vec{V}$ dont le support a la direction δ; on dit que $\vec{V}$ est un *vecteur directeur* de δ.

DÉFINITION. — **On appelle paramètres directeurs d'une direction de droite les coordonnées d'un vecteur directeur de cette direction.**

Une direction de droite a une infinité de systèmes de paramètres directeurs (a, b, c), définis seulement à un coefficient près de proportionnalité non nul (I, 65, 5° et 66, 4°).

Les directions de droite $\delta(a, b, c)$ et $\delta'(a', b', c')$ sont les mêmes si, et seulement si

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

b) En géométrie plane, une direction δ non parallèle à Oy admet pour paramètres directeurs (a, b) ou $\left(1, \frac{b}{a}\right)$ puisque $a \neq 0$; $\frac{b}{a}$ est appelé le *coefficient directeur* de δ.

Inversement, si m est le coefficient directeur de δ, le couple $(1, m)$ est un système de paramètres directeurs de δ.

EXEMPLE. — Les diagonales d'un repère cartésien plan ont pour coefficients directeurs $+1$ et -1.

c) La formule (1) du n° 119 exprime une condition nécessaire et suffisante pour que trois directions de droite ayant pour paramètres directeurs (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') soient parallèles à un même plan.

II. INTRODUCTION DES LONGUEURS ET DES ANGLES

Nous nous proposons, en admettant, comme dans tout le chapitre, les faits géométriques rencontrés dans les programmes des classes précédentes, d'étudier les propriétés métriques des vecteurs de la géométrie élémentaire.

Quand nous étudierons des propriétés métriques, l'espace affine $\mathcal{E}$ sera un *espace affine euclidien*, ou, abréviativement, *espace métrique*. Dans le cas particulier d'une étude plane, nous parlerons du plan affine euclidien, ou, abréviativement, *plan métrique*.

121. *Définitions métriques relatives aux vecteurs.* — 1° Module d'un vecteur. — En géométrie métrique on sait comparer des segments de droite de direction quelconque; à l'aide d'un segment-unité, défini indépendamment de sa direction, on sait mesurer tout segment de droite, en trouver la *longueur*.

O étant l'origine du repère, soit $\overrightarrow{OM}$ un représentant du vecteur (libre) $\vec{V}$; la longueur du segment OM, connue grâce au choix d'un segment-unité, s'appelle *module* (ou longueur) du vecteur; on le note

$$\|\vec{V}\|, \quad |\vec{V}| \quad \text{ou simplement V.}$$

Les vecteurs unitaires relatifs à des directions différentes sont associés à des segments tous égaux au segment-unité.

Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire ayant la direction de $\vec{V}$; en géométrie affine, on définit la mesure algébrique $\overline{V}$ de $\vec{V}$ pour $\vec{i}$, et on note

$$\vec{V} = \overline{V}\,\vec{i}.$$

Le module du vecteur est alors la valeur absolue du nombre réel $\overline{V}$:

$$\underset{\text{module du vecteur}}{\|\vec{V}\|} = \underset{\substack{\text{valeur absolue de la}\\ \text{mesure algébrique}}}{|\overline{V}|} = V$$

2° **Angle de deux vecteurs.** — La géométrie métrique introduit l'angle de deux vecteurs libres $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ non nuls; c'est l'angle géométrique de mesure $\theta (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ que font les représentants $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ de $\vec{V}$ et de $\vec{V'}$ en un point O arbitraire de l'espace, c'est-à-dire encore l'angle des demi-droites OM et OM'. La mesure de cet angle, dans les conditions qui vont être précisées, est désignée par $(\vec{V}, \vec{V'})$.

Dans l'espace, l'angle de $\vec{V}$ avec $\vec{V'}$ n'est pas orienté; cet angle est déterminé par son cosinus :

$$\cos(\vec{V}, \vec{V'}) = \cos\widehat{MOM'}.$$

En géométrie métrique plane, et une fois le plan orienté, l'angle orienté de $\vec{V}$ avec $\vec{V'}$, noté $(\vec{V}, \vec{V'})$, a pour mesure, selon le cas, $\theta + k.2\pi$ ou $-\theta + k.2\pi$; dans chaque cas $\cos(\vec{V}, \vec{V'}) = \cos\theta$ reste le même; le signe de $\sin(\vec{V}, \vec{V'})$ par contre est lié au choix de l'orientation.

Rappelons que la mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe est égale au produit de la mesure algébrique de ce vecteur sur un axe qui le porte, par le cosinus de l'angle des directions positives des deux axes.

122. *Représentation d'une direction orientée dans un repère orthonormé.* — **1. Repère dans un espace métrique.** — En géométrie métrique, les vecteurs unitaires des diverses directions de droite ont la même longueur; il en est ainsi des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ du repère.

En règle générale, on supposera en outre les axes Ox, Oy, Oz orthogonaux deux à deux : on obtient ainsi ce qu'on appelle un *repère orthonormé.*

La longueur V du vecteur $\vec{V}(a, b, c)$ est alors donnée par

$$V^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

et la distance des deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ est alors donnée par

$$(M_1M_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Remarque. — Lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ d'un repère cartésien plan quelconque ont même longueur, les diagonales de ce repère (cf. n° 117) sont alors les bissectrices des axes Ox, Oy, le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ (fig. 7) étant alors un losange.

2° **Cosinus directeurs d'une direction orientée (repère orthonormé).** — Soit $\vec{\delta}$ une direction orientée, $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{\delta}$; les coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère orthonormé sont appelées *paramètres directeurs principaux* de $\vec{\delta}$; ce sont aussi les cosinus des angles que font les axes Ox, Oy, Oz avec $\vec{\delta}$; d'où :

Définition. — **On appelle cosinus directeurs d'un axe $\vec{\delta}$ les mesures algébriques des projections orthogonales sur les axes du repère d'un vecteur unitaire de $\vec{\delta}$.**

Soit $\vec{u}(p, q, r)$;

si $$\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \vec{\delta}), \quad \beta = (\overrightarrow{Oy}, \vec{\delta}), \quad \gamma = (\overrightarrow{Oz}, \vec{\delta})$$
$$p = \cos\alpha \quad q = \cos\beta \quad r = \cos\gamma.$$

Pour que trois nombres donnés p, q, r soient les cosinus directeurs d'un axe $\vec{\delta}$, il faut et il suffit qu'ils soient les coordonnées d'un vecteur unitaire, soit

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

3° **Calcul des cosinus directeurs à partir d'un système de paramètres directeurs.** — Soit δ la direction de paramètres directeurs (a, b, c); ces trois nombres sont les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{V}$ de δ. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire choisi sur δ et p, q, r ses coordonnées $(p^2 + q^2 + r^2 = 1)$.

Soit ρ la mesure algébrique de $\vec{V}$ avec le vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\vec{V} = \rho\vec{u} \quad \text{ou} \quad a = \rho p, \quad b = \rho q, \quad c = \rho r$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = \rho^2 \implies \rho = \varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \varepsilon = +1 \text{ ou } -1$$

En définitive

$$p = \frac{a}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad q = \frac{b}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad r = \frac{c}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Choisir ε, c'est orienter la direction δ; choisir $\varepsilon = +1$, c'est orienter δ dans le sens du vecteur $\vec{V}$.

Cas du plan orienté. — Soit $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ le repère orthonormé du plan orienté; $(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Une direction orientée $\vec{\delta}$ est déterminée par son angle polaire φ; les cosinus directeurs sont

$$p = \cos\varphi, \qquad q = \sin\varphi.$$

III. PRODUIT SCALAIRE. PRODUIT VECTORIEL

123. ***Produit scalaire.*** — 1° Définition. — I) **Étant donnés deux vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$, distincts du vecteur $\vec{0}$, on appelle produit scalaire de ces vecteurs le produit de leurs modules par le cosinus de leur angle.**

II) **Le produit scalaire du vecteur $\vec{0}$ par tout autre vecteur est nul.**

Le produit scalaire est un nombre réel — c'est-à-dire un scalaire — attaché au couple des deux vecteurs, indépendant de l'ordre dans lequel on les donne; le produit scalaire est donc *commutatif.*

Le produit scalaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ se note $\vec{U}.\vec{V}$ ou $\vec{V}.\vec{U}$ (1); sa valeur est $UV\cos\theta$, en appelant θ l'angle des vecteurs.

Produit scalaire nul. — Le produit scalaire n'est nul que si

1° ou bien l'un des vecteurs est le vecteur $\vec{0}$;

2° ou bien les deux vecteurs sont orthogonaux.

2° **Définition équivalente.** — Le produit $V\cos\theta$ est la mesure algébrique de la projection du vecteur $\vec{V}$ sur un axe $\vec{D}$ ayant même direction et même sens que $\vec{U}$:

$$\vec{U}.\vec{V} = U \times \overline{\text{proj}_{\vec{D}}\vec{V}}.$$

Remplaçons $\vec{D}$ par l'axe opposé $\vec{\Delta}$; les mesures algébriques sur $\vec{\Delta}$ de $\vec{U}$ et de $\overrightarrow{\text{proj}_{\Delta}\vec{V}}$ sont respectivement opposées à U et à $\overline{\text{proj}_{\vec{D}}\vec{V}}$, leur produit reste égal à $\vec{U}.\vec{V}$; en définitive, $x'x$ désignant un axe quelconque parallèle à $\vec{U}$

$$\vec{U}.\vec{V} = \overline{U} \times \overline{\text{proj}_{x'x}\vec{V}}.$$

(1) Certains auteurs le notent $< \vec{U}, \vec{V} >$.

Lorsqu'un vecteur $\vec{U}$ est porté par un axe, son produit scalaire par un vecteur $\vec{V}$ est le produit de la mesure algébrique du vecteur $\vec{U}$ par la mesure algébrique de la projection du vecteur $\vec{V}$ sur l'axe qui porte le vecteur $\vec{U}$.

3° **Propriétés linéaires du produit scalaire.** — *a*) Montrons que l'application φ de $E \times E$ dans le corps R définie par

$$(\vec{U}, \vec{V}) \in E \times E \xrightarrow{\varphi} \vec{U}.\vec{V}$$

est *bilinéaire.*

Supposons $\vec{U}$ fixé.

Soit
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$
$$\overline{\text{proj}}_{x'x} \vec{V} = \overline{\text{proj}}_{x'x} \vec{V}_1 + \overline{\text{proj}}_{x'x} \vec{V}_2.$$

Il suffit de multiplier les deux membres par $\overline{U}$ pour obtenir

$$\vec{U}.(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{U}.\vec{V}_1 + \vec{U}.\vec{V}_2.$$

Soit λ un nombre réel quelconque.

$$\overline{\text{proj}}_{x'x}(\lambda \vec{V}) = \lambda \times \overline{\text{proj}}_{x'x} \vec{V}.$$

Il suffit de multiplier les deux membres par $\overline{U}$ pour obtenir

$$\vec{U}.(\lambda \vec{V}) = \lambda(\vec{U}.\vec{V}).$$

L'application φ satisfait ainsi aux critères de linéarité pour $\vec{V}$ (tome I, n°s 138 et 161); à cause de la commutativité, elle satisfait aux mêmes critères pour $\vec{U}$; la propriété visée est ainsi démontrée.

L'application φ est ainsi une forme bilinéaire sur E; on l'appelle aussi produit scalaire, aucune confusion n'étant possible. Les propriétés des formes bilinéaires s'appliquent ainsi au produit scalaire.

b) Applications. — I) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs unitaires des axes $\vec{\Delta}_1$, $\vec{\Delta}_2$, supports respectifs de $\vec{U}$ et $\vec{V}$; soit $\theta = (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$.

$$\vec{U} = \overline{U}\vec{u}, \qquad \vec{V} = \overline{V}\vec{v} \implies \vec{U}.\vec{V} = \overline{U}\,\overline{V}(\vec{u}.\vec{v}),$$

c'est-à-dire

$$\vec{U}.\vec{V} = \overline{U}\,\overline{V}\cos\theta.$$

Si deux vecteurs sont portés par des axes, leur produit scalaire s'obtient en multipliant leurs mesures algébriques par le cosinus de l'angle des directions positives des axes.

Par exemple, si A, B, C, D sont quatre points d'un même axe,

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{CD}.$$

II) *Produit scalaire de deux combinaisons linéaires de vecteurs* :

$$\left(\Sigma\lambda_i\vec{U}_i\right).\left(\Sigma\mu_j\vec{V}_j\right) = \Sigma\lambda_i\mu_j\left(\vec{U}_i.\vec{V}_j\right).$$

c) Carré scalaire d'un vecteur. — On appelle carré scalaire d'un vecteur le produit scalaire de ce vecteur par lui-même, c'est le carré de la mesure de ce vecteur. On écrit $\vec{V}.\vec{V}$ ou $\left(\vec{V}\right)^2 = V^2$.

Par exemple, A, B, C étant trois points quelconques

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

d'où

$$\left(\overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos A$, A désignant l'angle en A du triangle ABC. On retrouve ainsi la formule connue

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A.$$

Formule de Leibniz. — Soit $A_i(\alpha_i)$ un système de points pondérés; proposons-nous d'obtenir une formule de réduction pour la fonction

$$f(M) = \sum_1^n \alpha_i MA_i^2.$$

P étant un autre point de l'espace,

$$f(P) = \sum_1^n \alpha_i PA_i^2.$$

$$\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_i} \implies MA_i^2 = MP^2 + PA_i^2 + 2\,\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{PA_i}.$$

Par suite, si $\alpha = \Sigma\alpha_i$ est le poids total du système

(1) $$f(M) - f(P) = \alpha MP^2 + 2\,\overrightarrow{MP}.\Sigma\alpha_i\overrightarrow{PA_i}.$$

a) supposons $\alpha \neq 0$; le système des points pondérés admet alors un barycentre G (I, n° 67) tel que

$$\Sigma\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Prenons alors, dans la formule (1), le point P en G et nous obtenons :

$$f(M) = f(G) + \alpha MG^2.$$

b) supposons $\alpha = 0$; le vecteur $\Sigma\alpha_i\overrightarrow{PA_i}$ reste équipollent à un vecteur fixe $\vec{U}$ (I, n° 67). Si l'on place P en un point fixe O de l'espace, on obtient

$$f(M) = f(O) + 2\,\overrightarrow{MO}.\vec{U}.$$

Dans le cas particulier d'un système astatique, c'est-à-dire si $\vec{U} = \vec{0}$, $f(M)$ a une valeur constante.

124. ***Expression analytique du produit scalaire.*** — 1° **Repère orthonormé.** — *a*) Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de composantes scalaires X, Y, Z et X′, Y′, Z′ par rapport aux vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ d'un repère orthonormé.

$$\vec{U} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$
$$\vec{V} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}.$$

Compte-tenu du n° 123, 3°, *b*, II, et des relations

$$\vec{i}^2 = 1, \quad \vec{j}^2 = 1, \quad \vec{k}^2 = 1,$$
$$\vec{j}.\vec{k} = 0, \quad \vec{k}.\vec{i} = 0, \quad \vec{i}.\vec{j} = 0,$$

$$\boxed{\vec{U}.\vec{V} = XX' + YY' + ZZ'.}$$

En particulier, on retrouve

$$U^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

b) Cas de vecteurs situés dans un même plan. — Avec un repère orthonormé pris dans ce plan, $\vec{i}$ et $\vec{j}$,

$$\boxed{\vec{U}.\vec{V} = XX' + YY'} \quad \text{et} \quad \boxed{U^2 = X^2 + Y^2.}$$

Il peut être utile de connaître le carré scalaire du vecteur $\vec{U}(X, Y)$ lorsque les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ forment l'angle θ. En utilisant $\vec{i}.\vec{j} = \cos\theta$, on obtient

$$U^2 = X^2 + Y^2 + 2\,XY\cos\theta.$$

c) Mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe. — Le repère étant orthonormé, soit à projeter le vecteur $\vec{U}(X, Y, Z)$ sur l'axe $t't$ ayant pour vecteur unitaire $\vec{I}(p, q, r)$:

$$\overline{\text{proj}_{t't}\vec{U}} = \vec{U}.\vec{I} = pX + qY + rZ.$$

Dans le plan rapporté au repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, orthonormé, l'axe $t't$ est donné par son angle polaire θ, le vecteur unitaire $\vec{I}$ de $t't$ a pour coordonnées cos θ et sin θ, et ainsi

$$\overline{\text{proj}_{t't}\vec{U}} = \vec{U}.\vec{I} = X\cos\theta + Y\sin\theta.$$

2° Expression générale du produit scalaire. — *a*) Soit $\mathcal{U} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ une base quelconque de l'espace vectoriel E. Nous posons

$$\|\vec{i}\| = l, \qquad \|\vec{j}\| = m, \qquad \|\vec{k}\| = n$$

$$\vec{j}.\vec{k} = mn\cos\lambda, \qquad \vec{k}.\vec{i} = nl\cos\mu, \qquad \vec{i}.\vec{j} = lm\cos\mu.$$

Tout vecteur $\vec{V}$ de E peut être repéré par ses coordonnées dans la base $\mathcal{U}$:

(1) $$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Posons $$A = \vec{i}.\vec{V}, \qquad B = \vec{j}.\vec{V}, \qquad C = \vec{k}.\vec{V}.$$

En multipliant scalairement les deux membres de (1) successivement par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on a

$$\begin{cases} A = Xl^2 + Ylm\cos\nu + Z\,ln\cos\mu \\ B = Xlm\cos\nu + Ym^2 + Z\,mn\cos\lambda \\ C = Xnl\cos\mu + Ymn\cos\lambda + Z\,n^2 \end{cases}$$

ce qui s'écrit matriciellement

(2) $$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \begin{bmatrix} l^2 & ml\cos\nu & nl\cos\mu \\ lm\cos\nu & m^2 & nm\cos\lambda \\ ln\cos\mu & mn\cos\lambda & n^2 \end{bmatrix}$$

Considérons un second vecteur $\vec{V}_1$, de coordonnées X_1, Y_1, Z_1 dans la base $\mathcal{U}$:

$$\vec{V}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}.$$

$$\vec{V}.\vec{V}_1 = X_1(\vec{i}.\vec{V}) + Y_1(\vec{j}.\vec{V}) + Z_1(\vec{k}.\vec{V})$$

ou $$\vec{V}.\vec{V}_1 = X_1A + Y_1B + Z_1C,$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$\vec{V}.\vec{V}_1 = \text{dét}\left([X_1 \ Y_1 \ Z_1]\,\Omega \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}\right)$$

La matrice Ω représente, dans la base $\mathcal{U}$, la forme bilinéaire symétrique qui définit le produit scalaire.

En particulier $(\vec{V})^2 = XA + YB + ZC = \text{dét}\left([XYZ]\,\Omega \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}\right).$

b) Changement de base. — Prenons une nouvelle base $\mathcal{U}' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$; P étant la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$,

$$[\vec{i}' \ \vec{j}' \ \vec{k}'] = [\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}] \times P,$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

X′, Y′, Z′ étant les coordonnées de $\vec{V}$ dans $\mathcal{U}'$.

$A' = \vec{i}'.\vec{V}$ est aussi $(a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}).\vec{V}$, c'est-à-dire

$$A' = aA + bB + cC.$$

En posant de même $B' = \vec{j}'.\vec{V}$ et $C' = \vec{k}'.\vec{V}$, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{bmatrix} = \tilde{P} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad [A' \, B' \, C'] = [A \, B \, C] \times P.$$

Les coordonnées X, Y, Z de $\vec{V}$ sont dites *contravariantes*; les coordonnées A, B, C de $\vec{V}$ sont dites *covariantes*, ce dernier adjectif signifiant que les coordonnées A, B, C se transforment comme les vecteurs de la base.

125. ***Produit vectoriel.*** — 1° Définition. — I) **L'espace étant orienté par le choix d'un trièdre de référence, soit $\vec{U}$, $\vec{V}$ un couple rangé de vecteurs, indépendants; on appelle produit vectoriel de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ le vecteur $\vec{p}$ orthogonal à $\vec{U}$ et $\vec{V}$, dont le module est**

$$p = UV \sin(\vec{U}, \vec{V})$$

et dont le sens est tel qu'en menant

$$\overrightarrow{OM} = \vec{U}, \quad \overrightarrow{ON} = \vec{V}, \quad \overrightarrow{OP} = \vec{p},$$

le trièdre OMNP **soit positif.**

II) **Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont liés, le produit vectoriel de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ est le vecteur $\vec{0}$.**

Notation. — Le produit vectoriel de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ se représente par la notation $\vec{U} \wedge \vec{V}$.

Le produit vectoriel n'est pas commutatif :

$$\vec{V} \wedge \vec{U} = -(\vec{U} \wedge \vec{V})$$

car si on pose $\overrightarrow{OQ} = \vec{V} \wedge \vec{U}$ le trièdre ONMQ n'est positif que si $\overrightarrow{OQ}$ est de sens contraire à $\overrightarrow{OP}$.

Remarque. — Le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ dépend de l'orientation du trièdre de référence; si l'on change le sens de ce trièdre, le produit vectoriel est remplacé par le vecteur opposé.

Interprétation du module. — Le module p de $\vec{U} \wedge \vec{V}$, égal à

$$OM \times ON \times \sin \widehat{MON},$$

n'est autre que l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$.

2° **Construction du produit vectoriel.** — Soit H le plan perpendiculaire en O à OM, et soit n la projection orthogonale de N sur H (fig. 8). On = ON sin $\widehat{MON}$; de plus On se trouve dans le plan MON du même côté de OM que ON, par suite

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON}$$

est aussi $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{On}$.

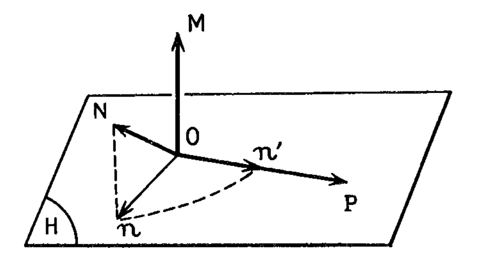


Fig. 8.

Comme le trièdre OMnP est un trièdre positif, tout comme le trièdre OMNP, une rotation d'un droit, dans le sens positif, autour de l'axe $\overrightarrow{OM}$ amène le point n en un point n' de la demi-droite OP. Comme $OP = On' \times OM$, P est l'homologue de n' dans l'homothétie (O, OM).

Finalement le vecteur $\overrightarrow{ON}$ est transformé en le vecteur $\overrightarrow{OP}$ par la composition des trois transformations suivantes :

$\mathscr{L}$, projection orthogonale sur H : $\overrightarrow{ON} \xrightarrow{\mathscr{L}} \overrightarrow{On}$

$\mathscr{R}$, rotation positive de $\frac{\pi}{2}$ autour de $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{On} \xrightarrow{\mathscr{R}} \overrightarrow{On'}$

$\mathscr{H}$, homothétie (O, OM) $\overrightarrow{On'} \xrightarrow{\mathscr{H}} \overrightarrow{OP}$.

3° **Propriétés linéaires du produit vectoriel.** — *a)* Soit ψ l'application de $E \times E$ dans E définie par

$$\left(\vec{U}, \vec{V}\right) \in E \times E \xrightarrow{\psi} \vec{U} \wedge \vec{V} \in E.$$

L'application ψ est *alternée* (tome I, n° 138, 4° et n° 191) d'après le 1°.

b) Montrons que l'application ψ est *bilinéaire* :

I) Supposons $\vec{U}$ fixé, et montrons que ψ satisfait aux critères de linéarité pour $\vec{V}$.

D'après la construction du 2°

$$\psi = \mathscr{H} \circ \mathscr{R} \circ \mathscr{L}.$$

Or chacune des transformations $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{H}$ satisfait aux critères de linéarité, il en est de même de leur produit; en d'autres termes, $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{H}$ sont des endomorphismes de E, leur produit, ψ, est encore un endomorphisme de E (tome I, n°s 161, 165, 219) :

$$\vec{U} \wedge \left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right) = \vec{U} \wedge \vec{V}_1 + \vec{U} \wedge \vec{V}_2$$
$$\forall \lambda \in R, \ \vec{U} \wedge \left(\lambda \vec{V}\right) = \lambda\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right).$$

II) L'application ψ étant alternée, on en déduit aussitôt :

$$\left(\vec{U}_1 + \vec{U}_2\right) \wedge \vec{V} = \vec{U}_1 \wedge \vec{V} + \vec{U}_2 \wedge \vec{V}$$
$$\forall \lambda \in R, \ \left(\lambda \vec{U}\right) \wedge \vec{V} = \lambda\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right).$$

En résumé, ψ *est une application bilinéaire alternée de* $E \times E$ *dans* E.

Cette application bilinéaire alternée porte aussi le nom de produit vectoriel, aucune confusion n'étant à craindre. Les propriétés des applications linéaires s'appliquent ainsi au produit vectoriel.

c) Applications. — I) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs unitaires des axes $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$, supports respectifs de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

$$\vec{U} = \overline{U}\,\vec{u},\ \vec{V} = \overline{V}.\vec{v} \implies \vec{U} \wedge \vec{V} = \overline{U}\,\overline{V}\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).$$

Si deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont portés par des axes, le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est le produit des valeurs algébriques des deux vecteurs et du produit vectoriel d'un vecteur unitaire du premier axe par un vecteur unitaire du second axe.

II) *Produit vectoriel de deux combinaisons linéaires de vecteurs* :

$$\left(\Sigma \lambda_i \vec{U}_i\right) \wedge \left(\Sigma \mu_j \vec{V}_j\right) = \Sigma \lambda_i \mu_j \left(\vec{U}_i \wedge \vec{V}_j\right).$$

On veillera à ce que dans chacun des produits partiels un vecteur $\vec{U}$ soit écrit le premier, un vecteur $\vec{V}$ le second, puisque le produit vectoriel n'est pas commutatif.

126. *Expression analytique du produit vectoriel.* — 1° Soit le repère $\left\{ O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right\}$, Ox, Oy, Oz étant les supports respectifs de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$; soit δ la matrice des coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ par rapport à ce repère :

$$\begin{array}{c|c} & \vec{U} \quad \vec{V} \\ \hline \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{matrix} & \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix} \end{array} = \delta \qquad \begin{aligned} \vec{U} &= a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \\ \vec{V} &= a'\vec{u} + b'\vec{v} + c'\vec{w}. \end{aligned}$$

La distributivité de la multiplication vectorielle donne

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)(bc' - cb') + \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right)(ca' - ac') + \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)(ab' - ba').$$

On n'obtient de résultat simple que si le repère choisi est *orthonormé*; désignons par $\left\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ le repère orthonormé; nous supposons que le trièdre associé a été choisi comme trièdre de référence.

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i},\quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j},\quad \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k},$$

et ainsi

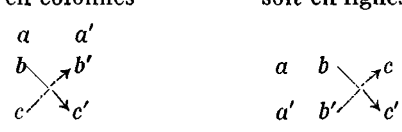
$$\boxed{\vec{U} \wedge \vec{V} = (bc' - cb')\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - ba')\vec{k}.}$$

Le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ a pour composantes scalaires sur les axes du repère orthonormé positif

$$l = bc' - cb',\quad m = ca' - ac',\quad n = ab' - ba'.$$

Ce résultat se retient en mettant les composantes scalaires de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$

soit en colonnes soit en lignes



en commençant toujours par le premier vecteur. La première composante scalaire est le déterminant

$$\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix},$$

les autres s'en déduisent par permutation circulaire.

Les résultats précédents peuvent encore se retenir de la façon suivante

$$\begin{Bmatrix} l, \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} a & a' & \vec{i} \\ b & b' & \vec{j} \\ c & c' & \vec{k} \end{vmatrix}$$

en utilisant la notation du déterminant-vecteur (I, n° 202).

Les expressions l, m, n sont les cofacteurs des éléments de la troisième colonne du déterminant-vecteur précédent; on peut dire aussi, dans la pratique, que ce sont les mineurs, affectés de signes, de la matrice δ.

2° **Égalité de Lagrange.** — Si θ mesure l'angle des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$,

$$\left\| \vec{U} \wedge \vec{V} \right\| = \mathrm{UV} \sin \theta; \quad \vec{U} . \vec{V} = \mathrm{UV} \cos \theta.$$

Par suite, le produit U^2V^2 est égal à la somme des carrés du produit scalaire et du produit vectoriel; en d'autres termes

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 =$$
$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2.$$

L'égalité précédente est connue sous le nom d'égalité de Lagrange.

3° **Cas particulier où $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont dans le plan xOy.** — Supposons c et c' nuls :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (ab' - ba')\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires, dont l'angle géométrique mesure θ, et si $\vec{k}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan xOy,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{k} \sin \theta,$$

en sorte que $$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{k} . \sin \theta \, (ab' - ba').$$

Remarque. — Soit $\overrightarrow{OM} = \vec{U}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{V}$, l'angle saillant orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ a la même disposition que l'angle saillant (Ox, Oy) — ou la disposition inverse — suivant que $ab' - ba'$ est positif ou négatif.

127. *Division vectorielle.* — Problème. — *Etant donnés deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{p}$, existe-t-il un vecteur libre $\vec{u}$ tel que*

$$(1) \qquad \vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{p}?$$

a) Le problème est impossible si $\vec{p}$ n'est pas orthogonal à $\vec{a}$.

b) Supposons $\vec{p}$ orthogonal à $\vec{a}$ et introduisons les vecteurs unitaires $\vec{j}$ (colinéaire à $\vec{a}$), $\vec{k}$ (colinéaire à $\vec{p}$); complétons avec $\vec{i}$ une base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de sens positif (fig. 9).

α) Cherchons à l'équation (1) une solution particulière orthogonale à $\vec{a}$ et à $\vec{p}$, donc de la forme

$$\vec{u}_0 = \rho\, \vec{i}, \qquad \rho \in \mathrm{R}.$$

En désignant par a et p les mesures algébriques de $\vec{a}$ et $\vec{p}$, le scalaire ρ est tel que

$$\left(\rho\, \vec{i}\right) \wedge \left(a \vec{j}\right) = p\vec{k},$$

et comme

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad a\rho = p,$$

finalement

$$\vec{u}_0 = \frac{p}{a}\, \vec{i} \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{a}\left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right)$$

$$\vec{u}_0 = \frac{\vec{a} \wedge \vec{p}}{\left\|\vec{a}\right\|^2}.$$

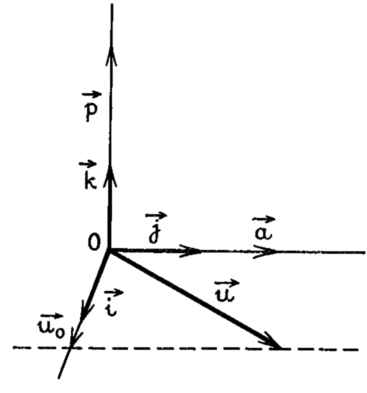


Fig. 9.

β) Comme on sait que $\vec{u}_0 \wedge \vec{a} = \vec{p}$, l'équation (1) s'écrit

$$\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{u}_0 \wedge \vec{a} \qquad \text{ou} \qquad \left(\vec{u} - \vec{u}_0\right) \wedge \vec{a} = \vec{0};$$

en d'autres termes, toute solution $\vec{u}$ de l'équation (1) est telle que $\vec{u} - \vec{u}_0$ est colinéaire à $\vec{a}$; il existe $\lambda \in \mathrm{R}$ tel que

$$\vec{u} - \vec{u}_0 = \lambda \vec{a}.$$

Inversement, tout vecteur $\vec{u}_0 + \lambda \vec{a}$ est solution de (1).

Finalement, toutes les solutions de l'équation (1) sont données par

$$\vec{u} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{p}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda \vec{a}.$$

Les représentants des vecteurs $\vec{u}$, d'origine O, ont leurs extrémités sur la parallèle au support de $\vec{a}$, menée par l'extrémité du représentant de $\vec{u_0}$.

128. ***Produit mixte.*** — 1° DÉFINITION. — **On appelle produit mixte des vecteurs $\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}$ donnés dans cet ordre le produit scalaire de $\vec{V}$ par le produit vectoriel $\vec{V'} \wedge \vec{V''}$:**

$$p = \vec{V} . \left(\vec{V'} \wedge \vec{V''}\right). \qquad \text{On le note} \qquad p = \left(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right).$$

Le produit mixte est donc un nombre réel; nous en étudierons le signe et la valeur absolue. Considérons les représentants en un point O quelconque des vecteurs donnés :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{V}, \quad \overrightarrow{OM'} = \vec{V'}, \quad \overrightarrow{OM''} = \vec{V''}.$$

Posons $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{OM''}$.

2° **Produit mixte nul.** — Le produit scalaire $\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OP}$ est nul si, et seulement si,

α) ou bien l'un des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ est nul, c'est-à-dire si $\vec{V}$ est nul, ou si $\vec{V'}$ et $\vec{V''}$ sont colinéaires;

β) ou bien $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont perpendiculaires; comme $\overrightarrow{OP}$ est perpendiculaire au plan M'OM'', c'est que $\overrightarrow{OM}$ est situé dans ce plan; $\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}$ sont alors coplanaires.

En définitive, on peut écrire

$$\left(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right) = 0 \iff \text{les vecteurs } \vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''} \text{ sont liés.}$$

3° **Signe du produit mixte** — Supposons dorénavant $p \neq 0$; le trièdre OMM'M'' n'est pas dégénéré, et le trièdre OM'M''P est positif.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$p > 0 \iff \widehat{POM}$ est aigu $\iff$ {OM et OP sont du même côté du plan M'OM''}

ou encore {les trièdres OM'M''P, OMM'M'' ont la même disposition} $\iff$ {OMM'M'' est un trièdre positif}

En résumé **le produit mixte $\left(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right)$ est positif ou négatif suivant que le trièdre OMM'M'' dont les arêtes portent des vecteurs respectivement équipollents aux vecteurs donnés est positif ou négatif.**

4° **Valeur absolue du produit mixte.** — Le module de $\overrightarrow{OP}$ est l'aire du parallélogramme M'OM″;

$$|p| = \text{OP} . \text{OM} . |\cos \widehat{\text{POM}}|.$$

Or OM.$|\cos \widehat{\text{POM}}|$ est la hauteur issue de M dans le parallélépipède construit en prenant comme arêtes les segments OM, OM', OM″. Par suite :

La valeur absolue du produit mixte $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ est le volume du parallélépipède qui a pour arêtes les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$, $\overrightarrow{OM''}$ représentants des vecteurs donnés.

5° **Propriétés linéaires du produit mixte.** — Soit φ l'application de E × E × E dans R définie par

$$\{\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\} \in E \times E \times E \xrightarrow{\varphi} \vec{V}.(\vec{V}' \wedge \vec{V}'').$$

D'après les propriétés linéaires du produit scalaire et du produit vectoriel, dès qu'on fixe deux des vecteurs donnés, φ vérifie les critères de linéarité par rapport au troisième vecteur.

Transposons d'autre part deux des vecteurs donnés et étudions ce que devient le scalaire $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$:

α) d'après le 3°, il change de signe;

β) d'après le 4°, il garde la même valeur absolue. C'est donc que l'application φ est alternée.

Finalement φ *est une application trilinéaire alternée de* E × E × E *dans* R.

Cette application porte aussi le nom de produit mixte, aucune confusion n'étant à craindre.

Application. — *Produit mixte de trois combinaisons linéaires :*

$$\left(\sum_1^n \lambda_i \vec{V}_i, \quad \sum_1^p \mu_j \vec{V}'_j, \quad \sum_1^q \nu_k \vec{V}''_k\right) = \Sigma \lambda_i \mu_j \nu_k (\vec{V}_i, \quad \vec{V}'_j, \quad \vec{V}''_k)$$

la sommation Σ du second membre étant étendue à tous les triplets rangés d'indices i, j, k pris respectivement parmi les n, p, q premiers entiers.

6° **Expression analytique du produit mixte.** — *a*) Supposons les trois vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\vec{V}''$ rapportés à une *base quelconque* $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de l'espace vectoriel E;

$$\begin{array}{c|c} & \vec{V} \quad \vec{V}' \quad \vec{V}'' \\ \hline \begin{array}{c}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \vec{w}\end{array} & \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{M} \qquad \begin{aligned} \vec{V} &= a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \\ \vec{V}' &= a'\vec{u} + b'\vec{v} + c'\vec{w} \\ \vec{V}'' &= a''\vec{u} + b''\vec{v} + c''\vec{w}. \end{aligned}$$

En utilisant le 5°, et par un calcul analogue à celui qui figure au tome I, n° 142, on montre que

$$\left(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right) = \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) \times \text{dét}\,\mathcal{M}.$$

b) Supposons les trois vecteurs rapportés à une *base orthonormée*

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\},$$

le trièdre $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ étant choisi pour trièdre de référence; alors

$$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) = +1,$$

$$\left(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

En d'autres termes

$$\left(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right) = \text{dét}_{\mathcal{U}}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right].$$

Applications. — L'expression du produit mixte sous forme de déterminant rend immédiates les propriétés suivantes :

a) *Un produit mixte est invariant par une substitution circulaire portant sur les vecteurs composants.*

b) On peut, les trois vecteurs étant rangés, noter le produit vectoriel avant le produit scalaire

$$\left(\vec{V} \wedge \vec{V}'\right).\vec{V}'' = \vec{V}.\left(\vec{V}' \wedge \vec{V}''\right).$$

c) *Le trièdre* OMM′M″ *est de même sens que le trièdre de référence — ou de sens contraire — suivant que le déterminant de la matrice* $\mathcal{M}$ *est positif — ou négatif.*

129. *Double produit vectoriel.* — Donnons-nous trois vecteurs (libres) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$; l'expression

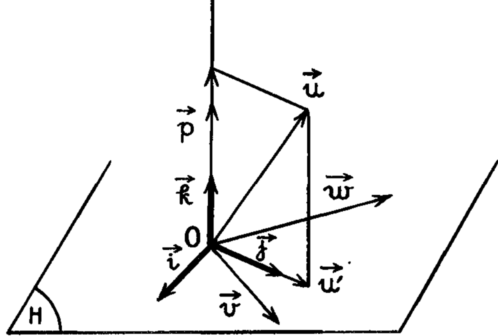


Fig. 10.

$$\vec{P} = \vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$$

a un sens puisque

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{p}$$

est un vecteur libre que l'on peut multiplier vectoriellement à gauche, par $\vec{u}$.

Soit H la direction de plan déterminée par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ supposés non colinéaires (la figure 10 montre les représentants en O des vecteurs étudiés); $\vec{p}$ est perpendiculaire à $\vec{H}$;

soit $\vec{u'}$ la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur H; nous supposons $\vec{u'}$ non nul (si $\vec{u}$ est orthogonal à H, $\vec{P}$ est nul).

Le vecteur $$\vec{P} = \vec{u} \wedge \vec{p}$$

peut aussi se noter $$\vec{P} = \vec{u'} \wedge \vec{p};$$

$\vec{P}$ est parallèle à H, et par suite il existe deux scalaires réels α et β tels que

$$\vec{P} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}.$$

Nous allons chercher une expression de α et de β en introduisant un repère orthonormé positif : $\vec{i}$ perpendiculaire à $\vec{u'}$ dans H, $\vec{j}$ colinéaire à $\vec{u'}$, $\vec{k}$ perpendiculaire à H; les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont données par

	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w}$
$\vec{i}$	0	a	a'
$\vec{j}$	μ	b	b'
$\vec{k}$	ν	0	0

$$\vec{p} = \vec{v} \wedge \vec{w} = (ab' - ba')\vec{k}.$$

$$\vec{P} = \left(\mu\vec{j} + \nu\vec{k}\right) \wedge (ab' - ba')\vec{k} = \mu(ab' - ba')\vec{i}.$$

Or $$\left\{\begin{array}{l}\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}\\ \vec{w} = a'\vec{i} + b'\vec{j}\end{array}\right\} \Longrightarrow b'\vec{v} - b\vec{w} = (ab' - ba')\vec{i}$$

et finalement

$$P = (\mu b')\vec{v} - (\mu b)\vec{w}.$$

Il suffit de se reporter au tableau ci-dessus pour constater que

$$\mu b' = \vec{u}.\vec{w} \qquad \text{et} \qquad \mu b = \vec{u}.\vec{v}.$$

En définitive, on peut écrire

$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u}.\vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u}.\vec{v}\right)\vec{w}. \tag{1}$$

Cas particuliers. — *a*) Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, $\vec{v}\wedge\vec{w}$ est nul, et $\vec{P}$ aussi; comme alors

$$\vec{w} = \rho\vec{v}$$
$$\left(\vec{u}.\rho\vec{v}\right)\vec{v} = \left(\vec{u}.\vec{v}\right)\rho\vec{v}$$

et le second membre de (1) est nul aussi.

b) Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{p}$, et $\vec{P} = \vec{0}$; mais alors $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u}.\vec{w}$ sont nuls, et le second membre de la formule (1) est nul aussi.

Remarque. — Si l'on donne l'expression

$$\vec{Q} = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w},$$

on se ramène à l'étude précédente en écrivant

$$\vec{Q} = -\vec{w} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{w} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right)$$
$$\vec{Q} = \left(\vec{w}.\vec{u}\right)\vec{v} - \left(\vec{w}.\vec{v}\right)\vec{u}.$$

On constate ainsi que si l'on peut itérer la multiplication vectorielle, cette opération n'est pas associative.

130. *Le point de vue du physicien.* — 1° **Grandeurs scalaires; grandeurs vectorielles** — La Physique distingue les *grandeurs scalaires* qui peuvent être représentées par des nombres lorsqu'une grandeur de même nature a été prise pour unité, ou comme on dit encore, lorsqu'on a fixé une échelle (en latin *scala*) pour mesurer sa grandeur, et les *grandeurs dirigées* ou vectorielles. **Une grandeur vectorielle est l'association à une grandeur physique** (force, vitesse, déplacement, champ électrique, induction magnétique, etc...) **d'une direction et d'un sens.**

La grandeur physique est mesurée à l'aide d'une grandeur de même espèce prise pour unité; en associant à cette mesure, qui est un nombre réel positif, une direction et un sens on obtient un vecteur-force, un vecteur-vitesse, etc...

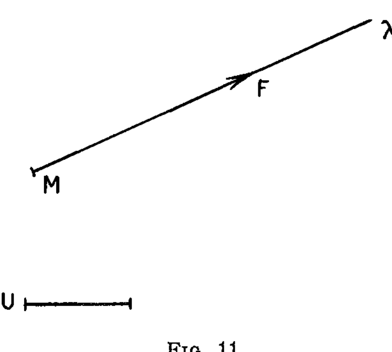


Fig. 11.

On peut associer à la grandeur physique (d'une certaine espèce) prise pour unité un segment U quelconque. Si, par exemple, au point M agit, dans la direction orientée Mλ une force $\mathcal{F}$ mesurée par le nombre f avec l'unité de force Φ, et si à Φ on a associé le segment U (fig. 11), on associera à $\mathcal{F}$ le vecteur géométrique $\overrightarrow{MF}$ dont la direction et le sens sont fournis par Mλ, tel que $MF = U \times f$.

On suppose, pour toutes les grandeurs vectorielles de même espèce, que le même segment est associé à l'unité de cette grandeur : par exemple le segment U servira pour représenter géométriquement toutes les forces, quelle qu'en soit l'origine physique.

Pour des grandeurs vectorielles de nature différente, on pourra choisir des segments unités différents : c'est ce qu'on fait couramment en Mécanique et en Physique.

Un vecteur géométrique lui-même pourra être représenté par un autre vecteur géométrique si on est obligé de faire un dessin à une certaine échelle : par exemple, dans l'étude d'un mécanisme un segment orienté de 1 mètre (grandeur physique) pourra être représenté sur un dessin par un segment orienté U de 1 centimètre.

Rappelons que la projection d'un vecteur sur un axe est un vecteur de même espèce que l'on mesure avec le même segment unité que le vecteur initial et que la somme vectorielle ne peut concerner que des vecteurs représentant des grandeurs physiques de même espèce.

2° **Le produit scalaire et le produit vectoriel en Physique.** — *a*) En Mécanique et en Physique les facteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ d'un produit scalaire, ou d'un produit vectoriel, representent des grandeurs vectorielles d'espèces différentes.

Pour construire $\vec{U}$, on a choisi un segment L_1 associé à l'unité de la première grandeur; pour construire $\vec{V}$, on a choisi un segment L_2 associé à l'unité de la seconde grandeur. Si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont les représentants en O de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$, les segments [OM] et [ON] sont ainsi respectivement $L_1 \times U$ et $L_2 \times V$.

b) Le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$ est alors une grandeur scalaire qui s'exprimera avec une unité particulière. Par exemple si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ représentent respectivement une force et un déplacement, le produit scalaire représente un travail; on l'exprimera avec l'unité de travail associée aux unités choisies pour une force et une longueur; si la force est exprimée en newtons et le déplacement en mètres, le travail, qui est un produit scalaire, est exprimé en joules.

c) Le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est une grandeur vectorielle d'une troisième espèce; on le construit à l'aide d'un segment-unité L_3 qui peut être différent de L_1 et de L_2; si $\overrightarrow{OP} = \vec{U} \wedge \vec{V}$, le segment [OP] est ainsi

$$L_3 \times p, \quad p = UV \sin \widehat{MON}.$$

On peut ainsi observer que le module de $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est l'aire du parallélogramme qui a pour côtés les représentants en O de $\vec{U}$ et $\vec{V}$, l'aire unité étant celle du rectangle qui a pour côtés les segments L_1 et L_2.

d) Le produit mixte $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ est une grandeur scalaire; si L_1, L_2, L_3 sont les segments unités associés respectivement aux grandeurs unités de chacune des espèces auxquelles appartiennent $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$, la valeur absolue du produit mixte est le volume du parallélépipède qui a pour arêtes les représentants en O de $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\vec{V}''$, le volume-unité étant celui du parallélépipède rectangle ayant pour arêtes les segments L_1, L_2, L_3.

e) Les formules obtenues dans ce chapitre pour les divers produits sont indépendantes du choix des segments associés aux grandeurs-unités.

3° Grandeurs axiales. — Chaque fois que la construction d'un certain vecteur dépend de l'orientation du trièdre de référence $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ on dit que ce vecteur est *axial*, pour rappeler qu'il dépend de la disposition des axes du trièdre donné. Par opposition, un vecteur dont la détermination est indépendante de l'orientation du repère est appelé vecteur pur ou vecteur polaire.

Une force, une vitesse, un champ électrique donnent lieu à des vecteurs polaires; le produit vectoriel de deux vecteurs purs, le moment d'une force, un vecteur-rotation dans le mouvement d'un solide, un champ magnétique donnent lieu à des vecteurs axiaux.

Suivant que la détermination d'un nombre (ou d'un scalaire) ne dépend pas — ou dépend — de l'orientation du trièdre de référence, on dit que qu'on a un scalaire pur — ou un scalaire axial.

Le produit scalaire de deux vecteurs purs est un scalaire pur; le produit scalaire d'un vecteur pur par un vecteur axial est un scalaire axial; c'est ainsi que le produit mixte de trois vecteurs purs est un scalaire axial

131. ***Calculs métriques (repère orthonormé).*** — 1° **Angle de deux vecteurs dans l'espace.** — Soient deux vecteurs non nuls $\vec{V}$ (X, Y, Z) et $\vec{V}'$ (X', Y', Z'), et soit θ la mesure de leur angle; la relation

$$\vec{V}.\vec{V}' = VV' \cos\theta \quad \text{donne} \quad \cos\theta = \frac{XX' + YY' + ZZ'}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}$$

cette formule détermine θ puisque $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Si on a besoin de calculer $\sin\theta$, on utilise, soit la formule de Lagrange, soit le produit vectoriel :

$$\left\|\vec{V} \wedge \vec{V}'\right\| = VV' \sin\theta.$$

2° **Angle orienté d'un vecteur avec un autre dans le plan orienté.** — Le repère orthonormé $\left\{ O, \vec{i}, \vec{j} \right\}$ est tel que $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soient φ et φ' les angles polaires des directions orientées par les vecteurs $\vec{V}$(X, Y) et $\vec{V}'$(X', Y') :

$$\left\{\begin{aligned} X &= V\cos\varphi \\ Y &= V\sin\varphi \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} X' &= V'\cos\varphi' \\ Y' &= V'\sin\varphi'. \end{aligned}\right.$$

L'angle orienté de $\vec{V}$ avec $\vec{V}'$ a pour mesure

$$\left(\vec{V}, \vec{V}'\right) = \varphi' - \varphi.$$

En tenant compte des formules qui donnent les lignes trigonométriques de $\varphi' - \varphi$ on obtient

$$\cos\left(\vec{V}, \vec{V}'\right) = \frac{XX' + YY'}{\sqrt{X^2 + Y^2}\sqrt{X'^2 + Y'^2}}, \quad \sin\left(\vec{V}, \vec{V}'\right) = \frac{XY' - YX'}{\sqrt{X^2 + Y^2}\sqrt{X'^2 + Y'^2}}.$$

3° **Angle orienté d'une droite avec une autre dans le plan orienté.** — Soit $\left\{ O, \vec{i}, \vec{j} \right\}$ un repère orthonormé direct. Soit δ et δ' deux directions de droite ayant pour paramètres directeurs (a, b) et (a', b'); ces couples de nombres sont les coordonnées des vecteurs directeurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$.

L'un des angles de δ avec δ' est l'angle de $\vec{V}$ avec $\vec{V}'$:

$$(\delta, \delta') = \left(\vec{V}, \vec{V}'\right) + k\pi;$$

par suite
$$\operatorname{tg}(\delta, \delta') = \operatorname{tg}\left(\vec{V}, \vec{V}'\right) = \frac{ab' - ba'}{aa' + bb'},$$

en appliquant les formules du 2°.

Si aucune des directions δ et δ' n'est celle de Oy, on peut introduire les coefficients directeurs

$$m = \frac{b}{a}, \qquad m' = \frac{b'}{a'};$$

et obtenir ainsi

$$\operatorname{tg}(\delta, \delta') = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

4° **Orthogonalité.** — *a*) *Cas de l'espace.* — Les directions de droite $\delta(a, b, c)$ et $\delta'(a', b', c')$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs directeurs ont un produit scalaire nul, soit

$$aa' + bb' + cc' = 0 \quad \begin{cases} (a, b, c) \text{ non nuls ensemble.} \\ (a', b', c') \text{ non nuls ensemble.} \end{cases}$$

b) *Cas du plan.* — Si δ et δ' sont dans le plan xOy, la condition d'orthogonalité prend la forme

$$aa' + bb' = 0,$$

ou encore, si δ et δ' ne sont pas parallèles à Oy, et si m et m' sont leurs coefficients directeurs :

$$1 + mm' = 0.$$

5° **Aire d'un triangle.** — L'aire du triangle $M_1M_2M_3$ est la moitié du module du produit vectoriel $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$; si les trois points sont dans le plan xOy,

$$\text{aire } M_1M_2M_3 = \frac{1}{2} \text{ val. abs.} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Un calcul analogue à celui du n° 118, 1° conduit à la formule

$$\text{aire } M_1M_2M_3 = \frac{1}{2} \text{ val. abs.} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6° **Volume d'un tétraèdre.** — Le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ a pour volume le sixième du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$; en transformant, comme précédemment, le déterminant qui donne le produit mixte

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}\right),$$

on obtient

$$\text{volume } M_1M_2M_3M_4 = \frac{1}{6} \text{ val. abs.} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

EXERCICES

1. — A, B, C, D étant quatre points quelconques, démontrer que

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Interpréter cette relation dans le cas général où A, B, C, D ne sont pas dans le même plan et dans le cas particulier où ils sont dans le même plan.

2. — A, B, C, D étant quatre points quelconques, démontrer que

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

Quelle conséquence entraîne cette relation quand deux des produits scalaires sont nuls? Examiner en particulier le cas où A, B, C, D sont dans un même plan?

3. — Résoudre le problème de la division vectorielle (chercher $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{p}$, $\vec{a}$ et $\vec{p}$ étant donnés) en utilisant le double produit vectoriel (on cherchera une solution de la forme $u = \lambda\left(\vec{a} \wedge \vec{p}\right)$).

4. — On donne trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ non nuls et un nombre réel λ. Déterminer un vecteur $\vec{X}$ tel que

$$\vec{X}.\vec{A} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \vec{X} \wedge \vec{B} = \vec{C}.$$

5. — *a*) Démontrer la formule

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).\left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right) = \vec{c}.\left[\vec{d} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\right];$$

en déduire, par l'emploi du double produit vectoriel

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).\left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$$

Application : on donne un tétraèdre ABCD; démontrer que si un point M est tel que les plans MDA, MBC soient perpendiculaires ainsi que les plans MDB, MCA, alors les plans MDC et MAB sont aussi perpendiculaires.

b) Le vecteur $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right)$ est de la forme $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ et aussi de la forme $\gamma\vec{c} + \delta\vec{d}$. Calculer α, β, γ, δ et en déduire la formule :

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\vec{d} = \left(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}\right)\vec{a} + \left(\vec{d}, \vec{c}, \vec{a}\right)\vec{b} + \left(\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}\right)\vec{c}.$$

c) Démontrer la formule :

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\left(\vec{p} \wedge \vec{q}\right) = \begin{vmatrix} \vec{p}.\vec{a} & \vec{q}.\vec{a} & \vec{a} \\ \vec{p}.\vec{b} & \vec{q}.\vec{b} & \vec{b} \\ \vec{p}.\vec{c} & \vec{q}.\vec{c} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

Mettre sous forme de déterminant le produit

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\right).$$

On retrouve ainsi la règle de multiplication de deux déterminants du troisième ordre.

6. — Soit un trièdre T (Ox, Oy Oz); on désigne par a, b, c les mesures de ses faces, par A, B, C celles de ses dièdres, par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy, Oz. On appelle trièdre supplémentaire de T le trièdre T_1 de sommet O, d'arêtes Ox_1, Oy_1, Oz_1 construites de la manière suivante : Ox_1, par exemple est perpendiculaire au plan yOz et les demi-droites Ox_1, Ox sont du même côté de ce plan. On désigne par $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$ les vecteurs unitaires des arêtes de T_1.

a) Démontrer que, moyennant une orientation convenable de l'espace, on a :
$\vec{i_1} \sin a = \vec{j} \wedge \vec{k}$, $\vec{j_1} \sin b = \vec{k} \wedge \vec{i}$, $\vec{k_1} \sin c = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

b) Montrer que $(\vec{k} \wedge \vec{i}) . (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \cos b \cos c - \cos a$. Déduire de là la formule suivante, dite *formule fondamentale de la trigonométrie sphérique* :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

c) Évaluer le produit $\vec{j_1} \wedge \vec{k_1}$. Démontrer que T est supplémentaire de T_1. Calculer les faces de T en fonction de ses dièdres.

7. — Soient 3 vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$. Démontrer que les produits mixtes suivants s'évaluent simplement en fonction du produit mixte $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$:

$$P_1 = (\vec{B} + \vec{C}, \ \vec{C} + \vec{A}, \ \vec{A} + \vec{B})$$
$$P_2 = (\vec{B} \wedge \vec{C}, \ \vec{C} \wedge \vec{A}, \ \vec{A} \wedge \vec{B})$$
$$P_3 = ((\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} + \vec{C}), (\vec{B} + \vec{C}) \wedge (\vec{B} + \vec{A}), (\vec{C} + \vec{A}) \wedge (\vec{C} + \vec{B}))$$
$$P_4 = ((\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (\vec{A} \wedge \vec{C}), (\vec{B} \wedge \vec{C}) \wedge (\vec{B} \wedge \vec{A}), (\vec{C} \wedge \vec{A}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{B})).$$

8. — *Produit vectoriel en axes obliques.* — Soient $\vec{i}, \vec{j}$ $\vec{k}$ trois vecteurs unitaires quelconques non parallèles à un même plan faisant entre eux les angles $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$.

a) Calculer les composantes de $\vec{u} = \vec{j} \wedge \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{i}$, $\vec{w} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, en fonction de α, β, γ.

b) Calculer, dans la même base, les composantes de

$$(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \wedge (X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}).$$

c) Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^2$.

Cette formule reste-t-elle encore vraie si les trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ n'ont pas même longueur?

9. — *Sinus d'un trièdre.* Soit (Ox, Oy, Oz) (ou $\mathfrak{T}$) un trièdre dont les faces ont pour mesures α, β, γ. Soient $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires de ses arêtes. On pose $s = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; le nombre s est parfois appelé le *sinus* du trièdre $\mathfrak{T}$.

a) Démontrer que

$$s^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

b) Décomposer le déterminant s^2 en un produit de sinus. Utilisant le fait que $s^2 > 0$, démontrer que, dans tout trièdre, une face quelconque est inférieure à la somme des deux autres, et que la somme des faces est inférieure à quatre droits.

10. — On donne les points A, B, C, D. Trouver le lieu géométrique des points M tels que

$$\alpha(\vec{MA} . \vec{MB}) = \beta(\vec{MC} . \vec{MD}) \quad (\alpha, \beta \text{ réels donnés})$$
$$\alpha(\vec{MA} \wedge \vec{MB}) = \beta(\vec{MC} \wedge \vec{MD}) \quad (\alpha, \beta \text{ réels donnés}).$$
$$(\vec{MA} \wedge \vec{MB}) . (\vec{MC} \wedge \vec{MD}) = 0.$$

11. — Dans un plan Π, orienté par un axe Z qui lui est perpendiculaire, on considère un triangle ABC. Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés, O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit Γ. On désigne par $\overline{ABC}$ l'aire algébrique de ce triangle (dont les sommets sont énoncés dans l'ordre A, B, C). On désigne par $\underline{\vec{u} \wedge \vec{v}}$ la mesure algébrique sur Z du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

a) Soit P un point quelconque de Π. Démontrer la formule :

$$2\,\overline{ABC} = \underline{\overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{PC}} + \underline{\overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PA}} + \underline{\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB}}.$$

b) α', β', γ' sont les symétriques d'un point M de Π par rapport aux droites OA′, OB′, OC′. Démontrer que les triangles ABC et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont inversement semblables; calculer le rapport de leurs aires algébriques.

c) Soient α, β, γ les symétriques de M par rapport aux droites BC, CA, AB. Démontrer la formule :

$$\overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{ABC} + \overline{\alpha'\beta'\gamma'} = \frac{-\gamma}{R^2}\,\overline{ABC},$$

γ étant la puissance de M par rapport au cercle Γ.

d) Quel est le lieu géométrique de M lorsque $\overline{\alpha\beta\gamma}$ conserve une valeur constante? Retrouver le théorème de Simson.

12. — Soit R l'ensemble des réels, $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs libres d'un espace euclidien réel, Ω l'ensemble R × $\mathcal{V}$ dont chaque élément est de la forme

$$\left(s,\ \vec{v}\right).$$

On définit sur Ω une addition et une multiplication par les formules

$$\left(s, \vec{v}\right) + \left(s', \vec{v'}\right) = \left(s + s', \vec{v} + \vec{v'}\right)$$
$$\left(s, \vec{v}\right) \times \left(s', \vec{v'}\right) = \left(ss' - \vec{v}.\vec{v'},\ s\vec{v'} + s'\vec{v} - \vec{v} \wedge \vec{v'}\right).$$

Démontrer que Ω est doué d'une structure de corps (*corps des quaternions*).

13. — On considère les matrices

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \nu = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Démontrer les formules :

$$\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = -I;$$
$$\mu\nu = -\nu\mu = \lambda; \qquad \nu\lambda = -\lambda\nu = \mu; \qquad \lambda\mu = -\mu\lambda = \nu.$$

b) Soit la matrice

$$\mathcal{M}(s, a, b, c) = sI + a\lambda + b\mu + c\nu$$

s, *a*, *b*, *c* étant réels.

Former le produit $\mathcal{M}(s', a', b', c') \times \mathcal{M}(s, a, b, c)$ et le mettre sous la forme

$$\mathcal{M}(\sigma, \alpha, \beta, \gamma).$$

c) Montrer que $\mathcal{M}\tilde{\mathcal{M}} = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,I$;
en déduire que si *s*, *a*, *b*, *c* ne sont pas tous nuls, la matrice $\mathcal{M}$ admet une inverse que l'on déterminera explicitement.

14. — L'espace est rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz).

a) Soit $\vec{a}$ le vecteur de composantes $(0, 0, h)$ et $\vec{b}$ un vecteur de composantes $(x, y, 0)$ auquel on associe le nombre complexe $\zeta = x + iy$. Quels sont les affixes des vecteurs $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$, $\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}))$, etc...?

b) On considère deux vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{V}$ et on forme la suite de vecteurs définie par $\vec{V}_0 = \vec{V}$, et $\vec{V}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{n-1}$. Démontrer que le vecteur

$$\vec{W}_n = \vec{V}_0 + \frac{\vec{V}_1}{1!} + \dots + \frac{\vec{V}_n}{n!}$$

a une limite $\vec{W}$ lorsque n tend vers l'infini. Quelle est cette limite?

On définit ainsi une transformation $\mathcal{T}_\omega$ par : $\mathcal{T}_\omega(\vec{V}) = \vec{W}$: démontrer que $\mathcal{T}_\omega$ est une rotation. Préciser son axe et son angle. Montrer que les vecteurs

$$\vec{R}_n = \frac{\vec{V}_1}{1!} + \frac{\vec{V}_3}{3!} + \dots + \frac{\vec{V}_{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{et} \qquad \vec{S}_n = \frac{\vec{V}_2}{2!} + \frac{\vec{V}_4}{4!} + \dots + \frac{\vec{V}_{2n}}{(2n)!}$$

ont des limites proportionnelles à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ et les déterminer.

c) On donne un axe Δ issu de O, de cosinus directeurs α, β, γ, et un angle φ. En utilisant le *b*), trouver les coordonnées du point M' transformé du point M par la rotation d'axe Δ et d'angle φ.

d) Les notations étant celles du *b*), $\mathcal{T}_{\lambda\omega}(\vec{V})$ est une fonction vectorielle de λ pour $\vec{V}$ donné. Appliquer à cette fonction la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de $\lambda = 0$. Résoudre la même question pour la fonction vectorielle $\mathcal{T}_\omega(\mathcal{T}_{\lambda\omega'}(\vec{V}))$ ($\vec{\omega'}$ est un autre vecteur donné). En déduire la limite, lorsque λ tend vers 0, de

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\mathcal{T}_{-\lambda\omega}\left(\mathcal{T}_{-\lambda\omega'}\left(\mathcal{T}_{\lambda\omega}\left(\mathcal{T}_{\lambda\omega'}(\vec{V})\right)\right)\right) - \vec{V}\right)$$

15*. — On donne le point O et les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. Comparer les deux champs de scalaires, F et G, déterminés par

$$F(M) = (\vec{V}_1 . \overrightarrow{OM})(\vec{V}_2 . \overrightarrow{OM}) + (\vec{V}_1 \wedge \overrightarrow{OM}) . (\vec{V}_2 \wedge \overrightarrow{OM})$$

et
$$G(M) = (\vec{V}_1 . \vec{V}_2)\, OM^2.$$

(On pourra utiliser une dérivation vectorielle.)

16. — Au point M dont les coordonnées dans un repère orthonormé sont (x, y) on associe les nombres complexes : $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ et on dit que z et $\bar{z}$ sont les coordonnées isotropes de M.

a) M_1 et M_2 étant déterminés par leurs coordonnées isotropes, calculer $\overrightarrow{OM_1} . \overrightarrow{OM_2}$.

b) Lieu de M dont les coordonnées isotropes vérifient

$$z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + b = 0 \qquad (a \text{ et } b \text{ donnés, } b \text{ réel}).$$

c) Applications. — A, B, C étant trois points donnés du plan, lieu de P tel que

$$\overrightarrow{PA} . \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} . \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} . \overrightarrow{PA} = 0.$$

CHAPITRE XII

INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

I. LES REPÈRES

La notion de repère cartésien a été donnée au tome I (n° **65**, n° **66**) et rappelée dans ce tome III au n° **117**.

132. ***Changement de repère cartésien (géométrie affine).*** — 1° **Notations.** — L'espace affine $\mathcal{E}$ de la géométrie élémentaire est rapporté à un premier repère cartésien $\mathcal{R}$, l'origine est le point O ; les vecteurs unitaires $\vec{i}$ $\vec{j}$, $\vec{k}$ déterminent les axes Ox, Oy, Oz. Un second repère cartésien $\mathcal{R}'$ a pour origine le point O' ; les vecteurs unitaires $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ déterminent les axes O'x', O'y', O'z'. On dit encore que $\mathcal{R}$ est l'ancien repère, $\mathcal{R}'$ le nouveau repère. On définit le nouveau repère en donnant sa position par rapport à l'ancien : on appelle x_0, y_0, z_0 les coordonnées de O' par rapport à $\mathcal{R}$, et on donne les coordonnées des vecteurs $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ par rapport à $\mathcal{R}$;

$$\begin{array}{c|c} & \vec{i'} \quad \vec{j'} \quad \vec{k'} \\ \hline \begin{matrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{matrix} & \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \end{array} = \text{P}.$$

En appelant E l'espace vectoriel des vecteurs de la géométrie élémentaire, P est la matrice de passage de la base $\mathfrak{U}\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ à la base $\mathfrak{U}'\left\{\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right\}$ P est une matrice régulière. La matrice P donne lieu au produit matriciel

$$(1) \qquad \left[\vec{i'}\ \vec{j'}\ \vec{k'}\right] = \left[\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\right] \times \text{P}.$$

2° **Problème.** — Un point M a pour coordonnées x, y, z dans l'ancien repère (on dit que x, y, z sont les *coordonnées anciennes* de M); M a pour coordonnées x', y', z' dans le nouveau repère (on dit que x', y', z' sont les *coordonnées nouvelles* de M).

Connaissant l'un des systèmes de coordonnées du point M, *on demande de calculer les coordonnées de l'autre système.*

Partons de la relation

$$(2)\qquad \begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'M}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \overrightarrow{\mathrm{OO'}} &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \\ \overrightarrow{\mathrm{O'M}} &= x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, (2) s'écrit

$$(3)\qquad \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{i'} & \vec{j'} & \vec{k'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

en remplaçant la matrice $\begin{bmatrix} \vec{i'} & \vec{j'} & \vec{k'} \end{bmatrix}$ par l'expression (1), dans la formule (3) subsiste uniquement la matrice $\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix}$, d'où la formule matricielle.

$$(4)\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathrm{P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

qui donne les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

L'égalité (4) peut se mettre sous la forme

$$(4')\qquad \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = \mathrm{P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

et comme la matrice P est inversible,

$$(5)\qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathrm{P}^{-1} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

la formule (5) donne les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.

Remarque I. — En explicitant la relation (4), on obtient

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + ax' + a'y' + a''z' \\ y &= y_0 + bx' + b'y' + b''z' \\ z &= z_0 + cx' + c'y' + c''z'. \end{aligned} \right.$$

Les anciennes coordonnées s'expriment en fonction des nouvelles au moyen de polynômes du premier degré.

En explicitant la relation (5) on obtient de même des expressions de la forme

$$(7)\qquad \begin{cases} x' = x'_0 + a_1x + a'_1y + a''_1z \\ y' = y'_0 + b_1x + b'_1y + b''_1z \\ z' = z'_0 + c_1x + c'_1y + c''_1z. \end{cases}$$

Les nouvelles coordonnées sont aussi des polynômes du premier degré par rapport aux anciennes coordonnées.

Du fait que P est régulière, on peut résoudre (6) par rapport à x', y', z' et obtenir ainsi (7); de même on peut résoudre (7) par rapport à x, y, z et obtenir ainsi (6).

3° **Cas particuliers.** — I) *Translation des axes.* — Si le repère $\mathcal{R}'$ se déduit du repère $\mathcal{R}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, $\vec{i}' = \vec{i}$, $\vec{j}' = \vec{j}$, $\vec{k}' = \vec{k}$; la matrice P est alors la matrice unité et les formules (6) deviennent

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z'. \end{cases}$$

II) *Changement d'axes sans changement d'origine.* — Si O′ coïncide avec O, x_0, y_0, z_0 sont nuls tous les trois, et les formules (6) deviennent homogènes. Les anciennes coordonnées s'expriment au moyen des nouvelles par des formes linéaires, et inversement.

III) *Cas de la géométrie plane.* — Le repère $\{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$ est défini, par rapport au repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, par les coordonnées x_0, y_0 de O′, et par la matrice

$$\begin{array}{c|cc} & \vec{i}' & \vec{j}' \\ \hline \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \end{array} \quad \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix} = P; \quad \text{par suite} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Exemple I. — Considérons, en géométrie métrique plane, un premier repère $\mathcal{R}$ formé par deux vecteurs de longueur 1, faisant l'angle θ; un deuxième repère $\mathcal{R}'$ a même origine; $\vec{i}' = \vec{i}$; le vecteur $\vec{j}'$ a pour longueur 1, et fait l'angle θ' avec $\vec{i}'$; on suppose que les angles xOy, $x'Oy'$ ont la même disposition; cherchons les formules du changement de repère.

Nous avons à déterminer les coordonnées a' et b' de $\vec{j}'$ dans l'ancien repère (fig. 12) :

$$(1)\qquad \vec{j}' = a'\,\vec{i} + b'\,\vec{j}.$$

Nous déterminerons a' et b' en multipliant scalairement l'égalité précédente par $\vec{i}$, puis par $\vec{j}$:

$$\vec{i}.\vec{j}' = \cos\theta' \qquad \cos\theta' = a' + b'\cos\theta'$$
$$\vec{j}.\vec{j}' = \cos(\theta' - \theta) \qquad \cos(\theta' - \theta) = a'\cos\theta + b'.$$

Finalement $$a' = \frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin\theta} \qquad b' = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a' \\ 0 & b' \end{bmatrix} = \mathrm{P} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathrm{P}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

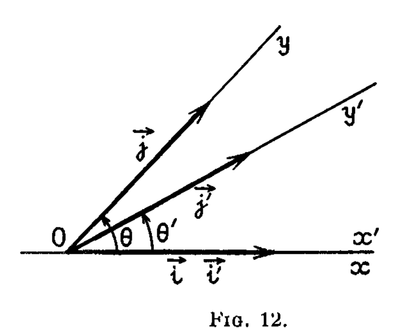


Fig. 12.

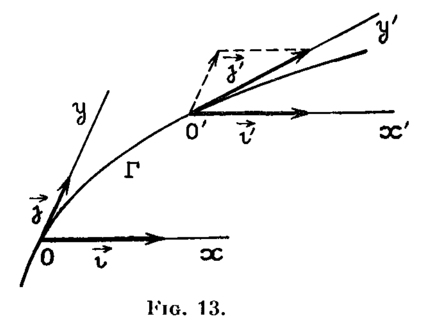


Fig. 13.

Exemple. II. — Soit Γ la parabole définie, dans un repère affine $\{ O, \vec{i}, \vec{j} \}$ par l'équation (fig. 13)

$$y^2 - 2\,p\,x = 0.$$

Prenons une nouvelle origine sur Γ, soit O', définie par son ordonnée λ :

$$O'\left(x_0 = \frac{\lambda^2}{2\,p}, \qquad y_0 = \lambda\right).$$

Les vecteurs unitaires du nouveau repère $\mathcal{R}'$ seront

$$\begin{cases} \vec{i'} = \vec{i} \\ \vec{j'} \text{ porté par la tangente en O' à } \Gamma. \end{cases}$$

Cette tangente a pour paramètres directeurs $\frac{\lambda}{p}$ et 1 ; prenons $\vec{j'} = \frac{\lambda}{p}\vec{i} + \vec{j}$.

$$\begin{array}{c|c} & \vec{i'} \quad \vec{j'} \\ \hline \begin{array}{c}\vec{i}\\ \vec{j}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{\lambda}{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{P} \qquad [\vec{i'}\ \vec{j'}] = [\vec{i}\ \vec{j}]\,\mathrm{P}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{2\,p} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{\lambda}{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

x et y étant les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$, x' et y' dans le repère $\mathcal{R}'$

(2) $$\begin{cases} x = \frac{\lambda^2}{2\,p} + x' + \frac{\lambda}{p}\,y' \\ y = \lambda \qquad\quad + y' \end{cases}$$

En portant les expressions (2) dans l'équation (1), on obtient

$$(\lambda + y')^2 = 2\,p\left(\frac{\lambda^2}{2\,p} + x' + \frac{\lambda}{p}\,y'\right)$$

ou (3) $$y'^2 = 2\,px'.$$

Quel que soit λ, Γ a la même équation dans le repère $\{ \vec{O'}, \vec{i'}, \vec{j'} \}$ considéré.

133. *Changement du repère orthonormé.* — **1° Matrice des cosinus directeurs.** — Plaçons-nous en géométrie métrique, et considérons des repères orthonormés de même origine O : le premier, $\mathcal{R}$, sera $Oxyz$, le second, $\mathcal{R}'$, sera $Ox'y'z'$ (fig. 14).

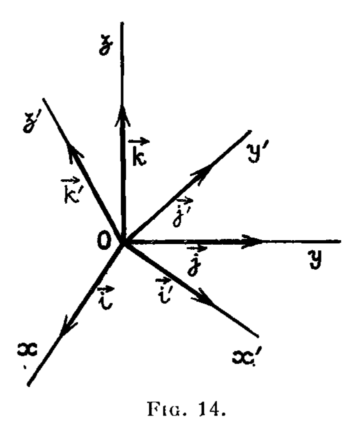


Fig. 14.

Chacun des vecteurs unitaires $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ du second repère est défini par ses coordonnées par rapport à $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, c'est-à-dire ici par ses cosinus directeurs relatifs au repère $\mathcal{R}$

$$\begin{array}{c|c} & \vec{i'} \quad \vec{j'} \quad \vec{k'} \\ \hline \begin{array}{c}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{array} & \begin{bmatrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{P}. \qquad (1)$$

La première colonne de P, par exemple, est ainsi formée des produits scalaires

$$\vec{i'}.\vec{i} = p, \qquad \vec{i'}.\vec{j} = q, \qquad \vec{i'}.\vec{k} = r;$$

plus généralement chaque élément de P est le produit scalaire des vecteurs unitaires qui figurent sur la ligne et sur la colonne de cet élément dans le tableau (1) précédent; il en résulte que la première ligne de P, par exemple, est formée des produits scalaires

$$\vec{i}.\vec{i'} = p, \qquad \vec{i}.\vec{j'} = p', \qquad \vec{i}.\vec{k'} = p'',$$

c'est-à-dire des cosinus directeurs de $\vec{i}$ par rapport au second repère.

$$\left[\vec{i'}\ \vec{j'}\ \vec{k'}\right] = \left[\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\right] \times \mathrm{P} \iff \left[\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\right] = \left[\vec{i'}\ \vec{j'}\ \vec{k'}\right] \times \mathrm{P}^{-1}.$$

Chaque colonne de P^{-1} est ainsi formée des cosinus directeurs de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ dans $\mathcal{R}'$, c'est-à-dire de chaque ligne correspondante de P : en définitive

$$\mathrm{P}^{-1} = \tilde{\mathrm{P}}.$$

La matrice inverse P est la matrice transposée de P; on dit alors (cf. n° 22) que la matrice P est orthogonale.

Les formules de changement de repère sont résumées par

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathrm{P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad \text{ef} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathrm{P}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = px' + p'y' + p''z' \\ y = qx' + q'y' + q''z' \\ z = rx' + r'y' + r''z' \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} x' = px + qy + rz \\ y' = p'x + q'y + r'z \\ z' = p''x + q''y + r''z. \end{cases}$$

Les formules (2) et (3) peuvent s'obtenir directement à partir de l'égalité

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$

en multipliant scalairement lès deux membres par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, puis par $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$.

2° **Propriétés de la matrice des 9 cosinus directeurs.** — *a*) La matrice P introduite au 1°, matrice de passage de la base orthonormée $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ à la base orthonormée $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ de l'espace vectoriel des vecteurs de la géométrie élémentaire, est dite matrice des 9 cosinus directeurs.

Les vecteurs $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ étant unitaires, et deux à deux orthogonaux, on peut écrire, dans le premier repère $\mathcal{R}$

$$(4)\quad \begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = 1 \\ p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1 \\ p''^2 + q''^2 + r''^2 = 1 \end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases} p'p'' + q'q'' + r'r'' = 0. \\ p''p + q''q + r''r = 0 \\ pp' + qq' + rr' = 0. \end{cases}$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, définis dans le nouveau repère $\mathcal{R}'$ étant aussi unitaires, et deux à deux orthogonaux, on peut aussi écrire :

$$(6)\quad \begin{cases} p^2 + p'^2 + p''^2 = 1 \\ q^2 + q'^2 + q''^2 = 1 \\ r^2 + r'^2 + r''^2 = 1 \end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases} qr + q'r' + q''r'' = 0 \\ rp + r'p' + r''p'' = 0 \\ pq + p'q' + p''q'' = 0. \end{cases}$$

Les douze relations (4), (5), (6), (7) ne sont pas indépendantes. D'une façon plus précise, montrons que les 6 dernières sont des conséquences des 6 premières. A cet effet imaginons que 9 nombres réels vérifient les relations (4) et (5), et soit $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ un repère orthonormé; introduisons les vecteurs $\vec{i'}(p, q, r)$, $\vec{j'}(p', q', r')$, $\vec{k'}(p'', q'', r'')$; les relations (4) montrent qu'ils sont unitaires, les relations (5) montrent qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

Mais alors p, p', p'' sont les composantes scalaires de $\vec{i}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ q, q', q'' celles de $\vec{j}$; r, r', r'' celles de $\vec{k}$; les relations (6) et (7) en résultent.

b) *Cas où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ont même orientation.* — Les généralités qui précèdent n'ont pas fait intervenir l'orientation des repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Supposons maintenant que $\mathcal{R}$ soit choisi comme trièdre de référence pour la construction du produit vectoriel, et supposons que $\mathcal{R}'$ soit un trièdre positif.

$$\alpha)\qquad \vec{i'} = \vec{j'} \wedge \vec{k'} \qquad \vec{j'} = \vec{k'} \wedge \vec{i'} \qquad \vec{k'} = \vec{i'} \wedge \vec{j'}$$

ce qui se traduit par

$$\begin{cases} p = q'r'' - r'q'' \\ q = r'p'' - p'r'' \\ r = p'q'' - q'p'' \end{cases} \qquad \begin{cases} p' = rq'' - qr'' \\ q' = pr'' - rp'' \\ r' = qp'' - pq'' \end{cases} \qquad \begin{cases} p'' = qr' - rq' \\ q'' = rp' - pr' \\ r'' = pq' - qp' \end{cases}$$

β) $$\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right) = +1.$$

En d'autres termes :

— le déterminant de la matrice P est $+1$;

— chaque élément de P est égal à son cofacteur dans le développement du déterminant de P.

On traduit ces résultats en énonçant : *Si* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}'$ *ont même orientation, la matrice* P *des neuf cosinus directeurs est une matrice orthogonale droite.*

c) Cas où $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}'$ *ne sont pas de même orientation.* — Les résultats obtenus en *b)* (α et β) sont alors remplacés par leurs opposés.

— le déterminant de la matrice P est -1 ;

— chaque élément de P est l'opposé de son cofacteur dans le développement du déterminant de P.

On traduit ces résultats en énonçant : *Si* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}'$ *ne sont pas de même orientation, la matrice* P *des neuf cosinus directeurs est une matrice orthogonale gauche.*

Exemple. — On donne, dans un repère orthonormé, l'ensemble Σ des points dont les coordonnées x, y, z vérifient l'équation

$$2x^2 + z^2 + 3zx + 3zy + k = 0,$$

k étant réel. Soit Γ l'intersection de Σ par le plan Π (1)

$$x - y + 3z = 0.$$

On demande l'équation de Γ, *par rapport à un repère orthonormé choisi dans* Π.

Rapportons l'espace à un repère orthonormé $Ox'y'z'$ choisi de façon que Oz' soit perpendiculaire à Π ; on sait que la direction perpendiculaire à Π a pour paramètres directeurs $(1, -1, 3)$ (nº 161); nous prendrons donc pour vecteur unitaire $\vec{k'}$ celui qui a pour coordonnées $\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}$.

Dans le plan Π, prenons l'axe Ox' sur l'intersection avec le plan xOy ; la droite Ox' a pour paramètres directeurs $(1, 1, 0)$ et nous pouvons prendre pour vecteur unitaire $\vec{i'}$ celui qui a pour coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0$.

On complète alors le nouveau repère avec le vecteur $\vec{j'} = \vec{k'} \wedge \vec{i'}$, et la matrice des 9 cosinus directeurs devient ici

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{i'} & \vec{j'} & \vec{k'} \\ \hline \vec{i} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \vec{j} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{-1}{\sqrt{11}} \\ \vec{k} & 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \end{array}$$

(1) Les élèves de première année ne liront cet exercice qu'après avoir étudié le chapitre XIII.

Les formules de changement de repère sont, pour les points du plan $\Pi(z' = 0)$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{\sqrt{2}} - \dfrac{3\,y'}{\sqrt{22}} \\ y = \dfrac{x'}{\sqrt{2}} + \dfrac{3\,y'}{\sqrt{22}} \\ z = \qquad \dfrac{2\,y'}{\sqrt{22}}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de Σ, on obtient l'équation de Γ, rapportée à $Ox'y'$

$$x'^2 + y'^2 + k = 0.$$

Si $k \leqslant 0$, Γ est un cercle centré en O.

3° **Cas de la géométrie plane.** — Le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ étant orthonormé, nous supposons que le repère $\{O, \vec{i'}, \vec{j'}\}$ s'en déduit par la rotation $r(O, \theta)$. La matrice de passage est ici (fig. 15)

	$\vec{i'}$	$\vec{j'}$
$\vec{i}$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
$\vec{j}$	$\sin\theta$	$\cos\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = P.$$

FIG. 15.

Comme au 1°,

$$[\vec{i'}\ \vec{j'}] = [\vec{i}\ \vec{j}] \times P \iff [\vec{i}\ \vec{j}] = [\vec{i'}\ \vec{j'}] \times P^{-1},$$

Les formules de changement de repère orthonormé de même disposition dans le plan sont ainsi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff (8) \quad \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff (9) \quad \begin{cases} x' = \quad x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

Les formules (9) peuvent s'obtenir en résolvant les équations (8) aux inconnues x' et y', ce qui immédiat, puisque dét $P = +1$.

On constate aussi, comme au 1°, que

$$P^{-1} = \tilde{P}.$$

La matrice P est dite (cf. 2°) matrice orthogonale droite.

Si le repère orthonormé $\{O, \vec{i'}, \vec{j'}\}$ n'a pas la même disposition que le repère initial, la matrice de passage obtenue a pour déterminant -1; c'est une matrice orthogonale gauche.

Application. — Supposons que le repère orthonormé $Ox'y'z'$ se déduise du repère orthonormé $Oxyz$ par la rotation de mesure algébrique θ autour de l'axe $\overrightarrow{Oz}$, rotation que nous représenterons par $r\left[\vec{k}, \theta\right]$ la matrice de passage est alors

$$\begin{array}{c|c} & \vec{i}' \quad\quad \vec{j}' \quad \vec{k}' \\ \hline \begin{array}{c}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{array} & \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{P}.$$

4° Angles d'Euler. — Reprenons les notations du 1° pour le changement de repère orthonormé (de même disposition).

Le fait que les 9 cosinus directeurs des axes Ox', Oy', Oz' deux à deux rectangulaires soient liés par 6 relations tient à ce qu'il suffit de 3 paramètres pour fixer la position du trièdre trirectangle $\mathcal{R}'$ par rapport au trièdre trirectangle $\mathcal{R}$. Tout d'abord deux paramètres déterminent Ox'; un troisième paramètre fixe Oy' dans le plan perpendiculaire en O à Ox'; ceci fait, Oz' est déterminé.

Nous allons montrer qu'au moyen de 3 angles, dits angles d'Euler, il est possible de définir $\mathcal{R}'$ sans ambiguïté (fig. 16).

Plaçons-nous dans le cas général où les plans $x'Oy'$ et xOy sont distincts; ils se coupent suivant une droite passant par O; plaçons sur cette droite un vecteur unitaire $\vec{i}_1$; soit

$$\psi = \left(\vec{i}, \vec{i}_1\right).$$

La rotation $r\left[\vec{k}, \psi\right]$ transforme $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}_1$ (Ox_1y_1z); la matrice correspondante est

$$\begin{array}{c|c} & \vec{i}_1 \quad\quad \vec{j}_1 \quad \vec{k} \\ \hline \begin{array}{c}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{array} & \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{P}_1.$$

Fig. 16.

Les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ sont perpendiculaires à Ox_1; soit θ la mesure algébrique de la rotation autour de l'axe Ox_1 orienté par $\vec{i}_1$ qui transforme $\vec{k}$ en $\vec{k}'$; la rotation $r\left[\vec{i}_1, \theta\right]$ transforme $\mathcal{R}_1$ en $\mathcal{R}_2$ (Ox_1y_2z'), la matrice correspondante est

$$\begin{array}{c|c} & \vec{i}_1 \quad \vec{j}_2 \quad\quad \vec{k}' \\ \hline \begin{array}{c}\vec{i}_1\\ \vec{j}_1\\ \vec{k}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{P}_2$$

Enfin le trièdre $\mathcal{R}_2$ et le trièdre $\mathcal{R}'$ ont leurs troisièmes arêtes confondues; une rotation de mesure algébrique φ autour de l'axe Oz' orienté par $\vec{k'}$ transforme $\vec{i_1}$ et $\vec{j_2}$ en $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$; la rotation $r\left[\vec{k'}, \varphi\right]$ transforme $\mathcal{R}_2$ en $\mathcal{R}'$, la matrice correspondante est

$$\begin{array}{c} \\ \vec{i_1} \\ \vec{j_2} \\ \vec{k'} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{i'} & \vec{j'} & \vec{k'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = P_3.$$

De proche en proche $\left[\vec{i'}\ \vec{j'}\ \vec{k'}\right] = \left[\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\right] \times P_1P_2P_3$ et les formules de changement de repère sont condensées dans

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_1P_2P_3 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$P_1P_2P_3 = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Dans la mécanique du corps solide, ψ, θ et φ s'appellent respectivement angles de précession, de nutation, de rotation propre.

134. *Autres systèmes de coordonnées (géométrie métrique).* — Un point du plan ou de l'espace peut être déterminé par des nombres réels autres que des coordonnées cartésiennes. En nous bornant au cas de la géométrie métrique, nous allons passer en revue quelques-unes des coordonnées non cartésiennes.

Nous convenons d'ailleurs que, dans la suite de cet ouvrage consacré à la Géométrie, chaque fois qu'il sera question de « coordonnées » — sans autre précision —, il s'agira de coordonnées cartésiennes. Nous préciserons toujours quand il s'agira de coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes.

1° Coordonnées polaires (dans le plan). — *a) Définition.* — Choisissons dans le plan métrique orienté $\mathcal{E}$ un axe, dit *axe polaire* et sur cet axe un point O, dit *pôle*, soit Ox l'axe polaire. L'ensemble constitué par O, Ox, et un vecteur unitaire $\vec{i}$ de Ox est appelé *repère polaire*. A tout point M du plan nous associons le vecteur $\overrightarrow{OM}$, dit *rayon-vecteur* de M; choisissons sur la droite OM un axe OX, de vecteur unitaire $\vec{u}$ (fig. 17).

La mesure algébrique

$$\theta = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}\right) \text{ ou } \left(\overrightarrow{Ox}, \vec{u}\right),$$

de l'*angle polaire* de l'axe OX, est appelée, par abus de langage, *angle polaire* du point M.

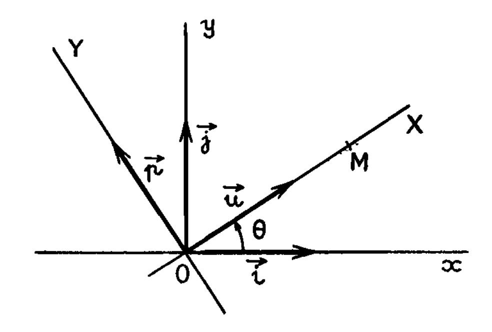


FIG. 17.

La mesure algébrique $\overline{OM} = r$, évaluée à l'aide de $\vec{u}$, est appelée *rayon polaire* du point M.

Le couple (θ, r) est appelé *coordonnées polaires* du point M.

Si l'on donne le couple (θ, r), il lui correspond un point M unique dans le plan.

Si l'on donne un point M dans le plan, il ne lui correspond pas un couple unique de coordonnées polaires :

α) ayant choisi $\vec{u}$, tous les nombres $\theta + k.\,2\,\pi$ sont des angles polaires de la direction orientée OX; tous les couples

$$(\theta + k.2\pi, r) \qquad k : \text{entier relatif}$$

sont des coordonnées polaires de M;

β) si l'on choisit sur la droite OM le sens contraire au sens précédent, c'est-à-dire si l'on choisit comme vecteur unitaire $\vec{u'} = -\vec{u}$, les angles polaires de M sont alors $\theta + \pi + k.2\,\pi$, et la mesure algébrique de $\overrightarrow{OM}$ avec $\vec{u'}$ est alors $-r$; tous les couples

$$(\theta + \pi + k.2\,\pi, \quad -r)$$

sont des coordonnées polaires de M.

En résumé, tout point M a une double infinité de couples de coordonnées polaires

$$(\theta + k.2\,\pi, r) \qquad \text{et} \qquad (\theta + \pi + k.2\,\pi, -r).$$

Quand il sera utile de préciser le sens de l'axe sur lequel on a mesuré algébriquement le vecteur $\overrightarrow{OM}$, on écrira

$$r = (\overline{OM})_{\vec{u}}, \qquad \text{ou} \qquad (\overline{OM})_{\theta}, \qquad \text{ou} \qquad (\overline{OM})_{OX}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}.$$

Remarque I. — Le pôle est caractérisé par $r = 0$; on n'attribue à ce point aucun angle polaire.

Remarque II. — Les coordonnées polaires ne sont pas de « bonnes coordonnées » puisqu'il n'y a pas bijection entre un point et ses coordonnées polaires; mais elles sont utiles dans l'étude des rotations, et dans certaines questions de mécanique.

b) Repères cartésiens associés. — Au système polaire $\{ O, Ox \}$ on associe le repère cartésien Ox, Oy avec $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \frac{\pi}{2}$.

Si x et y sont les coordonnées cartésiennes dans ce repère

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

et inversement, si l'on connaît x et y, les deux familles de coordonnées polaires sont données par

$$r = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1), \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Dans l'étude ultérieure des courbes planes (tome IV), on associera à OX l'axe OY directement perpendiculaire, support du vecteur unitaire $\vec{p}$; le repère $\{O, \vec{u}, \vec{p}\}$ sera dit le *repère mobile*, par opposition au repère fixe Oxy.

c) Rotation de l'axe polaire autour du pôle. — Choisissons pour nouvel axe polaire l'axe Ox' déterminé par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) = \alpha$.

Le vecteur $\vec{u}$ choisi sur OM n'ayant pas changé, le rayon polaire r est le même; le nouvel angle polaire $\theta' = (\overrightarrow{Ox'}, \vec{u})$ est donné par $\theta' = \theta - \alpha$.

Dans le repère cartésien $Ox'y'$ associé à l'axe polaire Ox', les coordonnées cartésiennes de M sont

$$\begin{cases} x' = r\cos(\theta - \alpha) \\ y' = r\sin(\theta - \alpha). \end{cases}$$

2° **Coordonnées cylindriques.** — On donne un repère orthonormé $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, un point générique M de l'espace, m sa projection orthogonale sur le plan Oxy. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de l'axe OX choisi sur Om, θ et r des coordonnées polaires de m, et $z = \overline{mM}$. On a

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u} + z\vec{k}.$$

Inversement au triplet (θ, r, z) on associe un point M déterminé de l'espace (fig. 18) : θ, r, z sont appelés *coordonnées cylindriques* (ou semi-polaires) du point M (fig. 18).

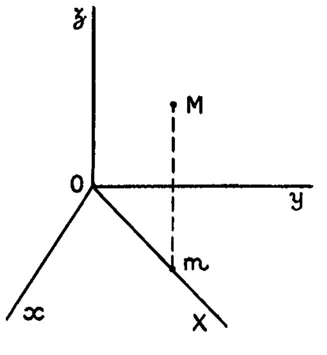


FIG. 18.

$\theta = \theta_0$ représente un plan contenant Oz;
$z = h$ représente un plan parallèle à xOy;
$r = r_0$ représente le cylindre de révolution d'axe Oz, de rayon $|r_0|$.

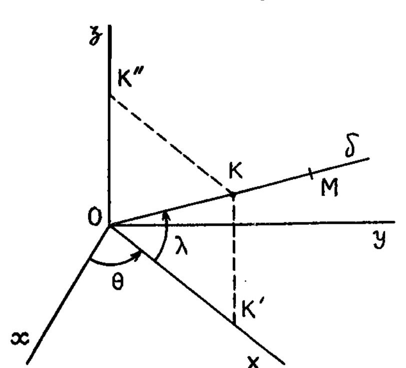


FIG. 19.

3° **Coordonnées sphériques.** — *a) Angles polaires d'une direction orientée dans l'espace.* — On donne un repère orthonormé $Oxyz$; soit $O\delta$ la demi-droite représentant une direction orientée $\vec{\delta}$; soit $\overrightarrow{OK}$ un vecteur unitaire de la direction $\vec{\delta}$. Le plan déterminé par Oz et le support de $O\delta$ coupe le plan xOy suivant une droite sur laquelle on choisit l'axe $\overrightarrow{OX}$, soit $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX})$ l'angle polaire de $\overrightarrow{OX}$ (fig. 19).

I. — On oriente le plan des deux axes $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{Oz}$ de façon que $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Oz}) = +\frac{\pi}{2}$, et dans ce plan on pose $\lambda = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\delta})$.

On appelle angles polaires de la direction orientée $\overrightarrow{\delta}$ les deux angles θ et λ; θ est dit *longitude* de $\overrightarrow{\delta}$, et λ est dit *latitude* de $\overrightarrow{\delta}$.

Dans le repère OXz les coordonnées du point K sont $X = \cos\lambda$, $z = \sin\lambda$; on en déduit les coordonnées de K dans le repère $Oxyz$, c'est-à-dire les cosinus directeurs de $\overrightarrow{\delta}$.

$$\alpha = \cos\lambda \cos\theta, \qquad \beta = \cos\lambda \sin\theta, \qquad \gamma = \sin\lambda.$$

II. — On peut aussi repérer Oδ dans le plan des deux axes $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{Oz}$, à partir de $\overrightarrow{Oz}$, en orientant ce plan de façon que $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OX}) = +\frac{\pi}{2}$. On pose alors $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{O\delta}) = \varphi$, et on dit que φ est la *colatitude* de $\overrightarrow{\delta}$.

Cette dénomination vient de ce que, avec la première convention d'orientation,

$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\delta}) + (\overrightarrow{O\delta}, \overrightarrow{Oz}) = +\frac{\pi}{2},$$

or $(\overrightarrow{O\delta}, \overrightarrow{Oz})$, avec la première convention et $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{O\delta})$ avec la seconde convention, sont mesurés par le même nombre φ (à 2π près), en sorte que

$$\theta + \varphi = +\frac{\pi}{2}.$$

Les coordonnées de K, dans le repère OXz sont

$$X = \sin\varphi, \qquad z = \cos\varphi$$

d'où les cosinus directeurs de $\overrightarrow{\delta}$

$$\alpha = \sin\varphi \cos\theta, \qquad \beta = \sin\varphi \sin\theta, \qquad \gamma = \cos\varphi.$$

Remarque. — En mécanique on est amené à orienter l'axe OX dans le sens de la projection orthogonale de l'axe $\overrightarrow{O\delta}$, on peut alors choisir pour la latitude λ la détermination appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$; on peut aussi supposer que la longitude appartient à $[0, 2\pi[$.

b) Définition des coordonnées sphériques. — On donne un repère orthonormé $Oxyz$; M étant un point de l'espace, on choisit sur la droite OM un axe $\overrightarrow{\delta}$; soit ρ la mesure algébrique de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $\overrightarrow{\delta}$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{OK}.$$

En associant aux angles polaires de l'axe $\vec{\delta}$, θ et λ, le nombre ρ, on obtient un système de *coordonnées sphériques* du point M.

Cette dénomination vient de ce que l'équation $\rho = a$, où a est une constante, représente la sphère de centre O, de rayon $|a|$.

L'équation $\theta = \theta_0$ représente un plan contenant Oz.

L'équation $\lambda = \lambda_0$ représente un cône de révolution d'axe Oz.

Le calcul, fait au 2°, des cosinus directeurs d'un axe dont on connaît les angles polaires permet d'écrire les formules de passage des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées sphériques (θ, λ, ρ) :

$$x = \rho\cos\lambda\cos\theta, \qquad y = \rho\cos\lambda\sin\theta, \qquad z = \rho\sin\lambda.$$

Inversement, partant de x, y, z, on a

$$\rho = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \varepsilon = \pm 1;$$

$$\sin\lambda = \frac{z}{\rho} \quad \text{détermine } \lambda \text{ entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } +\frac{\pi}{2},$$

$$\text{après quoi} \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho\cos\lambda}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho\cos\lambda}$$

détermine la longitude θ à 2π près.

On pourrait introduire la colatitude φ au lieu de la latitude λ.

II. REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UN ENSEMBLE DE POINTS (COORDONNÉES CARTÉSIENNES)

Nous supposons l'espace géométrique $\mathcal{E}$ rapporté à un repère

$$\mathcal{R} = \{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}.$$

Dans le cas d'une étude de géométrie plane, nous rapporterons le plan $\mathcal{P}$ au repère $\mathcal{R} = \{ O, \vec{i}, \vec{j} \}$.

Si un ensemble de points de $\mathcal{E}$ est fini, il suffit d'en faire une énumération en donnant les coordonnées de chacun d'eux. Dans la suite, nous n'envisagerons que des ensembles infinis.

135. ***Les méthodes de la géométrie analytique.*** — Une étude de géométrie analytique peut être envisagée à deux points de vue différents.

I. — *a*) On peut *définir analytiquement*, c'est-à-dire en utilisant des représentations paramétriques et des équations (cf. n° **136**) des sous-ensembles de l'espace géométrique $\mathcal{E}$ que l'on appelle *courbes* et *surfaces*.

b) On peut étudier, à partir de la définition analytique, des propriétés générales de ces courbes et de ces surfaces aussi bien du point de vue local (tangente, plan tangent, ...) que du point de vue global (construction, enveloppes, courbes tracées sur une surface...).

Le lecteur trouvera au tome IV l'étude de ces divers problèmes.

II. — On peut aussi avoir à étudier un sous-ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathcal{E}$, *défini géométriquement* comme l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ qui possèdent une propriété donnée P. On cherchera à associer à $\mathcal{K}$ soit une représentation paramétrique, soit une équation implicite, de façon que l'étude des propriétés de $\mathcal{K}$ soit ramenée à des questions d'algèbre ou d'analyse (cf. n° 139).

Les deux points de vue (I) et (II) réagissent d'ailleurs l'un sur l'autre :

α) On peut reconnaître dans l'ensemble $\mathcal{K}$ une courbe ou une surface déjà rencontrée en (I), de façon à faire profiter $\mathcal{K}$ des études locales ou globales signalées en (I, *b*).

β) On peut faire bénéficier l'étude d'une courbe ou d'une surface — donnée analytiquement — de la connaissance préalable de certaines propriétés géométriques d'un ensemble $\mathcal{K}$ auquel on aura pu identifier la courbe ou la surface.

136. ***Définition analytique d'un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{P}$.*** — 1° Nous allons passer en revue les principaux modes analytiques de définition d'un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{P}$.

Définition I. — Soient φ, ψ, θ trois applications de R dans R définies sur un même champ $\mathcal{C}$, et F l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ déterminée, dans le repère $\mathcal{R}$, par

$$u \in \mathcal{C} \longrightarrow M \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \\ z = \theta(u) \end{cases} \tag{1}$$

L'image $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ par F est appelée *courbe paramétrée.* Les équations (1) sont dites *équations paramétriques* de $\mathcal{L}$; u est le *paramètre* du point M.

En géométrie plane, on considérera l'application F de $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$ déterminée, relativement au repère $\mathcal{R}$ de ce plan, par les équations

$$x = \varphi(u), \qquad y = \psi(u).$$

Définition II. — Soient φ, ψ, θ trois applications de R^2 dans R, définies sur un même champ $\mathcal{D}$, et F l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ déterminée, dans le repère $\mathcal{R}$, par

$$(u, v) \in \mathcal{D} \longrightarrow M \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \theta(u, v). \end{cases} \tag{2}$$

L'image $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}$ par F est appelée *surface paramétrée.* Les équations (2) sont dites *équations paramétriques* de $\mathcal{S}$; u et v sont les *paramètres* du point M.

Définition III. — Soit f une application de R^2 dans R. L'ensemble Γ des points M du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées, dans le repère $\mathcal{R}$, vérifient

$$f(x, y) = 0, \tag{3}$$

est appelé *courbe implicite.* On dit que l'équation (3) est *une équation cartésienne* de Γ.

Définition IV. — Soit f une application de R^3 dans R. L'ensemble Σ des points M de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées, dans le repère $\mathcal{R}$, vérifient

$$(4) \qquad f(x, y, z) = 0$$

est appelé *surface implicite.* On dit que l'équation (4) est une *équation cartésienne* de Σ.

Définition V. — Soient f et g deux applications de R^3 dans R. L'ensemble Γ des points M de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées, dans le repère $\mathcal{R}$, vérifient

$$(5) \qquad f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = 0$$

est appelé *courbe implicite.* On dit que les équations (5) sont *des équations cartésiennes* de Γ.

Autrement dit, une courbe implicite de l'espace $\mathcal{E}$ est l'intersection de deux surfaces implicites.

REMARQUE I. — Par abus d'écriture, lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on écrit les équations (3), (4) (resp. (5)) sous la forme abrégée

$$f = 0 \qquad (\text{resp. } f = 0 \quad \text{et} \quad g = 0).$$

REMARQUE II. — *Les ensembles* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{S}$, introduits par les définitions I et II, *ne sont pas toujours une courbe et une surface au sens vulgaire du mot*; c'est ainsi que Péano a démontré qu'il existe une courbe paramétrée $\mathcal{L}$ qui coïncide avec l'ensemble des points d'un carré. Nous reprendrons cette question aux n°s 10 et 88 du tome IV.

2° **Indifférence du choix du repère.** — Les définitions précédentes ne dépendent qu'en apparence du choix du repère $\mathcal{R}$. En effet, si nous introduisons un second repère $\mathcal{R}'$, les nouvelles coordonnées (x', y', z') du point générique M de $\mathcal{E}$ sont des fonctions polynômes du premier degré des anciennes coordonnées (x, y, z) de M, et réciproquement, si bien qu'il est indifférent d'écrire que x, y, z ou que x', y', z' sont des fonctions d'un paramètre u [resp. de deux paramètres u et v].

De même, il est indifférent d'écrire que x, y, z ou que x', y', z' sont liés par une relation [resp. deux relations] d'égalité.

137. ***Passage d'une représentation paramétrique à une représentation implicite.*** — Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'il n'y a pas de différence essentielle entre une courbe paramétrée et une courbe implicite, entre une surface paramétrée et une surface implicite.

1° **Géométrie plane.** — *a)* Soit $\mathcal{L}$ la courbe paramétrée définie dans le plan $\mathcal{P}$ (cf. n° 136, 1°) par

$$u \in \mathcal{C} \longrightarrow M \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \end{cases} \qquad (1)$$

Un point donné $M_0(x_0 \ y_0)$ appartient à $\mathcal{L}$ si et seulement si, il existe au moins une valeur u_0 de u appartenant au champ $\mathcal{C}$, telle que les formules (1) fournissent les coordonnées de M_0. En d'autres termes,

$$M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{L} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Les équations en } u \\ \qquad x_0 = \varphi(u) \qquad y_0 = \psi(u) \qquad (1') \\ \text{ont une solution commune } u_0 \in \mathcal{C}. \end{array} \right.$$

D'après la définition même de l'élimination, cette dernière condition s'exprime en éliminant u entre les équations (1′) ce qui fournit, *en général*, une relation $f(x_0, y_0) = 0$. $\mathcal{L}$ n'est autre que la courbe implicite dont une équation cartésienne, $f(x, y) = 0$, s'obtient en éliminant u entre les équations (1).

b) Inversement, à partir de la courbe implicite Γ d'équation $f(x, y) = 0$, nous pouvons utiliser le fait que, *sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité*, la relation $f(x, y) = 0$ permet (II, **151**) de définir une fonction implicite $y = \psi(x)$. Il en résulte que Γ est la courbe paramétrée

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u \\ y = \psi(u). \end{array} \right.$$

2° **Géométrie de l'espace.** — I. *Surfaces.* — *a*) Soit la surface paramétrée $\mathcal{S}$ définie par (cf. n° **136**, 1°)

$$(u, v) \in \mathcal{D} \ \longrightarrow \ M \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \theta(u, v). \end{array} \right. \qquad (2)$$

Soit $M_0(x_0 \ y_0 \ z_0)$ un point donné de $\mathcal{E}$. Nous avons

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{les trois équations aux inconnues } (u, v) \\ \varphi(u, v) = x_0; \ \psi(u, v) = y_0; \ \theta(u, v) = z_0 \quad (2') \\ \text{ont une solution } (u_0, v_0) \in \mathcal{D}. \end{array} \right.$$

Comme au 1° cette dernière condition s'exprime en éliminant u et v entre les équations (2′), ce qui fournit, *en général*, une relation $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

$\mathcal{S}$ n'est autre que la surface implicite dont l'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, s'obtient en éliminant u et v entre les trois équations (2).

b) Inversement, à partir de la surface implicite Σ d'équation $f(x, y, z) = 0$, nous pouvons utiliser le fait que, *sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité*, la relation $f(x, y, z) = 0$ permet (II, **152**) de définir une fonction implicite $z = \theta(x, y)$. Il en résulte que Σ est la surface paramétrée

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = \theta(u, v). \end{array} \right.$$

II. — *Courbes.* — *a*) A partir de la courbe paramétrée $\mathcal{L}$ définie par (cf. n° **136**, 1°)

$$u \in \mathcal{C} \ \longrightarrow \ M \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \\ z = \theta(u) \end{array} \right. \qquad (3)$$

nous obtenons, en général, par élimination de u entre les trois équations (3), deux équations $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$ qui permettent de considérer $\mathcal{L}$ comme une courbe implicite.

b) Inversement, à partir de la courbe implicite Γ d'équations

$$(4) \qquad f(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x, y, z) = 0,$$

nous pouvons utiliser le fait que, *sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité,* les relations (4) permettent (II, 153) de définir deux fonctions implicites $y = \psi(x)$ et $z = \theta(x)$. Il en résulte que Γ est la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x = u \\ y = \psi(u) \\ z = \theta(u). \end{cases}$$

3° **Comparaison des deux modes de représentation.** — Dorénavant, nous parlerons de courbes et de surfaces (sans préciser : paramétrées ou implicites), étant entendu que nous pourrons être amenés à passer, en cours d'étude, d'un mode de définition à l'autre : chacun d'eux présente en effet avantages et inconvénients pour représenter un ensemble de points, soit $\mathcal{K}$.

La représentation paramétrique permet la construction d'autant de points de $\mathcal{K}$ que l'on veut; elle individualise chaque point de $\mathcal{K}$ par son paramètre (dans le cas d'une courbe), par ses paramètres (dans le cas d'une surface); mais elle ne permet pas de répondre immédiatement à la question suivante : un point M étant donné par ses coordonnées, ce point appartient-il à $\mathcal{K}$?

La représentation implicite offre l'avantage de pouvoir reconnaître immédiatement si un point donné par ses coordonnées appartient à $\mathcal{K}$, mais elle offre l'inconvénient de ne pas se prêter aisément à la construction de points de l'ensemble $\mathcal{K}$.

138. ***Observations diverses sur les représentations implicites.*** — 1° Nous constatons que la réunion des surfaces S_k, d'équations cartésiennes $f_k = 0$, ($k = 1, 2, \ldots, p$) est la surface d'équation cartésienne

$$\prod_{k=1}^{p} f_k = 0.$$

Cette remarque nous conduira à « factoriser » le premier membre de l'équation cartésienne d'une surface donnée, toutes les fois que cela sera possible.

Il en sera de même pour une courbe implicite, dans le plan.

2° Quel que soit le réel non nul λ, les surfaces d'équations cartésiennes $f = 0$ et $\lambda f = 0$ coïncident.

Quel que soit l'entier naturel p, les surfaces d'équations cartésiennes $f = 0$ et $f^p = 0$ coïncident.

3° Si une équation $f(x, y, z) = 0$ n'est vérifiée par aucun point de l'espace, nous dirons que $f = 0$ représente une « surface vide »; il en est ainsi (1), par exemple, pour

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin(x + y + z) + 3 = 0.$$

Il en résulte que si l'équation cartésienne d'une surface $\mathcal{S}$ se factorise sous la forme $fg = 0$ et si $f = 0$ représente une surface vide, $\mathcal{S}$ coïncide avec la surface cartésienne $g = 0$; c'est ainsi que les surfaces d'équations

$$x^3 + y^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad x + y = 0$$

coïncident (1).

4° Les systèmes d'équations

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} \lambda f + \mu g = 0 \\ \lambda' f + \mu' g = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu' \\ \text{sont des réels tels que} \\ \lambda\mu' - \lambda'\mu \neq 0) \end{array}\right)$$

étant équivalents, les courbes d'équations cartésiennes (I) et (II) coïncident.

5° **Notion de surface algébrique.** — Théorème et définition. — Si une surface S est représentée dans un repère $\mathcal{R}$ par l'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, dans laquelle f est un polynôme de degré n, elle est représentée dans un autre repère $\mathcal{R}'$ par une équation $f_1(x', y', z')$, où f_1 est un polynôme de degré n; on dit que S est une surface algébrique d'ordre n.

En effet $f_1(x', y', z')$ est le polynôme de degré n' obtenu en portant dans $f(x, y, z)$ les expressions de x, y, z, données par les formules (6) du n° **132**; cette substitution ne pouvant élever le degré, on a $n' \leqslant n$.

Mais en portant dans $f_1(x', y', z')$ les expressions de x', y', z', données par les formules (7) du n° **132**, on retrouve $f(x, y, z)$; cette substitution ne pouvant élever le degré, on a $n \leqslant n'$. Finalement $n' = n$.

En géométrie plane, on définit de la même façon une courbe algébrique d'ordre n.

139. *Représentation analytique d'un ensemble $\mathcal{K}$ défini géométriquement.*

— Soit $\mathcal{K}$ un ensemble de points de l'espace $\mathcal{E}$ (ou du plan $\mathcal{P}$) caractérisé par une propriété géométrique P :

$$\text{M possède la propriété P} \iff \text{M} \in \mathcal{K}.$$

On cherche à identifier $\mathcal{K}$ avec une courbe ou une surface, paramétrée ou implicite, comme au n° **136**.

---

(1) Il n'en est naturellement plus de même si l'on se place dans l'espace $\mathcal{E}_c$ obtenu par complexification à partir de l'espace affine réel $\mathcal{E}$ (107).

1° **Géométrie plane.** — *a*) Si à tout point M de $\mathcal{K}$ on sait associer au moins une valeur u d'un champ $\mathcal{C}$ de R tel que les coordonnees de M soient données par

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \end{cases} \quad u \in \mathcal{C},$$

φ et ψ étant des applications de R dans R, et si inversement tout point de la courbe paramétrée (1) appartient à $\mathcal{K}$, on dit que les équations (1) constituent une *représentation paramétrique* de l'ensemble $\mathcal{K}$.

b) S'il existe une application f de R^2 dans R telle que

$$M(x, y) \in \mathcal{K} \iff f(x, y) = 0, \qquad (2)$$

on dit que l'équation (2) est *une équation cartésienne* de l'ensemble $\mathcal{K}$.

2° **Géométrie dans l'espace.** — *a*) Si à tout point M de $\mathcal{K}$ on sait associer au moins un élément u d'un champ $\mathcal{C}$ de $\mathcal{R}$ (resp. un élément (u, v) d'un domaine $\mathcal{D}$ de R^2), tel que les coordonnées de M soient données par

$$(3) \quad \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \\ z = \theta(u) \end{cases} \quad u \in \mathcal{C} \quad \text{(resp. (4)} \quad \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \theta(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \mathcal{D})$$

φ, ψ, θ étant des applications de R (resp. R^2) dans R, et si inversement tout point de la courbe paramétrée (3) (resp. de la surface paramétrée (4)) appartient à $\mathcal{K}$, on dit que les équations (3) (resp. (4)) constituent une *représentation paramétrique* de l'ensemble $\mathcal{K}$.

b) S'il existe une application f de R^3 dans R (resp. deux applications f et g de R^3 dans R) de sorte que

$$M \in \mathcal{K} \iff (5) \quad f(x, y, z) = 0 \quad \left(\text{resp.} \quad (6) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}\right)$$

on dit que l'équation (5) est *une équation cartésienne* de $\mathcal{K}$ (resp. les équations (6) sont *des équations cartésiennes* de $\mathcal{K}$).

Remarque. — Dans le cas des équations (1), (3) [resp. (4)], s'il y a correspondance biunivoque entre $M \in \mathcal{K}$ et $u \in \mathcal{C}$ (resp. $(u, v) \in \mathcal{D}$), on dit que la représentation paramétrique est *propre*.

3° **Exemples.** — I. — *La droite et le plan.* — Le lecteur trouvera la représentation paramétrique de la droite au n° 145, celle du plan au n° 147.

La représentation cartésienne d'une droite dans le plan est étudiée au n° 150, celle du plan dans l'espace est étudiée au n° 152, celle d'une droite de l'espace au n° 154.

Remarque I. — L'équation $x = a$ étant celle d'un plan parallèle au plan yOz, l'équation $f(x) = 0$ représente l'ensemble des plans

$$x = x_1, \qquad x = x_2, \; \ldots$$

x_1, x_2, ... étant les zéros de la fonction f.

Remarque II. — Les équations $x = a$, $y = b$ étant celles d'une droite parallèle à Oz, l'équation $f(x, y) = 0$ représente, dans l'espace, le cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz et qui a pour base, dans le plan xOy, la courbe implicite définie dans ce plan par l'équation précédente.

II. — *Le cercle et la sphère.* — Le lecteur trouvera la représentation cartésienne de la sphère et du cercle aux nos 191 et 192, et leur représentation paramétrique au no 194.

III. — *La parabole.* — Le repère $\mathcal{R}$ étant orthonormé, soit $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $D\left(x = -\frac{p}{2}\right)$ le foyer et la directrice de la parabole Γ, H la projection orthogonale sur D d'un point M du plan.

$$M \in \Gamma \iff MF = MH \iff y^2 - 2px = 0.$$

Représentation paramétrique. — Partant du fait qu'un point de Γ est déterminé par son ordonnée, on dispose de la représentation

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^2}{2p} \\ y = u \end{cases} \quad \text{ou, en posant } u = 2pv, \quad \begin{cases} x = 2pv^2 \\ y = 2pv \end{cases}$$

IV. *L'ellipse et l'hyperbole.* — Le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé; soit $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ deux points fixes donnés. Quel que soit $M(x, y)$ dans le plan, rappelons qu'il vérifie l'*inégalité triangulaire*

$$|MF - MF'| \leqslant FF' \leqslant MF + MF'.$$

Pour simplifier posons $r = MF$, $r' = MF'$; nous appellerons Γ soit l'ellipse définie comme ensemble des points M du plan tels que $r + r' = 2a$ $(2a > 2c)$, soit l'hyperbole définie comme ensemble des points du plan tels que $|r - r'| = 2a$ $(2a < 2c)$.

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ r'^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} r^2 - r'^2 = -4cx \\ r^2 + r'^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2). \end{array}\right.$$

Transformons alors l'expression

$$\begin{aligned} (2) \qquad U(x, y) &= (r + r' - 2a)(r + r' + 2a)(r - r' - 2a)(r - r + 2a) \\ U &= [(r + r')^2 - 4a^2]\,[(r - r')^2 - 4a^2] \\ U &= (r^2 - r'^2) - 8a^2(r^2 + r'^2) + 16a^4 \end{aligned}$$

d'où l'expression explicite

$$(3) \qquad U(x, y) = -16a^2(a^2 - c^2)\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1\right]$$

L'expression (2) donne l'implication

$$M(x, y) \in \Gamma \Longrightarrow U = 0.$$

Supposons maintenant par hypothèse $U = 0$; l'un au moins des facteurs de l'expression (2) est nul; ce ne peut être le second.

Si $2a > 2c$, il est impossible que $|r - r'| = 2a \leqslant 2c$; par suite

$$U = 0 \Longrightarrow r + r' = 2a.$$

Si $2c > 2a$, il est impossible que $r + r' = 2a \geqslant 2c$, par suite

$$U = 0 \Longrightarrow |r - r'| = 2a.$$

En résumé

$$(4) \qquad M \in \Gamma \iff U(x, y) = 0.$$

Une équation cartésienne de Γ est donc

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}-1=0.$$

Dans le cas de l'ellipse, on pose $a^2=c^2+b^2$,

(5) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Dans le cas de l'hyperbole, on pose $c^2=a^2+b^2$,

(5′) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Représentations paramétriques de l'ellipse et de l'hyperbole. — On sait que si deux nombres réels p et q sont tels que $p^2+q^2=1$, il existe un réel φ, déterminé à 2π près, tel que

$$p=\cos\varphi, \qquad q=\sin\varphi.$$

Partant de là, l'équation (5) donne pour l'ellipse la représentation paramétrique

$$x=a\cos\varphi, \qquad y=b\sin\varphi$$

et l'équation (5′) donne pour l'hyperbole la représentation paramétrique

$$x=\frac{a}{\cos\varphi}, \qquad y=b\operatorname{tg}\varphi.$$

On peut aussi utiliser pour l'hyperbole Γ les fonctions hyperboliques : si $M(x, y)$ vérifie l'équation (5′), il existe un nombre réel φ et un seul tel que

$$x=\varepsilon a\operatorname{ch}\varphi, \qquad y=b\operatorname{sh}\varphi$$

avec $\varepsilon=+1$ si $x>a$, $\varepsilon=-1$ si $x<-a$.

Équation focale d'une ellipse ou d'une hyperbole. — Transformons le polynôme U

(3′) $$U(x, y)=-16a^2\left[x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2+c^2-a^2\right].$$

Entre crochets nous faisons apparaître

$$x^2-2cx+c^2+y^2-\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx-a^2$$

ou $$(x-c)^2+y^2-\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2.$$

Introduisons la droite D, d'abscisse $\frac{a^2}{c}$; soit H la projection orthogonale sur D du point $M(x, y)$

$$\overline{HM}=x-\frac{a^2}{c};$$

finalement

(6) $$U(x, y)=-16a^2\left[MF^2-\frac{c^2}{a^2}MH^2\right].$$

L'équivalence (4), compte-tenu de (6), donne

$$M\in\Gamma \iff MF=\frac{c}{a}MH,$$

et l'on retrouve la définition monofocale de l'ellipse et de l'hyperbole Γ; D est la *directrice* associée au foyer F, le rapport $\frac{c}{a}=e$ est l'*excentricité* de Γ.

INTÉRIEUR ET EXTÉRIEUR D'UNE ELLIPSE OU D'UNE HYPERBOLE. — Nous avons ci-dessus interprété la nullité du polynôme $U(x, y)$; pour tout point (x, y) du plan non situé sur Γ, $U(x, y)$ est positif ou négatif.

A cause de la présence du facteur $(a^2 - c^2)$ dans l'expression (3), distinguons deux cas.

Si $a > c$ (cas de l'ellipse Γ)

$$U(x, y) > 0 \iff \begin{cases} MF < eMH \\ r + r' < 2a \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 < 0 \end{cases}$$ M est dit intérieur à l'ellipse Γ

Si $a < c$ (cas de l'hyperbole Γ).

$$U(x, y) > 0 \iff \begin{cases} MF < eMH \\ |r - r'| > 2a \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 > 0. \end{cases}$$ M est dit intérieur à l'hyperbole Γ

Le sens des inégalités change si l'on part de l'inégalité $U(x, y) < 0$; M est alors dit extérieur à Γ.

ÉQUATION DE L'HYPERBOLE RAPPORTÉE A SES ASYMPTOTES. — Considérons l'hyperbole Γ représentée par l'équation (5′) dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$. Prenons un nouveau repère $\mathcal{R}'$ ayant même origine, et dont les axes sont portés par les asymptotes de Γ; prenons sur ces axes des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dont la longueur soit l'unité de longueur (fig. 20)

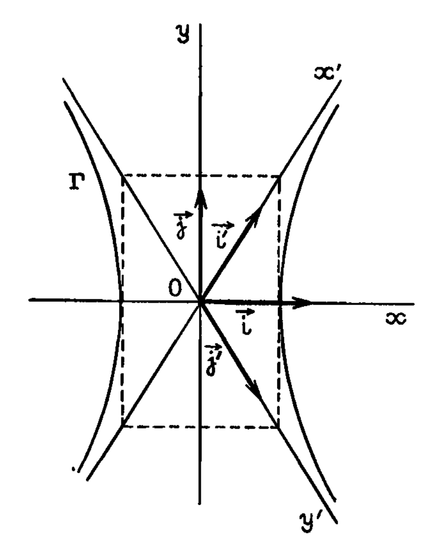


FIG. 20.

$$\begin{array}{c|c} & \vec{i'} \quad \vec{j'} \\ \hline \begin{array}{c}\vec{i} \\ \vec{j}\end{array} & \begin{bmatrix} \dfrac{a}{c} & \dfrac{a}{c} \\ \dfrac{b}{c} & -\dfrac{b}{c} \end{bmatrix} \end{array} = P \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad (2) \ . \begin{cases} x = \dfrac{a}{c}(x' + y') \\ y = \dfrac{b}{c}(x' - y'). \end{cases}$$

En substituant dans (1) les formules (2), on obtient

$$(x' + y')^2 - (x' - y')^2 = c^2$$

ou $$x'y' = \frac{c^2}{4}.$$

Telle est, en géométrie métrique, l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

V. — *Exemples divers.* — Le lecteur peut dès maintenant étudier un certain nombre d'exemples de représentations analytiques de courbes et de surfaces, répartis ailleurs dans l'ouvrage :

1) Cycloïde (tome IV, n° 80).
Épicycloïdes et hypocycloïdes (tome IV, n° 81).
2) Hélice circulaire (tome IV, n° 126, 3°).
3) Quadriques de révolution (n° 215).

140. ***Problèmes divers.*** — **1° Projection d'une courbe sur les plans de coordonnées.** — Considérons la courbe $\mathcal{L}$ donnée par

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \\ z = \theta(u) \end{cases} \quad u \in \mathcal{C}$$

On obtient immédiatement les projections de $\mathcal{L}$ sur les plans de coordonnées; par exemple les équations

$$(2) \qquad x = \varphi(u), \qquad y = \psi(u)$$

définissent la projection de $\mathcal{L}$ sur le plan xOy, parallèlement à la direction Oz; elles représentent aussi le cylindre Γ projetant $\mathcal{L}$ parallèlement à Oz.

Remarque sur l'intersection des cylindres projetants. — L'élimination de u entre les équations (2), fournit une équation cartésienne

$$(2') \qquad \mathrm{H}(x, y) = 0$$

qui représente le cylindre Γ.

En éliminant u entre les équations

$$(3) \qquad y = \psi(u), \qquad z = \theta(u)$$

on obtient l'équation du cylindre Γ_1 projetant $\mathcal{L}$ parallèlement à Ox :

$$(3') \qquad \mathrm{H}_1(x, y) = 0.$$

L'intersection de Γ et Γ_1 comprend $\mathcal{L}$, mais peut comprendre aussi d'autres courbes, car si $\mathrm{M}(x, y, z) \in \Gamma \cap \Gamma_1$, les équations (2) ont une solution commune u_1, les équations (3) ont une solution commune u_2, mais u_2 peut être distinct de u_1.

Si l'on veut trouver une représentation cartésienne de $\mathcal{L}$ en éliminant u entre les équations (1), après avoir obtenu (2'), il faudra raisonner de la façon suivante : (2') étant réalisée, les équations (2) ont une solution commune $u = \mathrm{K}(x, y)$; on écrit que la troisième équation (1) est satisfaite par cette valeur

$$(4) \qquad z = \theta[\mathrm{K}(x, y)].$$

L'ensemble $\{$ (2'), (4) $\}$ est une représentation cartésienne de $\mathcal{L}$.

Exemple. — Soit $\mathcal{L}$ définie par

$$(1) \qquad x = \cos u, \qquad y = \sin u, \qquad z = \cos u + \sin u.$$

Une représentation cartésienne de $\mathcal{L}$ est

$$(2') \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad\qquad (4) \qquad z = x + y.$$

Les deux cylindres projetants sont représentés par

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 = 1; \qquad (\Gamma_1) \qquad y^2 + (z - y)^2 = 1.$$

Ce système de deux équations équivaut à $(z - y)^2 = 1 - y^2 = x^2$

ou encore à $\qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad y - z = \pm x.$

On voit ainsi que l'intersection de Γ et Γ_1 comprend non seulement $\mathcal{L}$, intersection du cylindre Γ par le plan (4), mais aussi la courbe $\mathcal{L}'$, intersection du cylindre Γ par le plan symétrique du précédent par rapport au plan yOz, relativement à la direction Ox.

2° **Surfaces et courbes implicites.** — *a*) On donne la surface $\mathcal{S}$ par l'équation

$$(5) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

Si on se donne z_0, l'équation

$$f(x, y, z_0) = 0$$

fournit la section de $\mathcal{S}$ par le plan de cote z_0.

Si on se donne x_0 et y_0, l'équation

$$f(x_0, y_0, z) = 0$$

fournit les points où la parallèle Δ à Oz d'abscisse x_0, d'ordonnée y_0, perce la surface $\mathcal{S}$.

b) On donne la courbe $\mathcal{L}$, intersection des surfaces

$$(6) \qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 & (\mathcal{S}_1) \\ g(x, y, z) = 0 & (\mathcal{S}_2). \end{cases}$$

Si on se donne z_0, les points communs aux sections de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ par le plan de cote z_0

$$\text{C}_1)\ f(x, y, z_0) = 0 \qquad \text{C}_2)\ g(x, y, z_0) = 0$$

sont les points de $\mathcal{L}$ qui ont pour cote z_0.

Si on se donne x_0 et y_0, un point de $\mathcal{L}$ ne sera situé sur la parallèle Δ à Oz d'abscisse x_0, d'ordonnée y_0, que si les équations

$$f(x_0, y_0, z) = 0, \qquad g(x_0, y_0, z) = 0$$

ont une solution commune en z.

On obtient la projection de $\mathcal{L}$ sur le plan xOy (ou le cylindre projetant $\mathcal{L}$ parallèlement à Oz) en éliminant z entre les deux équations cartésiennes de $\mathcal{L}$.

3° **Problèmes d'intersection.** — *a*) Il est aisé de trouver l'intersection, dans un repère cartésien plan Oxy d'une courbe $\mathcal{L}$, donnée par une équation cartésienne, et d'une courbe $\mathcal{L}'$ donnée par une représentation paramétrique :

$$\mathcal{L})\ \ f(x, y) = 0 \qquad \mathcal{L}')\ \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u). \end{cases}$$

En écrivant qu'un point de $\mathcal{L}'$ appartient à $\mathcal{L}$, on obtient immédiatement l'équation

$$f[\varphi(u), \psi(u)] = 0,$$

dont les solutions sont les valeurs prises par le paramètre u aux points communs à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$.

Dans l'espace, on obtient de même l'intersection d'une surface donnée par une équation cartésienne, avec une courbe donnée par une représentation paramétrique.

b) Si deux courbes planes sont données par des équations cartésiennes

$$(\mathcal{L})\ f(x, y) = 0 \qquad (\mathcal{L}')\ g(x, y) = 0,$$

on peut chercher l'équation aux abscisses des points communs en éliminant y entre les équations précédentes; l'équation ainsi obtenue est aussi celle de l'ensemble des droites parallèles à Oy menées par les points communs aux deux courbes.

III. REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UN ENSEMBLE DE POINTS DANS LE PLAN (COORDONNÉES POLAIRES)

141. ***Représentation d'une courbe en coordonnées polaires.*** — Soit O le pôle, Ox l'axe polaire choisi dans le plan $\mathcal{P}$; soit (θ, r) un système de coordonnées polaires d'un point M de $\mathcal{P}$.

1° Comme au n° **139**, une courbe paramétrée peut être définie dans $\mathcal{P}$ par

$$u \in \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{M}\begin{cases} \theta = \varphi(u) \\ r = \psi(u). \end{cases} \tag{1}$$

Une courbe implicite peut être définie par

$$f(\theta, r) = 0. \tag{2}$$

2° L'existence d'une double infinité de coordonnées polaires pour un point M rend plus délicate l'identification d'un ensemble $\mathcal{K}$ de points de $\mathcal{P}$ avec une courbe (paramétrée ou implicite) déterminée par une représentation polaire.

Un ensemble $\mathcal{K}$ de points de $\mathcal{P}$ étant donné par une propriété géométrique, à quelle condition une relation entre θ et r peut-elle représenter $\mathcal{K}$?

<u>Définition</u>. — **Soit $\mathcal{K}$ un ensemble de points de $\mathcal{P}$ donné par une propriété caractéristique de chacun d'eux.**

On dit que

(2) $$f(\theta, r) = 0$$

est une équation polaire de Γ si

α) M **appartenant à $\mathcal{K}$, un couple de coordonnées polaires de** M (au moins) **vérifie** (2);

β) **tout point** M **dont un couple de coordonnées polaires vérifie** (2) **appartient à $\mathcal{K}$.**

CONSÉQUENCE I. — L'ensemble $\mathcal{K}$ a, en général, une double infinité d'équations polaires, car si un couple (θ, r) vérifie (2), tous les autres couples de coordonnées polaires (θ_1, r_1) de M, définis par

$$\text{soit} \begin{cases} \theta = \theta_1 + k.2\pi \\ r = r_1 \end{cases} \qquad \text{soit} \begin{cases} \theta = \theta_1 + \pi + k.2\pi \\ r = -r_1 \end{cases}$$

vérifient l'une ou l'autre des équations

soit $f(\theta + k.2\pi, r) = 0$, soit $f(\theta + \pi + k.2\pi, -r) = 0$.

Chacune de ces équations représente $\mathcal{K}$, quel que soit k choisi dans Z.

Par exemple, si on donne $\mathcal{K}$ comme ensemble des points dont un couple de coordonnées polaires vérifie

$$r = a\frac{\theta}{\theta - 1},$$

(cette courbe est étudiée au n° 48 du tome IV), $\mathcal{K}$ admet aussi pour équations polaires

soit $r = a\dfrac{\theta + k.2\pi}{\theta + k.2\pi - 1}$, soit $r = a\dfrac{\theta + \pi + k.2\pi}{1 - [\theta + \pi + k.2\pi]}$.

Le lecteur verra ci-dessous d'autres exemples.

CONSÉQUENCE II. — Supposons connues deux fonctions $f(\theta, r)$ et $g(\theta, r)$, liées

soit par (3) $g(\theta, r) = f(\theta + k\,2\pi, r)$

soit par (4) $g(\theta, r) = f(\theta + \pi + k.2\pi, -r)$ $\qquad k \in Z.$

Montrons que les courbes γ et γ' représentées respectivement par les équations

(5) $f(\theta, r) = 0$, (6) $g(\theta, r) = 0$

sont confondues.

Supposons, par exemple, la relation (4) vérifiée; soit M un point de γ', il existe un couple θ, r de coordonnées de M qui vérifie (6); le point de coordonnées $\theta + \pi + k.2\pi, -r$ appartient à γ; or ce point n'est autre que M; par suite

$$M \in \gamma' \Longrightarrow M \in \gamma.$$

La relation (4) équivaut à

(4′) $$f(\theta, r) = g(\theta - \pi - k.2\pi, -r);$$

on en déduit, par un raisonnement analogue

$$M \in \gamma \Longrightarrow M \in \gamma'.$$

En définitive, les courbes γ et γ' sont confondues; en d'autres termes, les équations (5) et (6) sont deux équations différentes d'un même ensemble de points du plan $\mathcal{L}$.

3° **Cas particuliers :**
$r = a$ représente le cercle $(O, |a|)$
$\theta = \alpha$ représente la droite D passant par le pôle, telle que $(Ox, D) = \alpha$,
$f(r) = 0$ représente l'ensemble des cercles de centre O, dont les rayons sont $|r_1|$, $|r_2|$, $\ldots$, r_1, r_2, $\ldots$, étant les zéros de la fonction f.
$f(\theta) = 0$ représente l'ensemble des droites passant par le pôle, dont les angles polaires sont θ_1, θ_2, $\ldots$, zéros de la fonction f.

4° **Passage d'une représentation cartésienne à une représentation polaire.** — I. — La courbe Γ représentée par $g(x, y) = 0$ dans le repère orthonormé Oxy a pour équation polaire $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$.

II. — Le passage d'une représentation polaire $f(\theta, r) = 0$ à une représentation cartésienne n'est simple que si θ n'intervient que par l'intermédiaire de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, soit

$$h(\cos\theta, \sin\theta, r) = 0$$

une représentation cartésienne s'obtiendra en éliminant r entre

$$h\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, r\right) = 0 \qquad r = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}.$$

III. — Si l'équation polaire est résolue en r, soit

$$r = f(\theta),$$

on a immédiatement une représentation paramétrique cartesienne

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta;$$

l'élimination de θ donne l'équation cartésienne.

Réciproquement, il faut savoir reconnaître dans la représentation paramétrique (repère orthonormé)

$$\begin{cases} x = f(u)\cos u \\ y = f(u)\sin u \end{cases}$$

la courbe dont une équation polaire est

$$r = f(\theta).$$

5° **Points communs à deux courbes.** — Cherchons les points communs aux courbes C et C_1 représentées par les équations polaires

(7) C) $r = f(\theta)$; (8) C_1) $r = g(\theta)$.

Un point M de C $[\theta, r = f(\theta)]$ appartient à C_1 si, et seulement si, l'un quelconque des couples de coordonnées polaires de M

soit $\theta + k.2\pi$, $r = f(\theta)$, soit $\theta + \pi + k.2\pi$, $r = -f(\theta)$

vérifie l'équation (8), ce qui donne

soit (9) $f(\theta) = g(\theta + k.2\pi)$, soit (10) $-f(\theta) = g(\theta + \pi + k.2\pi)$.

6° **Application à l'inversion.** — Dans l'inversion $\mathfrak{J}(O, k)$, les points $M(\theta, r)$ et $M'(\theta, r')$ sont homologues si et seulement si

(11) $$rr' = k.$$

Si la courbe Γ a pour équation polaire $r = f(\theta)$,

la courbe inverse Γ' a pour équation polaire $r' = \dfrac{k}{f(\theta)}$.

Remarque. — Les formules cartésiennes relatives à l'inversion s'obtiennent dans l'espace comme dans le plan en écrivant que les points M et M' (distincts du pôle O) sont homologues dans $\mathfrak{J}(O, k)$ si, et seulement si,

α) O, M, M' sont alignés; β) $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$.

La condition (α) se traduit par l'existence d'un scalaire non nul λ tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$; la condition (β) donne alors $\lambda OM^2 = k$; finalement

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}$$

Dans un repère orthonormé de l'espace, cette relation s'écrit

$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

L'inverse de la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, dans l'inversion $\mathfrak{J}(O, k)$ a pour équation cartésienne

$$f\left(\frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0.$$

142. ***Équation polaire de la droite.*** — Soit D une droite ne passant pas par le pôle.

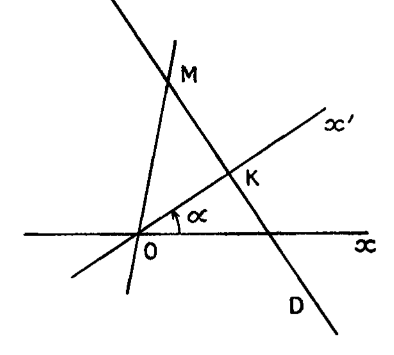


Fig. 21.

Si D est parallèle à Oy,

$$x = a \iff r = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Si D est parallèle à Ox,

$$y = b \iff r = \frac{b}{\sin\theta}.$$

Dans le cas général, soit Ox' un axe perpendiculaire à D, déterminé par

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) = \alpha;$$

D perce cet axe au point K (fig. 21), soit

$$p = (\overline{OK})_\alpha.$$

$$M(\theta, r) \in D \iff \overline{\text{proj}_{Ox'}(\overrightarrow{OM})} = \overline{OK} \iff r = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

D est représentée par $\dfrac{p}{r} = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta$,

c'est-à-dire par une équation de la forme

(1) $$\frac{1}{r} = \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta.$$

Les deux familles de couples de coordonnées polaires d'un point de la droite D vérifient l'équation (1); on peut, dans ce cas exceptionnel, dire que l'équation (1) est l'équation polaire (unique) de D.

La droite D a pour équation cartésienne $\lambda x + \mu y - 1 = 0$.

143. ***Équation polaire d'un cercle passant au pôle.*** — Soit Γ un cercle contenant le pôle O, et soit A le point diamétralement opposé à O sur Γ; nous supposons connu un couple (α, l) de coordonnées polaires de A (fig. 22) :

$$(\overline{OA})_\alpha = l.$$

$$M(\theta, r) \in \Gamma \iff (\overline{OM})_\theta = \overline{\text{proj}}_\theta(\overrightarrow{OA}) \iff r = l\cos(\theta - \alpha)$$

En posant $a = l\cos\alpha$, $b = l\sin\alpha$, Γ est représenté par

(1) $\quad r = a\cos\theta + b\sin\theta.$

En désignant par A_1 et A_2 les projections orthogonales de A sur Ox et Oy,

$$\overline{OA_1} = a, \qquad \overline{OA_2} = b,$$

l'équation (1) exprime la projection sur l'axe d'angle polaire θ de l'égalité

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}.$$

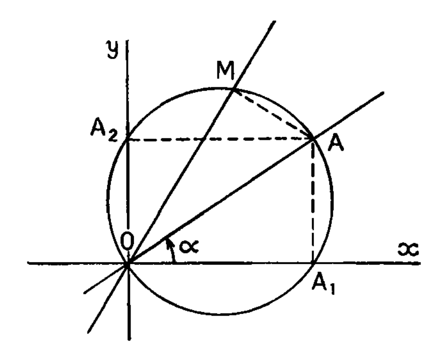


Fig. 22.

Comme au numéro précédent, dans le cas de la droite, l'équation (1) est vérifiée par les deux familles de couples de coordonnées polaires d'un point du cercle; on peut dire, dans ce cas exceptionnel, que l'équation (1) est l'équation polaire (unique) de Γ.

Cas particulier. — Les équations

(2) $\quad r = l\cos\theta,$ $\qquad$ (3) $\quad r = l\sin\theta$

représentent respectivement, (2), un cercle dont le diamètre OA est porté par Ox; (3), un cercle dont le diamètre OA est porté par Oy.

144. ***Équations polaires d'une conique ayant un foyer au pôle.*** — Prenons d'abord le cas d'une conique Γ admettant l'axe polaire Ox pour axe focal; la directrice D associée au foyer O est perpendiculaire à Ox au point K d'abscisse d (fig. 23) :

$$\overline{OK} = d.$$

Si H est la projection orthogonale sur D d'un point M du plan, et si e est l'excentricité de Γ :

$$M \in \Gamma \iff OM = e\,MH;$$

or $\overline{MH} = d - r\cos\theta$, si bien que la condition précédente se traduit par

$$(1) \qquad |r| = e\,|d - r\cos\theta|$$

ou encore par $\varepsilon r = e\,(d - r\cos\theta) \qquad \varepsilon = +1$ ou -1

ou enfin par $r(\varepsilon + e\cos\theta) - p = 0 \qquad$ avec $\qquad p = ed.$

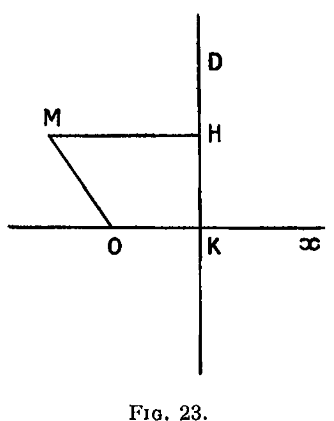


Fig. 23.

Posons

$$f(\theta, r) = r\,(1 + e\cos\theta) - p$$
$$g(\theta, r) = r\,(-1 + e\cos\theta) - p$$

$$M \in \Gamma \iff \begin{cases} \text{soit } f(\theta, r) = 0 & (2) \\ \text{soit } g(\theta, r) = 0 & (3) \end{cases}$$

Γ est représentée par la réunion des équations (2) et (3).

Or il se trouve que

$$g(\theta, r) = f(\theta + \pi, -r).$$

D'après l'étude faite au n° **141**, (2) et (3) sont deux équations différentes d'une même courbe.

En d'autres termes

$$M(\theta, r) \text{ vérifie } (2) \implies M \in \Gamma$$

L'équation (2) est une condition suffisante pour que le point (θ, r) appartienne à Γ.

Il en est de même pour l'équation (3).

On a ici un exemple d'une courbe Γ qui admet deux représentations polaires différentes.

Exemple. — La figure 24 montre l'hyperbole Γ représentée par l'équation

$$r = \frac{3}{1 + 2\cos\theta}$$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	1	3	∞	-3

Nous avons obtenu toute la courbe en faisant varier θ de $-\pi$ à $+\pi$; nous avons indiqué par une flèche le sens dans lequel la courbe est décrite.

Remarque. — La corde focale parallèle à la directrice a pour longueur $2\,|p|$; $|p|$ est appelé paramètre de la conique.

Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, de centre Ω, OK =

$$\left| \overline{\Omega K} - \overline{\Omega O} \right| = \left| \frac{a^2}{c} - c \right| = \frac{b^2}{c}$$

avec les notations classiques (cf. n° 139),

Il en résulte que

$$|p| = e\,OK = \frac{b^2}{a}.$$

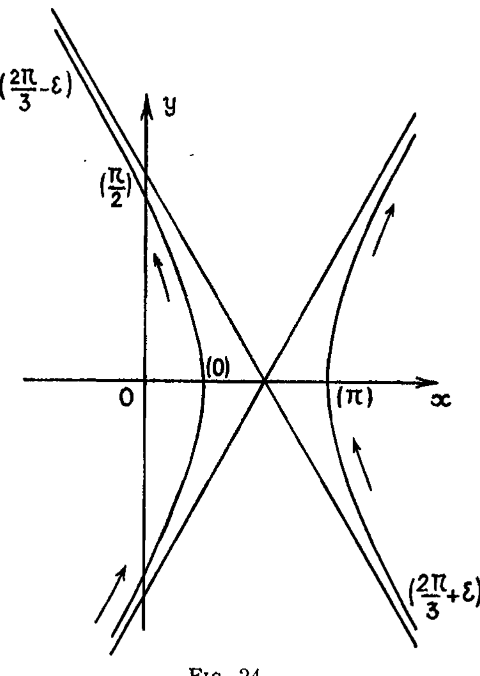


FIG. 24.

Généralisation. — Si la directrice D a une position quelconque dans le plan, soit Ox' un axe d'angle polaire α perpendiculaire à D, et soit $(\overline{OK})_\alpha = d$. Dans le repère polaire $\{O, Ox'\}$, Γ est représentée par l'une quelconque des équations (2) ou (3) (en y remplaçant θ par θ'); or $\theta = \alpha + \theta'$, par suite, dans le repère $\{O, Ox\}$, Γ est représentée par

soit $\quad r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}, \qquad$ soit $\quad r = \dfrac{p}{-1 + e\cos(\theta - \alpha)}.$

EXERCICES

1. — On donne un triangle ABC. Trouver un point D tel que le tétraèdre ABCD ait l'une des propriétés suivantes : 1° les arêtes opposées sont égales; 2° les droites joignant les milieux des arêtes opposées sont deux à deux perpendiculaires; 3° les aires des faces sont égales. (On choisira les axes de coordonnées rectangulaires de façon que les coordonnées de B soient $(c, 0, 0)$ celles de C $(-c, 0, 0)$, celles de A $(a, b, 0)$ et on calculera les coordonnées de D. On discutera en supposant que B et C sont fixes et que A est variable dans le plan xOy.)

2. — Soit $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ trois vecteurs de même module, deux à deux rectangulaires. Soient A, B, C les projections de P, Q, R sur un plan Π passant par O, soit a, b, c les affixes de A, B, C dans un repère orthonormé du plan Π : démontrer que l'on a la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Examiner la réciproque.

3. — Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$ une surface Σ a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1 = 0.$$

On coupe Σ par un plan Π contenant l'origine O; former l'équation de la section Γ par rapport à un repère orthonormé de Π. Peut-on choisir Π pour que Γ soit une hyperbole équilatère?

4. — Un trièdre $Oxyz$ est donné par les mesures de ses faces : $\alpha = \widehat{yOz}$, $\beta = \widehat{zOx}$, $\gamma = \widehat{xOy}$; on prend pour nouveaux axes les bissectrices OX, OY, OZ des faces yOz, zOx, xOy; écrire les formules de changement d'axes (repères normés).

5. — On donne un repère $\mathcal{R}$ orthonormé et un plan quelconque Π; soit $\mathcal{R}'$ le repère symétrique de $\mathcal{R}$ par rapport à Π; écrire les formules de changement de coordonnées orthonormées quand on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$.

6. — On fait tourner un repère orthonormé $\mathcal{R}$ autour de la droite Δ ($x = y = z$), la mesure de la rotation étant π; soit $\mathcal{R}'$ le repère obtenu; écrire les formules de changement de coordonnées quand on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$.

7. — On donne deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ orthonormés de même origine O; existe-t-il des points ayant mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$? (Distinguer deux cas suivant que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ont, ou non, la même orientation).

8. — A, B, C désignant les angles d'un triangle, étudier les surfaces représentées paramétriquement par

a) $x = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad y = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \quad z = \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$

b) $x = \cot A, \quad y = \cot B, \quad z = \cot C.$

9. — L'équation $\frac{1}{r} = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta + \gamma$ représentant une conique de foyer O, la directrice D associée à O a pour équation

$$\frac{1}{r} = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta.$$

10. — Étant donnée une origine O, on convient de faire correspondre à tout point M un point M' aligné avec O et M, les rayons polaires $\rho = \overline{OM}$, $\rho' = \overline{OM'}$ étant liés par la relation

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho}+\frac{1}{a} \qquad (a > 0 \text{ donné}).$$

A un point M correspondent deux points M' la définition laissant arbitraire le sens positif sur OM. Étudier les courbes que décrivent M' quand M décrit un cercle passant par O.

*Connaissant la tangente en M à une courbe γ, construire la tangente en M' à la courbe déduite de γ par la transformation.

CHAPITRE XIII

LA DROITE ET LE PLAN

L'essentiel de ce chapitre est consacré à la représentation de la droite et du plan en géométrie affine; un dernier sous-chapitre étudiera quelques problèmes particuliers en géométrie euclidienne.

Le repère affine utilisé sera désigné par $\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$, ou $Oxyz$.

I. REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES DE LA DROITE ET DU PLAN

Le lecteur qui a étudié le n° 56 peut se dispenser d'étudier les n°s 145 à 149 qui n'en sont qu'un aspect particulier.

145. ***Droite déterminée par un point et un vecteur directeur.*** — On détermine une droite Δ par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur directeur $\vec{V}(a, b, c)$ parallèle à Δ; une telle droite pourra être désignée, dans la suite, par le symbole $(A, \vec{V})$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à Δ si, et seulement si, il existe un réel ρ tel que (I, n° 64) :

$$(1) \qquad \overrightarrow{AM} = \rho \vec{V}$$

ρ est l'abscisse de M dans le repère affine $\{ A, \vec{V} \}$ de Δ; l'égalité (1) établit une bijection entre $M \in \Delta$ et $\rho \in R$.

$$\text{Par suite} \quad (1) \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \rho\vec{V} \iff (2) \begin{cases} x = x_0 + a\rho \\ y = y_0 + b\rho \\ z = z_0 + c\rho. \end{cases}$$

Les équations (2) fournissent une représentation paramétrique de Δ; lorsque ρ croît de $-\infty$ à $+\infty$, M décrit Δ dans le sens de $\vec{V}$.

146. ***Droite déterminée par deux points.*** — On détermine une droite Δ par deux points distincts $A(x_0, y_0, z_0)$ et $B(x_1, y_1, z_1)$. Montrons que $M(x, y, z)$ appartient à Δ si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}, \qquad \alpha + \beta \neq 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire si M peut être considéré comme le barycentre des points A et B affectés de poids convenablement choisis (tome I, n° 67).

I. — Si M appartient à la droite Δ, qu'on peut déterminer par A et $\overrightarrow{AB}$, il existe un réel ρ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \rho\overrightarrow{AB} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{MA} + \rho\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) = \vec{0};$$

le point M vérifie donc une relation de la forme (1) avec

$$\alpha = 1 - \rho, \qquad \beta = \rho, \qquad \alpha + \beta = 1.$$

II. — Si M vérifie (1), M est le barycentre de $A(\alpha)$ et $B(\beta)$ et M appartient à Δ (I, n° 69).

L'égalité (1) établit une bijection entre les points M de Δ et les couples (α, β) définis à un facteur près de proportionnalité ($\alpha + \beta \neq 0$).

Par suite

$$(1) \iff \overrightarrow{OM} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta} \iff (2)\ \begin{cases} x = \dfrac{\alpha x_0 + \beta x_1}{\alpha + \beta} \\ y = \dfrac{\alpha y_0 + \beta y_1}{\alpha + \beta} \\ z = \dfrac{\alpha z_0 + \beta z_1}{\alpha + \beta}. \end{cases}$$

Les formules (2) ne sont pas, à proprement parler, une représentation paramétrique de Δ, au sens du n° 136, où ne figurait qu'un seul paramètre. Mais les formules (2) étant homogènes en α et β, on peut faire intervenir soit le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, soit le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$. Posons par exemple $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$; nous nous résignons alors à perdre le point $A(\beta = 0)$.

$$M \in \Delta - \{A\} \iff (3)\ \begin{cases} x = \dfrac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1} \\ y = \dfrac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1} \\ z = \dfrac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda + 1}. \end{cases} \quad \left(\lambda = -\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}\right)$$

En observant que pour $\beta = 0$, λ est infini, on peut convenir que A est associé à λ infini.

Les formules (3) présentent en outre la particularité qu'à la valeur $\lambda = -1$ ne correspond pas de point sur Δ. L'emploi des coordonnées homogènes et la notion de point à l'infini permettent de remédier à cette difficulté.

147. *Plan déterminé par un point et deux directions.* — On détermine un plan Π par un point A (x_0, y_0, z_0) et par deux vecteurs non colinéaires $\vec{V}_1$ (a_1, b_1, c_1) et $\vec{V}_2$ (a_2, b_2, c_2) parallèles à deux directions distinctes δ_1 et δ_2 de Π; un tel plan pourra être désigné dans la suite, par le symbole $(A, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ (fig. 25).

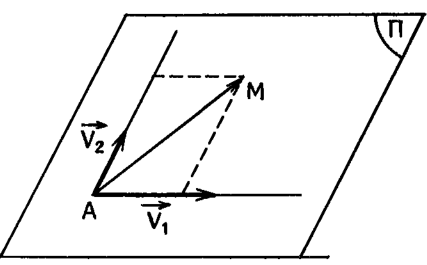


Fig. 25.

Un point M (x, y, z) appartient à Π si, et seulement si, il existe deux réels ρ_1 et ρ_2 tels que

$$(1) \qquad \overrightarrow{AM} = \rho_1 \vec{V}_1 + \rho_2 \vec{V}_2;$$

ρ_1 et ρ_2 sont les coordonnées de M dans le repère affine $\{A, \vec{V}_1, \vec{V}_2\}$; l'égalité établit une bijection entre $M \in \Pi$ et les couples rangés (ρ_1, ρ_2) de nombres réels. Par suite

$$(1) \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \rho_1 \vec{V}_1 + \rho_2 \vec{V}_2 \iff (2) \begin{cases} x = x_0 + a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2 \\ y = y_0 + b_1 \rho_1 + b_2 \rho_2 \\ z = z_0 + c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2. \end{cases}$$

Les courbes $\rho_1 = C^{te}$ (resp. $\rho_2 = C^{te}$) sont les parallèles à δ_2 (resp. δ_1) dans le plan Π.

148. *Plan déterminé par trois points.* — On détermine un plan Π par trois points distincts non alignés (fig. 26)

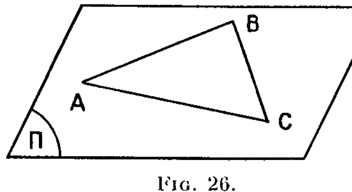


Fig. 26.

$$A\ (x_0, y_0, z_0), \qquad B\ (x_1, y_1, z_1), \qquad C\ (x_2, y_2, z_2).$$

Montrons que M (x, y, z) appartient à Π si, et seulement si, il existe trois réels α, β, γ tels que

$$(1) \qquad \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0} \qquad \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

c'est-à-dire si M peut être considéré comme le barycentre des points A, B, C affectés de poids convenablement choisis (I, 67).

I. — Supposons que M appartienne à Π, qu'on peut déterminer par A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Il existe deux réels ρ_1 et ρ_2 tels que

$$\overrightarrow{AM} = \rho_1 \overrightarrow{AB} + \rho_2 \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{MA} + \rho_1(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) + \rho_2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) = \vec{0};$$

le point M vérifie donc une relation de la forme (1) avec

$$\alpha = 1 - \rho_1 - \rho_2, \qquad \beta = \rho_1, \qquad \gamma = \rho_2 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

II. — Inversement, étant donnés trois nombres réels α, β, γ, pourvu que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, leur barycentre existe; ce point est défini par (1), et est situé dans le plan Π (I, nº 69).

L'égalité (1) établit une bijection entre les points M de Π et les triplets rangés de nombres réels (α, β, γ), définis à un facteur près de proportionnalité $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$.

Par suite

$$(1) \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}}{\alpha + \beta + \gamma} \Longleftrightarrow (2) \begin{cases} x = \dfrac{\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y = \dfrac{\alpha y_0 + \beta y_1 + \gamma y_2}{\alpha + \beta + \gamma} \\ z = \dfrac{\alpha z_0 + \beta z_1 + \gamma z_2}{\alpha + \beta + \gamma}. \end{cases}$$

Les formules (2) ne sont pas, à proprement parler, une représentation paramétrique de Π, au sens du nº 136, où ne figuraient que deux paramètres. Les formules (2) étant homogènes en α, β, γ on peut faire intervenir les rapports de deux de ces nombres au troisième.

Posons $\frac{\alpha}{\gamma} = \lambda$, $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu$; nous nous résignons alors à perdre la droite AB, $(\gamma = 0)$:

$$M \in P - \{ \text{droite AB} \} \Longleftrightarrow (3) \begin{cases} x = \dfrac{\lambda x_0 + \mu x_1 + x_2}{\lambda + \mu + 1} \\ y = \dfrac{\lambda y_0 + \mu y_1 + y_2}{\lambda + \mu + 1} \\ z = \dfrac{\lambda z_0 + \mu z_1 + z_2}{\lambda + \mu + 1}. \end{cases}$$

Les formules (3) presentent l'anomalie qu'à un couple (λ, μ) tel que $1 + \lambda + \mu = 0$ ne correspond pas de point de Π.

L'emploi des coordonnées homogènes et la notion de point à l'infini permettent de remédier à cette difficulté.

149. ***Applications des représentations paramétriques de la droite et du plan.*** — 1. **Exemple I.** — On donne, dans un repère cartésien $Oxyz$, la courbe Γ déterminée paramétriquement par

$$(1) \qquad \begin{cases} x = af(t) + bg(t) + c \\ y = a'f(t) + b'g(t) + c' \\ z = a''f(t) + b''g(t) + c''. \end{cases}$$

Introduisons les vecteurs

	$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\overrightarrow{O\Omega}$	$\overrightarrow{OM}$
$\vec{i}$	a	b	c	x
$\vec{j}$	a'	b'	c'	y
$\vec{k}$	a''	b''	c''	z

$\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$

$$(1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \vec{A} f(t) + \vec{B} g(t) \qquad (2)$$

I. — Plaçons-nous dans le cas général où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont pas colinéaires; les points μ définis par

$$\overrightarrow{O\mu} = \overrightarrow{O\Omega} + \vec{A}u + \vec{B}v \tag{3}$$

sont ceux du plan Π déterminé par le point Ω et les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Les points M définis par (2) sont ceux pour lesquels

$$u = f(t), \qquad v = g(t); \tag{4}$$

les équations (1) représentent paramétriquement dans le repère $Oxyz$ la courbe Γ qui est représentée paramétriquement dans le repère $\{\Omega, \vec{A}, \vec{B}\}$ par les équations (4).

II. Dans le cas particulier où $\vec{B}$ est colinéaire avec $\vec{A}$, il existe un réel k tel que $\vec{B} = k\vec{A}$; l'équation vectorielle (2) prend la forme

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \vec{A}[f(t) + kg(t)],$$

Γ est la portion de la droite $\Delta(\Omega, \vec{A})$ décrite par ceux des points de cette droite dont l'abscisse dans le repère $\{\Omega, \vec{A}\}$ vérifie

$$\rho = f(t) + kg(t).$$

Cas particuliers. — I. Nous supposons $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non colinéaires.

$$f(t) = t^2, \qquad g(t) = t;$$

x, y, z sont des trinômes de degré 2 en t, Γ est une parabole.

II. $$f(t) = \cos\omega t, \qquad g(t) = \sin\omega t;$$

x, y, z sont des polynômes du premier degré en $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$; Γ est une ellipse pour laquelle les droites $(\Omega, \vec{A})$ et $(\Omega, \vec{B})$ sont deux diamètres conjugués.

Dans le cas particulier où le repère $Oxyz$ est orthonormé la courbe Γ précédente est un cercle si les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux et ont même longueur.

2° **Exemple II.** — On donne la surface Σ représentée paramétriquement par les formules

$$\begin{cases} x = auv + bu + cv + d \\ y = a'uv + b'u + c'v + d' \\ z = a''uv + b''u + c''v + d''. \end{cases} \tag{5}$$

Introduisons les vecteurs

	$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\vec{C}$	$\overrightarrow{O\Omega}$	$\overrightarrow{OM}$	
$\vec{i}$	a	b	c	d	x	$\vec{A} \neq \vec{0}$
$\vec{j}$	a'	b'	c'	d'	y	$\vec{B} \neq \vec{0}$
$\vec{k}$	a''	b''	c''	d''	z	$\vec{C} \neq \vec{0}.$

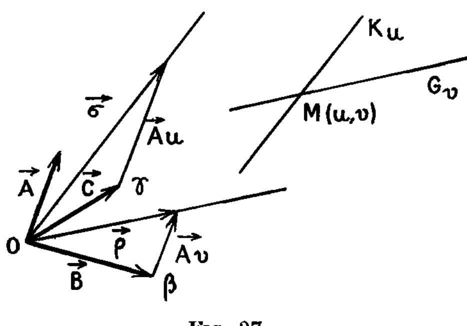


Fig. 27.

Bornons-nous au cas où les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ne sont pas coplanaires (fig. 27).

Les formules (5) se traduisent vectoriellement par

$$\overrightarrow{\Omega M} = \vec{A}uv + \vec{B}u + \vec{C}v. \tag{6}$$

Si v est une constante, on peut écrire

$$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{C}v + \left(\overrightarrow{A}v + \overrightarrow{B}\right)u;$$

lorsque u varie seul, M décrit une droite G_v, dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{A}v + \overrightarrow{B}$.

Si u est une constante, on peut écrire

$$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{B}u + \left(\overrightarrow{A}u + \overrightarrow{C}\right)v;$$

lorsque v varie seul, M décrit une droite K_u, dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{A}u + \overrightarrow{C}$.

On constate ainsi que les courbes coordonnées de la surface Σ sont des droites; on a mis leur direction en évidence sur la figure 27 en construisant $\overrightarrow{O\beta} = \overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{O\gamma} = \overrightarrow{C}$; les représentants en O des vecteurs $\overrightarrow{\rho}$ et $\overrightarrow{\sigma}$ ont respectivement leurs extrémités sur les droites $\left(\beta, \overrightarrow{A}\right)$ et $\left(\gamma, \overrightarrow{A}\right)$; les droites G_v sont parallèles au plan $\left(O\beta, \overrightarrow{A}\right)$, les droites K_u sont parallèles au plan $\left(O\gamma, \overrightarrow{A}\right)$.

Toute droite K_u et toute droite G_v se rencontrent au point M de Σ qui a pour paramètres u et v.

II. REPRÉSENTATION CARTÉSIENNE DE LA DROITE ET DU PLAN

Le lecteur qui a étudié au n° 62 les hyperplans d'un espace affine n'a pas à étudier les nos 150 à 155.

Pour éviter toute confusion entre les équations qui représentent les ensembles géométriques usuels et les égalités qui expriment la définition ou la coïncidence de deux polynômes, nous utiliserons, en Géométrie, le symbole $\equiv$ avec la signification suivante :

P et Q étant deux polynômes aux mêmes indéterminées sur un corps K, $P \equiv Q$ signifie que ces deux polynômes sont égaux; les coefficients de P et Q sont alors égaux, chacun à chacun.

Le polynôme nul sera désigné par (0), la lettre O étant réservée ici à l'origine d'un repère cartésien.

150. *Représentation cartésienne de la droite dans le plan.* —

1° Théorème I. — **Toute droite du plan peut être représentée par une équation du premier degré entre les coordonnées cartésiennes d'un point du plan.**

Soit $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ un repère cartésien

$$a)\ \left\{\begin{array}{l} M \in \text{droite}\left(A, \overrightarrow{V}\right) \\ A(x_0, y_0) \\ \overrightarrow{V}(a, b) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{V} \\ \text{colinéaires} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

$$b)\ \left\{\begin{array}{l} M \in \text{droite } AB \\ \left.\begin{array}{l} A(x_0, y_0) \\ B(x_1, y_1) \end{array}\right\} A \neq B \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} A, B, M \\ \text{alignés} \end{array}\right\} \iff \begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans chacun des cas précédents l'équation obtenue est de la forme

$$(1) \qquad ux + vy + h = 0$$

u et v n'étant pas simultanément nuls, puisque a et b d'une part, $x_1 - x_0$ et $y_1 - y_0$ d'autre part ne sont pas simultanément nuls; l'équation (1) est bien du premier degré en x et y.

Cas particuliers. — a) Droite coupant l'axe Ox en $A(\overline{OA} = a)$ et l'axe Oy en $B(\overline{OB} = b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0;$$

b) Droite joignant l'origine au point $A(x_0, y_0)$

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$$

en particulier : première diagonale $y = x$

seconde diagonale $y = -x$;

c) Droite de coefficient directeur m,

$$y = mx + p.$$

p est l'ordonnée à l'origine.

2° Théorème II. — **Toute équation du premier degré entre les coordonnées cartésiennes d'un point du plan représente une droite.**

Soit Δ la courbe dont une équation est

$$ux + vy + h = 0 \quad (u \text{ et } v \text{ non nuls tous deux}).$$

Pour fixer les idées, supposons $v \neq 0$. Une autre équation de Δ est

$$y = -\frac{u}{v}x - \frac{h}{v}.$$

Sous cette forme on reconnaît en Δ la droite ayant pour ordonnée à l'origine $-\frac{h}{v}$, pour coefficient directeur $-\frac{u}{v}$ (ou pour paramètres directeurs $-v$ et u).

151. *Parallélisme dans le plan.* — Dans ce paragraphe le parallélisme est considéré au sens large.

1° Droite et direction parallèles. — On donne la droite Δ représentée par l'équation.

$$(1) \qquad ux + vy + h = 0$$

et la direction δ ayant pour vecteur directeur $\vec{V}$ (α, β). *A quelle condition δ est-elle la direction de Δ?*

a) *Première méthode.* Il résulte du n° 150, 2° que la droite Δ a pour paramètres directeurs $-v$ et u; la condition de parallélisme (n° 118) donne

$$\begin{vmatrix} \alpha & -v \\ \beta & u \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad u\alpha + v\beta = 0 \qquad (2)$$

b) *Deuxième méthode.* — La direction δ est celle de Δ si, et seulement si, en prenant le point A (x_0, y_0) sur Δ, le point B tel que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{V}$$

appartient aussi à Δ (fig. 28).

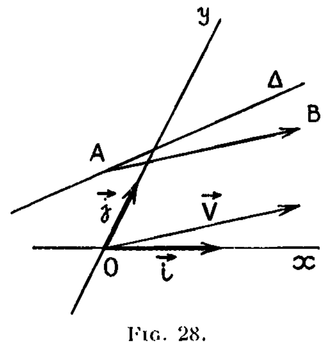


Fig. 28.

Les égalités

$$ux_0 + vy_0 + h = 0 \qquad (A \in \Delta)$$
$$u(x_0 + \alpha) + v(y_0 + \beta) + h = 0 \qquad (B \in \Delta)$$

ne sont vérifiées simultanément que si

$$u\alpha + v\beta = 0 \qquad (2)$$

2° Parallélisme de deux droites. — On donne les droites Δ et Δ' ayant pour équations

$$(3) \qquad \begin{cases} ux + vy + h = 0 & (\Delta) \\ u'x + v'y + h' = 0 & (\Delta') \end{cases}$$

Δ et Δ' ont la même direction δ si, et seulement si, il existe deux nombres réels, α, β, non simultanément nuls, tels que

$$\begin{cases} u\alpha + v\beta = 0 \\ u'\alpha + v'\beta = 0, \end{cases}$$

ce qui est possible sous la condition

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = 0.$$

En résumé $\quad \Delta$ et Δ' sont parallèles $\iff$ $uv' - vu' = 0 \qquad (4)$

Cas particuliers. — Il résulte de l'étude précédente que les droites Δ et Δ' sont parallèles si, et seulement si, le système (3) est de rang 1.

Deux cas peuvent alors se présenter :

I) *Le caractéristique associé à l'équation principale est nul*; le système (3) se réduit à une seule équation (principale); les droites Δ et Δ' sont alors confondues; c'est le cas où

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{rg}\begin{bmatrix} u & v & h \\ u' & v' & h' \end{bmatrix} = 1.$$

II) *Le caractéristique associé à l'équation principale n'est pas nul*; le système (3) est impossible; les droites Δ et Δ' sont strictement parallèles; c'est le cas où

$$\text{(6)} \qquad \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = 0, \qquad \operatorname{rg}\begin{bmatrix} u & v & h \\ u' & v' & h' \end{bmatrix} = 2.$$

Application. — I) La condition (5), nécessaire et suffisante pour que les droites Δ et Δ' soient confondues conduit à l'énoncé suivant :

Deux équations du premier degré en x et y représentent la même droite si, et seulement si, leurs coefficients sont proportionnels.

Avec les conventions usuelles sur les suites de rapports égaux, cette condition s'exprime par

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{h}{h'}.$$

En posant

$$D \equiv ux + vy + h$$
$$D' \equiv u'x + v'y + h'$$

la coïncidence des droites Δ et Δ' s'exprime par l'existence d'un réel k, non nul, tel que

$$D' \equiv kD.$$

II) Les conditions (6) s'expriment, dans la pratique, sous la forme

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} \neq \frac{h}{h'}$$

3° **Équation générale des droites parallèles à Δ.** — Reprenons les notations du 2° et supposons donnée la droite Δ.

a) Si Δ' est parallèle à Δ, la condition (4) est réalisée, et il existe un réel $\rho \neq 0$ tel que

$$u' = \rho u, \qquad v' = \rho v;$$

l'équation initiale de Δ' peut alors s'écrire

$$\rho(ux + vy) + h' = 0$$

Puisque ρ n'est pas nul, une autre équation de Δ' est

$$ux + vy + \lambda = 0 \qquad (5)$$

b) Inversement, quel que soit λ, l'équation (5) représente une droite parallèle à Δ.

On résume les deux résultats :

a) toute droite parallèle à Δ a une équation de la forme (5);

b) toute équation de la forme (5) représente une droite parallèle à Δ en énonçant :

THÉORÈME. — **L'équation générale des droites parallèles à la droite Δ**

$$ux + vy + h = 0 \quad \textbf{est} \quad ux + vy + \lambda = 0$$

où λ est une constante réelle quelconque.

En particulier, la parallèle Δ_0 à la droite Δ menée par l'origine a pour équation

$$ux + vy = 0.$$

La condition (2) de parallélisme se retrouve en écrivant que la parallèle Δ_0 à Δ menée par O contient le point (α, β), point directeur de la direction δ.

152. ***Représentation cartésienne du plan.*** — 1° THÉORÈME I. — **Tout plan peut être représenté par une équation du premier degré entre les coordonnées cartésiennes d'un point.**

Soit $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère cartésien.

$$\left\{\begin{array}{l} M \in \text{plan } \left(A, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) \\ \quad A(x_0, y_0, z_0) \\ \left.\begin{array}{l}\text{direction } \delta_1 : \vec{V}_1(a_1, b_1, c_1) \\ \text{direction } \delta_2 : \vec{V}_2(a_2, b_2, c_2)\end{array}\right\} \delta_1 \neq \delta_2. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\vec{AM}, \vec{V}_1, \vec{V}_2 \\ \text{coplanaires}\end{array}\right\}$$

La condition obtenue s'exprime par :

$$\text{dét}\left[\vec{AM}, \ \vec{V}_1, \vec{V}_2\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

En développant l'équation précédente, on trouve une équation de la forme

$$ux + vy + wz + h = 0 \qquad (1),$$

dans laquelle u, v, w ne sont pas simultanément nuls, car le fait que δ_1 et δ_2 sont distinctes s'exprime par

$$\text{rg}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = 2$$

2° Théorème II. — **Toute équation du premier degré entre les coordonnées cartésiennes d'un point représente un plan.**

Soit Π la surface dont une équation est

(1) $ux + vy + wz + h = 0,$ (u, v, w non nuls tous les trois).

Pour fixer les idées, supposons $w \neq 0$; une autre équation de Π est

(2) $$z = -\frac{u}{w}x - \frac{v}{w}y - \frac{h}{w}.$$

On en déduit que Π admet la représentation paramétrique (3) $\begin{cases} x = -w\rho \\ y = -w\rho' \\ z = -\frac{h}{w} + u\rho + v\rho' \end{cases}$ $\rho, \rho' \in \mathbf{R}$.

L'équation (1) est donc celle du plan passant par le point $A\left(0, 0, -\frac{h}{w}\right)$ et parallèle aux directions $\delta_1(-w, 0, u)$ et $\delta_2(0, -w, v)$.

3° **Cas particuliers.** — *a*) Si deux des coefficients des variables sont nuls, l'équation (1) est celle d'un plan parallèle à un plan de coordonnées.

Si un seul des coefficients des variables est nul, l'équation (1) est celle d'un plan parallèle à un axe de coordonnées; c'est ainsi que

$$ux + vy + h = 0$$

représente un plan parallèle à Oz).

Plus particulièrement, l'équation

$$ux + vy = 0$$

représente un plan contenant l'axe Oz.

b) Le plan coupant l'axe Ox en $A(\overline{OA} = a)$, l'axe Oy en $B(\overline{OB} = b)$, l'axe Oz en $C(\overline{OC} = c)$ a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

c) L'équation du plan contenant l'origine et les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ s'obtient comme au 1° en exprimant que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ sont coplanaires, soit

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

L'équation du plan contenant trois points donnés M_1, M_2, M_3 s'obtient en utilisant la condition, vue au n° 119, pour que les quatre points M, M_1, M_2, M_3 soient dans un même plan.

153. *Parallélisme dans l'espace.* — Dans ce paragraphe, le parallélisme est considéré au sens large.

1° **Direction de droite parallèle à un plan.** — On donne le plan Π représenté par l'équation

$$(1) \qquad ux + vy + wz + h = 0$$

et la direction δ ayant pour vecteur directeur $\vec{V}(\alpha, \beta, \gamma)$: *à quelle condition δ est-elle parallèle au plan Π?*

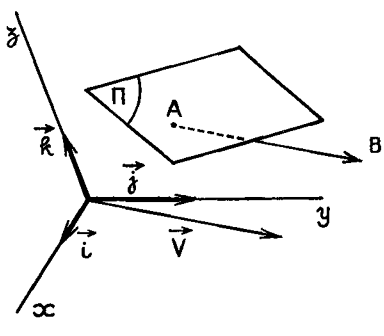


Fig. 29.

Choisissons le point $A(x_0, y_0, z_0)$ dans Π, et menons $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$; la direction δ est parallèle à Π si, et seulement si, le point B appartient à Π (fig. 29), en d'autres termes si les égalités

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0$$
$$u(x_0 + \alpha) + v(y_0 + \beta) + w(z_0 + \gamma) + h = 0$$

sont vérifiées simultanément, ou enfin si

$$(2) \qquad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

2° **Parallélisme de deux plans.** — On donne les plans Π et Π' ayant pour équations

$$(3) \qquad \begin{cases} ux + vy + wz + h = 0 & (\Pi \\ u'x + v'y + w'z + h' = 0 & (\Pi' \end{cases}$$

Π et Π' sont parallèles si, et seulement si, toute direction de droite parallèle à l'un est aussi parallèle à l'autre (condition $\mathcal{L}$)

$$(\mathcal{L}) \iff \begin{cases} u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \iff u'\alpha + v'\beta + w'\gamma = 0 \\ \forall \alpha, \beta, \gamma \text{ non tous nuls.} \end{cases}$$

$$(\mathcal{L}) \iff \begin{cases} \text{le système homogène} \\ \left.\begin{matrix} ux + vy + wz = 0 \\ u'x + v'y + w'z = 0 \end{matrix}\right\} (4) \\ \text{est de rang 1} \end{cases}$$

$$(\mathcal{L}) \iff \operatorname{rg}\begin{bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{bmatrix} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'}.$$

En résumé

$$\Pi \text{ et } \Pi' \text{ sont parallèles} \iff \frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} \qquad (4)$$

Cas particuliers. — Il résulte de l'étude précédente que les plans Π et Π' sont parallèles si, et seulement si, le système (3) est de rang 1.

Deux cas peuvent se présenter :

I) *Le caractéristique associé à l'équation principale est nul*; le système (3) se réduit à une seule équation (principale); les plans Π et Π' sont alors confondus; c'est le cas où

(5) $$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} u & v & w & h \\ u' & v' & w' & h' \end{bmatrix} = 1.$$

II) *Le caractéristique associé à l'équation principale n'est pas nul*; le système (3) est impossible; les plans Π et Π' sont strictement parallèles; c'est le cas où

(6) $$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{bmatrix} = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}\begin{bmatrix} u & v & w & h \\ u' & v' & w' & h' \end{bmatrix} = 2$$

Application. — I) La condition (5), nécessaire et suffisante pour que les plans Π et Π' soient confondus conduit à l'énoncé suivant :

Deux équations du premier degré en x, y, z, représentent le même plan si, et seulement si, leurs coefficients sont proportionnels.

Avec les conventions usuelles sur les suites de rapports égaux, cette condition s'exprime par

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} = \frac{h}{h'}.$$

En posant
$$\mathrm{P} \equiv ux + vy + wz + h$$
$$\mathrm{P}' \equiv u'v + v'y + w'z + h'$$

la coïncidence des plans Π et Π' s'exprime par l'existence d'un réel k, non nul, tel que

$$\mathrm{P}' \equiv k\mathrm{P}.$$

II) Les conditions (6) s'expriment, dans la pratique, sous la forme

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} \neq \frac{h}{h'}.$$

3° **Équation générale des plans parallèles à Π.** — Reprenons les notations du 2° et supposons donné le plan Π.

a) Si Π' est parallèle à Π, la condition (4) est réalisée et il existe un réel $\rho \neq 0$ tel que

$$u' = \rho u, \qquad v' = \rho v, \qquad w' = \rho w;$$

l'équation initiale de Π' peut alors s'écrire

$$\rho(ux + vy + wz) + h' = 0$$

Puisque ρ n'est pas nul, une autre équation de Π' est

$$ux + vy + wz + \lambda = 0 \tag{5}$$

b) Inversement, quel que soit λ, l'équation (5) est celle d'un plan parallèle à Π.

On réunit les deux propriétés *a*) et *b*) (comme au nº 151) en énonçant :

L'équation générale des plans parallèles au plan Π

$$ux + vy + wz + h = 0 \quad \textbf{est} \quad ux + vy + wz + \lambda = 0,$$

où λ **est une constante réelle quelconque.**

En particulier, le plan Π_0 parallèle au plan Π mené par l'origine a pour équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

La condition de parallélisme (2) obtenue au 1º s'interprète alors de la façon suivante : δ est parallèle à Π si, et seulement si, le plan Π_0 parallèle à Π mené par l'origine contient le point directeur (α, β, γ) de la direction δ.

4º **Plans parallèles à une même direction de droite.** — Soit $P = 0$ avec $P \equiv ux + vy + wz + h$ l'équation d'un plan Π; soit, avec des notations analogues, $P' = 0$, $P'' = 0$ les équations de deux autres plans Π' et Π''.

A quelle condition les trois plans Π, Π', Π'' *sont-ils parallèles à une même direction de droite?*

Cette configuration sera réalisée si, et seulement si, il existe trois nombres réels α, β, γ (non tous nuls) tels que

$$(6) \qquad \begin{cases} u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \\ u'\alpha + v'\beta + w'\gamma = 0 \\ u''\alpha + v''\beta + w''\gamma = 0. \end{cases}$$

Les équations (6), linéaires et homogènes en α, β, γ n'ont une solution autre que la solution (0, 0, 0) que si

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. — On rapprochera la condition (7) de la condition (1) du nº 119 qui exprime que trois directions de droite sont parallèles à un même plan.

154. ***Représentation cartésienne de la droite dans l'espace.*** — On a déjà signalé (nº 138) que le système des deux équations cartésiennes qui représentent une courbe de l'espace peut être remplacé par tout système équivalent; de là résulte une certaine « souplesse » dans la représentation cartésienne d'une droite de l'espace.

1º **Droite déterminée par un point et un vecteur directeur.**

$$\begin{Bmatrix} M(x, y, z) \in \text{droite } \Delta\left(A, \vec{V}\right) \\ A(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{V}(a, b, c) \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{V} \\ \text{colinéaires} \end{Bmatrix} \iff \qquad (1)$$

$$(1) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

avec les conventions usuelles sur les suites de rapports égaux.

Si Δ est déterminée par deux points A et B, on se ramène aux équations (1) en prenant $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.

CAS PARTICULIER. — *Équations réduites d'une droite.* — Supposons Δ non parallèle au plan xOy; sa trace sur ce plan est un point $H(p, q, 0)$; la parallèle Δ_0 à Δ menée par O perce le plan $z = 1$ en un point $\mu(a, b, 1)$; on peut prendre $(a, b, 1)$ pour paramètres directeurs de Δ, et les équations (1) prennent la forme

$$(2) \qquad \frac{x - p}{a} = \frac{y - q}{b} = \frac{z}{1}$$

$$\text{ou (3)} \qquad \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

Les équations (3) mettent en évidence les quatre paramètres a, b, p, q dont dépend la position d'une droite et en donnent une signification géométrique; elles conviennent à toute droite non parallèle au plan xOy. On les appelle *équations réduites* de Δ.

2° Droite déterminée comme intersection de deux plans. — Une droite Δ peut être déterminée comme l'intersection de deux plans distincts non parallèles, Π et Π' soit

$$(4) \qquad \begin{cases} ux + vy + wz + h = 0 \\ u'x + v'y + w'z + h' = 0 \end{cases} \qquad \text{rg}\begin{bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{bmatrix} = 2.$$

L'ensemble des deux équations (4) est une représentation cartésienne de la droite Δ.

On a souvent besoin de connaître des paramètres directeurs (α, β, γ) de Δ; on peut adopter à cette fin les coordonnées d'un point quelconque de la parallèle Δ_0 à Δ menée par l'origine; Δ_0 est l'intersection des plans Π_0 et Π'_0 respectivement parallèles à Π et Π', menés par O, soit

$$(5) \qquad \begin{cases} ux + vy + wz = 0 \\ u'x + v'y + w'z = 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\frac{\alpha}{vw' - wv'} = \frac{\beta}{wu' - uw'} = \frac{\gamma}{uv' - vu'},$$

les dénominateurs n'étant pas nuls tous les trois à cause de l'hypothèse faite sur le rang de la matrice des coefficients.

REMARQUES. — I. Si $uv' - vu' \neq 0$, Δ n'est pas parallèle au plan xOy; on peut alors résoudre les équations (4) par rapport à x et y et obtenir ainsi les équations réduites de la droite Δ.

II. — Dès qu'on a obtenu pour Δ un point et des paramètres directeurs, on peut représenter paramétriquement Δ comme au n° **145**, ce qui est souvent utile dans la pratique.

3° **Plans projetant une droite sur les plans de coordonnées.** — *a*) Si la droite Δ est représentée par les équations (1), il suffit de considérer l'égalité des deux premiers rapports pour obtenir l'équation du plan projetant Δ sur le plan xOy, parallèlement à Oz (en supposant naturellement a et b non nuls tous deux).

b) Si la droite Δ est représentée par les équations (4), l'élimination de z entre ces deux équations fournit (comme on l'a vu au n° **140**) l'équation du plan projetant Δ sur xOy parallèlement à Oz.

*4° **Coordonnées de Plücker d'une droite.** — Revenons aux équations (1). En égalant des trois façons possibles deux des rapports (1) nous écrivons ces équations

$$\begin{cases} cy - bz = cy_0 - bz_0, \\ az - cx = az_0 - cx_0, \\ bx - ay = bx_0 - ay_0, \end{cases}$$

ou, en désignant par l, m, n les seconds membres,

$$(6) \qquad \begin{cases} cy - bz = l, \\ az - cx = m, \\ bx - ay = n. \end{cases}$$

Il importe d'observer que les nombres l, m, n sont liés aux nombres a, b, c, par la relation

$$(7) \qquad al + bm + cn = 0.$$

Réciproquement, soient a, b, c, l, m, n six nombres liés par la relation (7), a, b, c *n'étant pas nuls tous les trois*. Supposons, pour fixer les idées, $a \neq 0$; cette hypothèse permet de résoudre les deux dernières équations (6) par rapport à z et y, on trouve ainsi

$$(8) \qquad z = \frac{c}{a}x + \frac{m}{a}, \qquad y = \frac{b}{a}x - \frac{n}{a}$$

et, quel que soit x, ces valeurs vérifient la première des équations (6). Les plans représentés par les deux dernières équations (6) se coupent suivant une droite D située dans le plan représenté par la première.

Les équations (6) sont celles des plans projetant D parallèlement à Ox, Oy et Oz.

Les nombres a, b, c, l, m, n, liés par la relation (7) définissent au moyen des équations (6) une droite D, on dit que ce sont des coordonnées de Plucker de cette droite.

Nous verrons au n° **175** une interprétation géométrique de ces coordonnées lorsque l'espace est euclidien et le repère orthonormé.

155. ***Intersection d'une droite et d'un plan.*** — D'après l'étude du n° **140**, 3° la façon la plus simple d'étudier l'intersection d'une droite Δ et d'un plan Π consiste à utiliser l'*équation cartésienne de* Π.

$$(1) \qquad P = 0 \quad \text{avec} \quad P \equiv ux + vy + wz + h$$

et *une représentation paramétrique de* Δ.

1° **Droite déterminée par un point et un vecteur directeur.** — Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{V}(a, b, c)$ le point et le vecteur directeur qui déterminent la droite Δ. On peut représenter Δ par

(2) $$x = x_0 + a\rho, \qquad y = y_0 + b\rho, \qquad z = z_0 + c\rho.$$

La valeur de ρ qui correspond au point M commun éventuel à Δ et Π est solution de

$$u(x_0 + a\rho) + v(y_0 + b\rho) + w(z_0 + c\rho) + h = 0$$

ou $$\rho(au + bv + cw) + P(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons dans toute la suite

$$P(x_0, y_0, z_0) = P_0,$$

et, plus généralement, $P(x_i, y_i, z_i) = P_i$.

Le résultat de substitution P_0 [resp. P_i] est appelé *puissance analytique* du point M_0 (x_0, y_0, z_0) [resp. M_i (x_i, y_i, z_i)] par rapport au plan Π; cette notion est relative à la forme particulière (P = 0) de l'équation de ce plan.

1[er] *Cas.*	$au + bv + cw \neq 0$:	Δ et Π ont un point commun
2[e] *Cas.*	$au + bv + cw = 0, \quad P_0 \neq 0$:	Δ est strictement parallèle à Π
3[e] *Cas.*	$au + bv + cw = 0, \quad P_0 = 0$:	Δ est contenue dans Π.

2° **Droite déterminée par deux points.** — Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $M_1(x_1, y_1, z_1)$, les deux points qui déterminent la droite Δ.

Nous écarterons le cas où M_0 et M_1 appartiendraient tous deux à Π : Δ serait alors contenue dans Π. Supposons, par exemple, que M_0 n'appartient pas à Π.

On peut représenter $\Delta - \{M_0\}$ par

(3) $$x = \frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1}, \qquad y = \frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1}, \qquad z = \frac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda + 1} \quad (\lambda \neq -1)$$

La valeur λ qui correspond au point M commun éventuel à Δ et Π est solution de

$$u(\lambda x_0 + x_1) + v(\lambda y_0 + y_1) + w(\lambda z_0 + z_1) + h(\lambda + 1) = 0,$$

équation que nous pouvons condenser sous la forme

(4) $$\lambda P_0 + P_1 = 0 \qquad (P_0 \neq 0).$$

(4) admet donc la solution $-\dfrac{P_1}{P_0}$ à laquelle ne correspond un point de Δ que si cette solution n'est pas égale à -1.

En général $P_0 \neq P_1$, et Δ coupe Π en un point M tel que (cf. n° 146)

(5) $$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_0}} = \frac{P_1}{P_0}.$$

Dans le cas exceptionnel où $P_0 = P_1$, il suffit d'expliciter cette condition sous la forme

$$u(x_0 - x_1) + v(y_0 - y_1) + w(z_0 - z_1) = 0$$

pour constater qu'alors le vecteur $\overrightarrow{M_1M_0}$ est parallèle à Π.

3° **Régions séparées dans l'espace par un plan.** — Comparons les résultats P_0 et P_1 de la substitution dans le polynôme P des coordonnées de deux points M_0 et M_1 de l'espace, non situés dans Π.

D'après l'étude du 2° :

a) ou bien la droite M_0M_1 rencontre Π en un point M donné par (5);

si M est entre M_0 et M_1, $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_0}} < 0$: P_0 et P_1 sont de signes contraires;

si M n'est pas entre M_0 et M_1, $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_0}} > 0$: P_0 et P_1 sont de même signe;

b) ou bien la droite M_0M_1 est parallèle à Π; alors $P_0 = P_1$; P_0 et P_1 sont de même signe.

On peut alors énoncer :

Le plan Π, d'équation $P = 0$, *partage l'espace en deux régions telles que les puissances analytiques* P_0 *et* P_1 *de deux points* M_0 *et* M_1 *soient de même signe ou de signes contraires suivant que* M_0 *et* M_1 *appartiennent, ou non, à la même région.*

Le résultat précédent permet la résolution des inéquations algébriques du premier degré, telles que

$$P(x, y, z) > 0.$$

4° **Cas de la géométrie plane.** — Les études faites aux sous-paragraphes 1°, 2°, 3° peuvent s'appliquer lorsqu'en géométrie plane on étudie l'intersection d'une droite Δ donnée par son équation cartésienne et d'une droite Δ' donnée par une représentation paramétrique.

III. FAISCEAUX DE DROITES ET DE PLANS

Le lecteur qui a étudié le n° 94 verra que le sous-chapitre III est l'application à la complétion projective d'un espace affine de dimension 2 ou 3 de la notion générale de faisceau linéaire d'hyperplans.

On dit que l'ensemble des plans contenant une droite Δ est un *faisceau de plans sécants*; Δ est appelée l'*arête* de ce faisceau. On dit que l'ensemble des plans parallèles à un plan ϖ est un *faisceau de plans parallèles*; ϖ est appelé *plan directeur* du faisceau.

En géométrie plane, on définit de même un *faisceau de droites concourantes* ou *un faisceau de droites parallèles.*

Nous allons étudier la représentation analytique d'un faisceau de plans ou d'un faisceau de droites, dans un repère cartésien quelconque.

156. ***Faisceau de plans sécants.*** — THÉORÈME. — **Si** $P = 0$, $P' = 0$ **sont des équations de deux plans sécants** Π **et** Π', **l'équation générale des plans contenant la droite** Δ **commune à** Π **et** Π' **est**

$$(1) \qquad \lambda P + \lambda' P' = 0 \qquad \lambda, \lambda' \in R \quad \text{(non nuls tous deux).}$$

1° Soit
$$\begin{aligned} P &\equiv ux + vy + wz + h \\ P' &\equiv u'x + v'y + w'z + h' \end{aligned} \qquad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{bmatrix}$$

par hypothèse la matrice $\mathcal{U}$ est de rang 2.

L'équation (1) représente un plan car

$$(2) \qquad \lambda u + \lambda' u', \quad \lambda v + \lambda' v', \quad \lambda w + \lambda' w'$$

ne sont pas simultanément nuls grâce aux hypothèses faites sur le rang de la matrice $\mathcal{U}$ et sur la non-nullité simultanée de λ et λ'.

Pour les points de la droite $\Delta = \Pi \cap \Pi'$, les fonctions $P(x, y, z)$ et $P'(x, y, z)$ prennent la valeur zéro, par suite (1) est vérifiée, et Σ contient Δ.

2° Inversement, soit Σ un plan quelconque contenant Δ; soit M_0 (x_0, y_0, z_0) un point de Σ, non situé sur Δ.

Pour que l'équation (1) soit celle d'un plan passant par M_0, il faut et il suffit que

$$(3) \qquad \lambda P_0 + \lambda' P'_0 = 0 \qquad \begin{cases} P_0 = ux_0 + vy_0 + wz_0 + h \\ P'_0 = u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + h'. \end{cases}$$

L'équation (3) donne pour λ et λ' des valeurs proportionnelles à P'_0 et $-P_0$; l'équation

$$(4) \qquad P'_0 P - P_0 P' = 0$$

est celle d'un plan qui contient Δ et qui passe par M_0 : c'est donc l'équation du plan donné Σ.

3° On résume (comme au n° 151) les deux résultats obtenus au 1° et au 2° en disant que **l'équation (1) est l'équation générale des plans contenant** Δ.

4° REMARQUES : *a*) En se résignant à perdre le plan Π, on peut n'introduire qu'un seul paramètre $\mu = \frac{\lambda}{\lambda'}$; l'équation

$$\mu P + P' = 0$$

peut représenter tout plan contenant Δ, sauf le plan Π.

b) Si M_1 (x_1, y_1, z_1) est un autre point de l'espace et si P_1 et P'_1 sont les puissances analytiques de M_1 pour les plans Π et Π', la condition

$$P'_0P_1 - P_0P'_1 = 0$$

exprime que la droite Δ et la droite M_0M_1 sont dans un même plan.

157. ***Faisceau de plans parallèles.*** — Reprenons les notations du nº **156**, et supposons que les plans Π et Π' soient strictement parallèles; il existe alors un nombre réel k tel que

$$u' = ku, \qquad v' = kv, \qquad w' = kw, \qquad h' \neq kh.$$

Par suite

$$\lambda P + \lambda' P' \equiv (\lambda + k\lambda')(ux + vy + wz) + \lambda h + \lambda' h'.$$

Si $\lambda + k\lambda' = 0$, l'équation

$$(1) \qquad \lambda P + \lambda' P' = 0$$

représente une surface vide.

Dans le cas général où $\lambda + k\lambda' \neq 0$, l'équation (1) se met sous la forme

$$ux + vy + wz + \frac{\lambda h + \lambda' h'}{\lambda + k\lambda'} = 0.$$

Le terme constant pouvant prendre toute valeur réelle par un choix convenable de λ et λ', le résultat du nº **153**, 3º, permet d'affirmer que *l'équation* (1) *est l'équation générale des plans parallèles à* Π.

158. ***Faisceau de droites dans le plan.*** — Soit, dans un repère cartésien Oxy, $D = 0$, $D' = 0$ des équations de deux droites distinctes Δ et Δ'.

Si Δ et Δ' se coupent en un point S, l'équation

$$(1) \qquad \lambda D + \lambda' D' = 0, \qquad \lambda, \lambda' \in R$$

est l'équation générale des droites contenant S. Il convient d'utiliser ce résultat dans la pratique pour obtenir l'équation générale des droites passant par le point $S = \Delta \cap \Delta'$, sans chercher à déterminer les coordonnées de S.

Si Δ et Δ' sont strictement parallèles, l'équation (1) est l'équation générale des droites parallèles à Δ et Δ'.

159. ***Équation d'un plan dépendant d'un paramètre au premier degré.*** — 1º Imaginons que les coefficients u, v, w, h de l'équation du plan Σ

$$ux + vy + wz + h = 0$$

soient des fonctions du paramètre réel λ, définies sur R; à chaque valeur λ est associé un plan Σ, qu'on peut noter Σ_λ; on définit ainsi un ensemble de plans — on dit encore une famille de plans à 1 paramètre.

Étudions cette famille lorsque u, v, w, h sont des polynômes du premier degré en λ.

2° Considérons l'équation

$$(a\lambda + a')x + (b\lambda + b')y + (c\lambda + c')z + d\lambda + d' = 0.$$

On peut l'écrire

$$\lambda P + P' = 0 \qquad (1)$$

avec

$$P \equiv ax + by + cz + d$$
$$P' \equiv a'x + b'y + c'z + d'.$$

Nous supposons que ni P, ni P′ n'est le polynôme nul.

a) S'il existe une constante k telle que $P' \equiv kP$, c'est-à-dire si les coefficients de P et P′ sont proportionnels, l'équation (1) devient

$$(\lambda + k)P = 0$$

si $\lambda \neq -k$, elle représente le plan $P = 0$
si $\lambda = -k$, elle représente tout l'espace.

b) Si les plans Π et Π' représentés par $P = 0$, $P' = 0$ sont sécants, l'étude du n° **156** montre que l'équation (1) représente l'ensemble des plans contenant la droite $\Delta = \Pi \cap \Pi'$, *sauf le plan* Π.

c) Si les plans Π et Π' sont strictement parallèles, l'étude du n° **157** montre que l'équation (1) représente l'ensemble des plans parallèles à Π et Π', *sauf le plan* Π.

3° On résume l'étude des cas *b*) et *c*) du 2° par l'énoncé suivant :

<u>Théorème</u>. — **Si les coefficients de l'équation cartésienne d'un plan variable dépendent d'un paramètre au premier degré, ce plan varie soit en contenant une droite fixe, soit en restant parallèle à un plan fixe.**

4° Corollaire. — Supposons que les équations $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$ représentent des plans distincts Π, Π', Π'', et qu'*il existe des réels* α, β, γ *non tous nuls tels que le polynôme* $\alpha P + \beta P' + \gamma P''$ *soit le polynôme nul.* Supposons par exemple $\alpha \neq 0$:

$$\alpha P + \beta P' + \gamma P'' \equiv (0) \implies P \equiv -\frac{\beta}{\alpha}P' - \frac{\gamma}{\alpha}P''.$$

Si les plans Π' *et* Π'' *sont sécants,* Π *contient leur droite commune;*
si les plans Π' *et* Π'' *sont parallèles,* Π *leur est parallèle.*

5° **Cas de la géométrie plane.** — Dans un repère cartésien Oxy, si les coefficients de l'équation d'une droite variable dépendent d'un paramètre au premier degré, cette droite varie soit en contenant un point fixe, soit en restant parallèle à une droite fixe.

Si les équations cartésiennes $D = 0$, $D' = 0$, $D'' = 0$, de trois droites distinctes Δ, Δ', Δ'' sont telles qu'*il existe des réels* α, β, γ *non tous nuls tels que le polynôme*

$$\alpha D + \beta D' + \gamma D'' \equiv (0),$$

ou bien *les trois droites passent par un même point*;
ou bien *les trois droites sont parallèles entre elles.*

160. ***Applications diverses.*** — 1° **Plan mené par une droite et un point.** — Soit Δ une droite donnée, et $M_1(x_1, y_1, z_1)$ un point donné; la recherche de l'équation du plan Σ contenant Δ et M_1 dépend de la façon dont est représentée analytiquement la droite Δ.

a) Δ *est déterminée par un point* $A(x_0, y_0, z_0)$ *et un vecteur directeur* $\vec{V}(a, b, c)$.

On écrit qu'un point M appartient à Σ en exprimant que les vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$, $\vec{V}$, $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires (cf. n° 119).

Si Δ est déterminée par deux points A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ joue le rôle de vecteur directeur.

b) Δ *est déterminée comme intersection de deux plans* $P = 0$, $P' = 0$.

Le plan cherché Σ est le plan du faisceau d'axe Δ, passant par M_1 (cf. n° 156), son équation est

$$P'_1 P - P_1 P' = 0,$$

en posant $P_1 = P(M_1)$ et $P'_1 = P'(M_1)$.

2° **Plan mené par une droite, parallèlement à une direction.** — Soit Δ la droite donnée (nous gardons les notations du 1°); soit à chercher l'équation du plan Σ mené par Δ, parallèlement à la droite Δ', dirigée par le vecteur $\vec{V}'(a', b', c')$.

a) si Δ est la droite $\left(A, \vec{V}\right)$, on écrit que M appartient à Σ en exprimant que les vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires (cf. n° 119);

b) si Δ est l'intersection des plans $P = 0$, $P' = 0$, on cherche l'équation de Σ sous la forme $\lambda P + \lambda' P' = 0$; on exprime que le plan parallèle mené par l'origine

$$\lambda(ux + vy + wz) + \lambda'(u'x + v'y + w'z) = 0$$

contient le point directeur a', b', c' de la direction Δ', c'est-à-dire

$$\lambda(ua' + vb' + wc') + \lambda'(u'a' + v'b' + w'c') = 0$$

on prendra $\lambda = u'a' + v'b' + w'c'$, $\quad \lambda' = -(ua' + vb' + wc')$.

3° **Exprimer que deux droites sont coplanaires.** — *a*) Si Δ est la droite $(A, \vec{V})$ et Δ' la droite $(A', \vec{V'})$, on exprime que Δ et Δ' sont coplanaires en écrivant que les vecteurs $\vec{V}, \vec{V'}, \overrightarrow{AA'}$ sont coplanaires.

b) Si Δ est l'intersection des plans d'équations $P = 0$, $Q = 0$, et Δ' l'intersection des plans d'équations $P' = 0$, $Q' = 0$, Δ et Δ' seront coplanaires si, et seulement si un plan contenant Δ (donc d'équation $\alpha P + \beta Q = 0$) coïncide avec un plan contenant Δ' (donc d'équation $\alpha' P' + \beta' Q' = 0$).

Ces plans sont confondus si, et seulement si, les polynômes $\alpha P + \beta Q$, $\alpha' P' + \beta' Q'$ ont leurs coefficients proportionnels; comme α et β d'une part, α' et β' d'autre part, ne sont définis qu'à un facteur près de proportionnalité, la condition visée s'exprime par l'existence de nombres réels α, β, α', β', tels que

$$\alpha P + \beta Q \equiv \alpha' P' + \beta' Q'.$$

4° **Plans passant par une même droite dans un trièdre.** — Soit $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère cartésien : appelons $O\delta_1$ et $O\delta_1'$ les deux diagonales du repère $\{O, \vec{j}, \vec{k}\}$, c'est-à-dire les supports des vecteurs $\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{j} - \vec{k}$; elles ont pour paramètres directeurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ dans ce repère et leurs équations sont

$$(O\delta_1) \quad y - z = 0 \qquad (O\delta_1') \quad y + z = 0.$$

Considérons les plans $xO\delta_1$, $xO\delta_1'$ et ceux qui s'en déduisent par substitution circulaire; le tableau suivant fait connaître leurs équations; nous avons mis entre parenthèses les noms des polynômes qui figurent dans les premiers membres.

plan $xO\delta_1$	(P_1)	$y - z = 0$	plan $xO\delta_1'$	(P_1')	$y + z = 0$
plan $yO\delta_2$	(P_2)	$z - x = 0$	plan $yO\delta_2'$	(P_2')	$z + x = 0$
plan $zO\delta_3$	(P_3)	$x - y = 0$	plan $zO\delta_3'$	(P_3')	$x + y = 0.$

On constate immédiatement que

$$P_1 + P_2 + P_3 \equiv (0),$$

les trois plans $xO\delta_1$, $yO\delta_2$, $zO\delta_3$ ont en commun la droite Δ, de paramètres directeurs $(1, 1, 1)$.

D'autre part
$$P_1 \equiv P_3' - P_2'$$
$$P_2 \equiv P_1' - P_3'$$
$$P_3 \equiv P_2' - P_1'$$

On peut donc en déduire les résultats suivants :

Les plans $xO\delta_1$, $yO\delta_2'$, $zO\delta_3'$ ont une droite commune $\Delta_1(-1, 1, 1)$.

Les plans $yO\delta_2$, $zO\delta_3'$, $xO\delta_1'$ ont une droite commune $\Delta_2(1, -1, 1)$.

Les plans $zO\delta_3$, $xO\delta_1'$, $yO\delta_2'$ ont une droite commune $\Delta_3(1, 1, -1)$.

Les 6 diagonales considérées sont coplanaires 3 par 3 :

le plan	$x + y + z = 0$	contient les droites	$O\delta_1'$, $O\delta_2'$, $O\delta_3'$;
le plan	$-x + y + z = 0$	contient les droites	$O\delta_1'$, $O\delta_2$, $O\delta_3$;
le plan	$x - y + z = 0$	contient les droites	$O\delta_1$, $O\delta_2'$, $O\delta_3$;
le plan	$x + y - z = 0$	contient les droites	$O\delta_1$, $O\delta_2$, $O\delta_3'$.

IV. LA DROITE ET LE PLAN EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Dans ce sous-chapitre nous disposons des notions de longueur et d'angle. Les repères utilisés dans la pratique sont orthonormés.

161. *Interprétation métrique de l'équation d'un plan* (*repère orthonormé*). — 1° **Vecteur normal à un plan.** — Soit $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère orthonormé, et soit Π l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant l'équation donnée

(1) $$ax + by + cz + d = 0 \qquad (a, b, c \text{ non tous nuls}).$$

Nous avons déjà vu (n° 152) que Π est un plan; nous allons reprendre cette étude, en profitant du fait qu'ici le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé.

Soit $\vec{N} = \vec{OL}$ le vecteur ayant (a, b, c) pour coordonnées dans $\mathcal{R}$; alors, pour tout point M de l'espace,

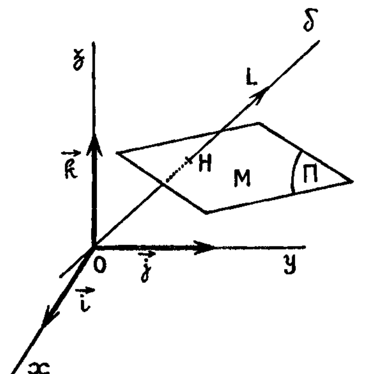


Fig. 30.

$$ax + by + cz = \vec{N}.\vec{OM}.$$

Les points de Π sont caractérisés par

$$\vec{N}.\vec{OM} = -d.$$

Or si H est la projection orthogonale de M sur la droite OL,

$$\vec{N}.\vec{OM} = \vec{N}.\vec{OH},$$

les points de Π sont donc caractérisés par

$$\vec{N}.\vec{OH} = -d.$$

Le point H est donc fixe, et l'ensemble Π est le plan mené par H perpendiculaire au vecteur $\vec{N}$ (fig. 30).

On précise la position de H en introduisant p tel que

$$\vec{OH} = p\vec{N};$$

alors

$$p\|\vec{N}\|^2 = -d,$$

et finalement

$$\vec{OH} = \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2}\vec{N}. \qquad (2)$$

En résumé, nous retiendrons :

Les coefficients des variables x, y, z **dans le premier membre de l'équation cartésienne d'un plan, en repère orthonormé, sont les composantes scalaires d'un vecteur perpendiculaire au plan;** *ce sont encore des paramètres directeurs de la direction perpendiculaire au plan.*

Remarque. — Le résultat précédent résulte aussi du fait que la condition $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$ qui exprime que le vecteur $\vec{V}(\lambda, \mu, \nu)$ est parallèle au plan Π (nº 153) exprime aussi, dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$, que tout vecteur $\vec{V}$ parallèle à Π est orthogonal au vecteur $\vec{N}(a, b, c)$.

2º **Équation normale d'un plan.** — Étant donné le plan Π, désignons par H la projection orthogonale de O sur Π et par $\vec{U}$ l'un des deux vecteurs *unitaires* perpendiculaires à Π. Nous posons

$$\overrightarrow{OH} = p\vec{U} \qquad \text{ou} \qquad p = (\overline{OH})_{\vec{U}}\,;$$

les coordonnées de $\vec{U}$ sont respectivement les cosinus des angles α, β, γ de ce vecteur avec les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ du repère $\mathcal{R}$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \Pi \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{proj}_{\vec{U}}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{OH} \\ &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OM}.\vec{U} = p \\ &\Longleftrightarrow \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \qquad (3) \end{aligned}$$

On dit que (3) est une *équation normale* du plan Π.

3º **Normalisation de l'équation d'un plan.** — Pour mettre l'équation donnée (1) sous la forme (3) il suffit de choisir un vecteur unitaire $\vec{U}$ normal au plan Π, soit alors

$$\vec{N} = \lambda\vec{U}$$

$$a = \lambda\cos\alpha, \qquad b = \lambda\cos\beta, \qquad c = \lambda\cos\gamma;$$

$$\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 \implies \lambda = \varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad \varepsilon = \pm 1;$$

on choisit à son gré le signe de ε; les angles géométriques α, β, γ sont alors déterminés par

$$\cos\alpha = \frac{a}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Enfin l'égalité (2) donne alors

$$\overrightarrow{OH} = \frac{-d}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\vec{U}.$$

162. *Distance d'un point à un plan* (*repère orthonormé*). — 1° **Cas général.** — Reprenons le repère $\mathcal{R}$ orthonormé du n° **161** et le plan Π d'équation

$$P(x, y, z) = 0, \qquad \text{avec} \qquad P(x, y, z) \equiv ax + by + cz + d.$$

Soit $O\delta$ la perpendiculaire à Π menée par O, H le point où elle perce Π; soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque de l'espace, μ_0 et m_0 ses projections respectives sur Π et sur $O\delta$. Soit $\vec{N}$ le vecteur normal à Π ayant pour coordonnées a, b, c (fig. 31) :

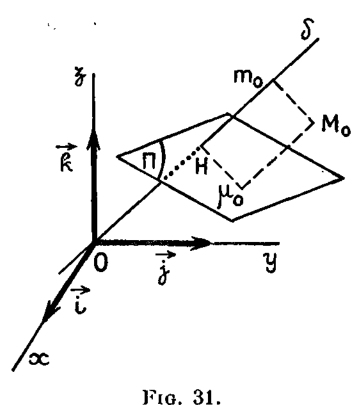


Fig. 31.

$$\vec{N}.\overrightarrow{OM_0} = ax_0 + by_0 + cz_0$$

ce qui donne aussi

$$\vec{N}.\overrightarrow{Om_0} = ax_0 + by_0 + cz_0$$

D'autre part (n° **161**, 1°)

$$\vec{N}.\overrightarrow{OH} = -d.$$

En retranchant membre à membre, on obtient

$$\vec{N}.\overrightarrow{Hm_0} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

ce que nous désignerons par $P(M_0)$.

Or $\overrightarrow{Hm_0} = \overrightarrow{\mu_0 M_0}$ est colinéaire à $\vec{N}$;

$\overrightarrow{\mu_0 M_0} = l\vec{N}$ avec $l\|\vec{N}\|^2 = P(M_0)$.

Finalement

$$(1) \qquad \boxed{\overrightarrow{\mu_0 M_0} = \frac{P(M_0)}{a^2 + b^2 + c^2}\vec{N}.}$$

2° Les perpendiculaires à un plan Π étant orientées, on appelle *distance algébrique* d'un point M_0 à ce plan la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{\mu_0 M_0}$ qui a pour origine le pied de la perpendiculaire menée du point sur le plan (1).

Dans ces conditions, la distance algébrique de M_0 à Π est donnée par la formule

$$(2) \qquad \overline{\mu_0 M_0} = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(1) La locution « distance d'un point à un plan » est traditionnelle; il importe d'observer que $\overline{Km_0}$ ou $\overline{\mu_0 M_0}$ est la mesure algébrique d'un vecteur qui a son origine dans le plan Π; il serait plus indiqué de dire « distance algébrique d'un plan à un point ».

ε étant $+1$ ou -1 suivant que $\vec{N}$ a le sens choisi sur les perpendiculaires au plan, ou le sens contraire.

La distance du point M_0 au plan est

$$\mu_0 M_0 = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Remarque. — La formule (1) montre que $\overrightarrow{\mu_0 M_0}$ a le sens de $\vec{N}$ ou le sens opposé suivant que $P(M_0)$ est positif ou négatif; on retrouve les résultats obtenus au n° 155.

3° **Cas particulier d'une équation normale.** — Soit le plan Π donné par une équation normale (n° 161, 2°) :

$$P(x, y, z) \equiv x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p.$$

Si $\vec{U}$ est le vecteur unitaire, perpendiculaire à Π, dont les angles avec les vecteurs du repère $\mathcal{R}$ sont α, β, γ, la formule (1) du 1° devient

$$\text{(3)} \qquad \boxed{\overrightarrow{\mu_0 M_0} = (x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p)\vec{U}.}$$

En orientant les perpendiculaires à Π par le vecteur unitaire $\vec{U}$, on peut alors énoncer :

La distance algébrique d'un point à un plan est le résultat de substitution des coordonnées du point dans le premier membre d'une équation normale du plan :

$$\text{(2)} \qquad \overline{\mu_0 M_0} = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p.$$

163. ***Distance d'un point à une droite en géométrie plane*** *(repère orthonormé)*. — Les études faites aux n°s 161 et 162 s'appliquent lorsqu'en géométrie plane euclidienne on étudie la représentation cartésienne d'une droite Δ dans un repère orthonormé plan

$$\{O, \vec{i}, \vec{j}\}.$$

1° **Cas général.** — L'équation

$$ax + by + c = 0$$

représente la droite Δ perpendiculaire au vecteur $\vec{N}(a, b)$ passant par le point H (fig. 32) tel que

$$\overrightarrow{OH} = \frac{-c}{a^2 + b^2}\vec{N}.$$

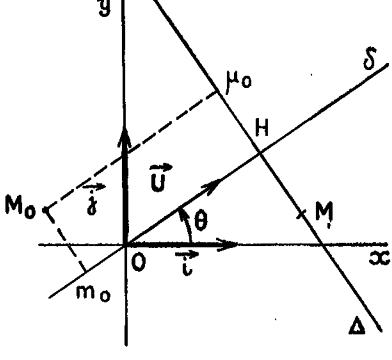


Fig. 32.

M_0 étant le point de coordonnées cartésiennes (x_0, y_0) dans $\mathcal{R}$, et μ_0 désignant la projection de M_0 sur Δ,

$$\overrightarrow{\mu_0 M_0} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\overrightarrow{N},$$

et
$$\overline{\mu_0 M_0} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ε étant $+1$ ou -1 suivant que les normales à Δ sont orientées dans le sens du vecteur $\overrightarrow{N}(a, b)$ ou dans le sens contraire.

2° **Équation normale.** — Soit θ un angle polaire d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{U}$ perpendiculaire à Δ, les composantes scalaires de $\overrightarrow{U}$ sont $\cos\theta$ et $\sin\theta$, et on obtient une équation normale de Δ sous la forme

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 \qquad p = (\overline{OH})_\theta.$$
$$(\overline{\mu_0 M_0})_\theta = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p.$$

*164. ***Interprétation métrique de l'équation d'un plan*** (*repère quelconque*). — Soit $\mathcal{R} = \{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ un repère quelconque, *en géométrie euclidienne*; les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ ont une longueur quelconque, et ne sont pas perpendiculaires.

1° **Coordonnées covariantes d'un vecteur.** — *a*) Étant donné un vecteur $\overrightarrow{N}$, nous lui faisons correspondre les trois nombres réels a, b, c tels que

(1) $$a = \overrightarrow{N}.\overrightarrow{i}, \qquad b = \overrightarrow{N}.\overrightarrow{j}, \qquad c = \overrightarrow{N}.\overrightarrow{k}.$$

Nous avons déjà rencontré ces trois nombres au n° **124**, sous le nom de coordonnées *covariantes* de $\overrightarrow{N}$.

Si $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{N}$ est un représentant de $\overrightarrow{N}$, et si L_1, L_2, L_3, sont les projections orthogonales de L sur les axes Ox, Oy, Oz, en posant (fig. 33)

$$\overrightarrow{OL_1} = l_1\overrightarrow{i}, \qquad \overrightarrow{OL_2} = l_2\overrightarrow{j}, \qquad \overrightarrow{OL_3} = l_3\overrightarrow{k},$$
(2) $$a = l_1\|\overrightarrow{i}\|^2, \qquad b = l_2\|\overrightarrow{j}\|^2, \qquad c = l_3\|\overrightarrow{k}\|^2.$$

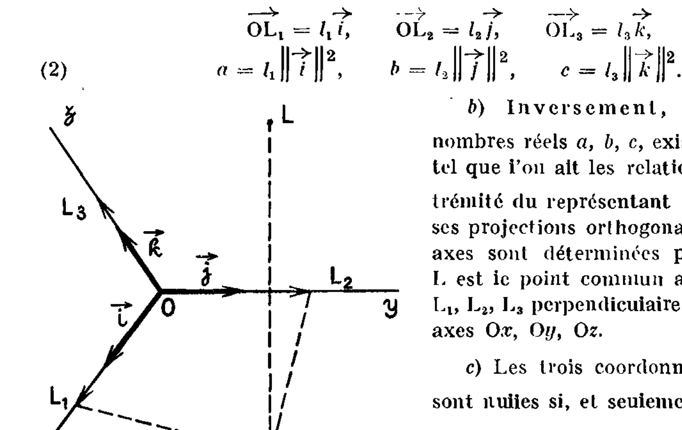


FIG. 33.

b) Inversement, donnons-nous trois nombres réels a, b, c, existe-t-il un vecteur $\overrightarrow{N}$ tel que l'on ait les relations (1)? Soit L l'extrémité du représentant en O du vecteur $\overrightarrow{N}$; ses projections orthogonales L_1, L_2, L_3 sur les axes sont déterminées par les relations (2); L est le point commun aux plans menés par L_1, L_2, L_3 perpendiculaires respectivement aux axes Ox, Oy, Oz.

c) Les trois coordonnées covariantes de $\overrightarrow{N}$ sont nulles si, et seulement si, $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{0}$.

2° **Équation cartésienne du plan** (*repère quelconque*). — α) Si un vecteur $\overrightarrow{N}$ a pour

coordonnées covariantes a, b, c, son produit scalaire par le vecteur $\overrightarrow{OM}$, où M est le point de coordonnées cartésiennes x, y, z, est

$$\vec{N}.\overrightarrow{OM} = \vec{N}.\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$
$$\vec{N}.\overrightarrow{OM} = ax + by + cz.$$

Inversement, tout polynôme $ax + by + cz$ peut être considéré comme l'expression du produit scalaire $\vec{N}.\overrightarrow{OM}$, $\vec{N}$ étant le vecteur de coordonnées covariantes a, b, c.

β) Comme au n° 161, 1°, on montre que l'ensemble Π des points M(x, y, z) tels que

(3) $$ax + by + cz + d = 0$$

est caractérisé par $$\vec{N}.\overrightarrow{OM} = -d.$$

Si H est la projection orthogonale de M sur le support O δ du vecteur $\overrightarrow{OL} = \vec{N}$,

(4) $$\overrightarrow{OH} = \frac{-d}{\|\vec{N}\|^2}\vec{N};$$

Π est le plan perpendiculaire en H à $\vec{N}$.

Les coefficients de x, y, z dans l'équation cartésienne d'un plan, en repère quelconque, sont les coordonnées covariantes d'un vecteur perpendiculaire au plan.

3° **Équation normale d'un plan.** — Avec les notations du n° 161, 2°, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ étant des vecteurs unitaires, $\vec{U}$ étant un vecteur unitaire perpendiculaire à un plan Π donné, les coordonnées covariantes de $\vec{U}$ sont cos α, cos β, cos γ, et l'équation cartésienne de Π est encore

(5) $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad p = (\overline{OH})_{\vec{U}}$$

4° **Distance d'un point à un plan.** — La méthode du n° 162, 1°, conduit ici à la formule

$$\overrightarrow{\mu_0 M_0} = \frac{P(M_0)}{\|\vec{N}\|^2}\vec{N}.$$

Dans le cas particulier où le plan Π est donné par une équation normale (5),

$$\overrightarrow{\mu_0 M_0} = (x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p)\vec{U}.$$

165. ***Angles de plans et de droites*** (*repère orthonormé*). — 1° **Angle de deux plans.** — Soit

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

les équations des deux plans Π et Π′ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Les vecteurs $\vec{N}(a, b, c)$ et $\vec{N}'(a', b', c')$ sont respectivement orthogonaux à Π et Π′.

Les angles plans des dièdres formés par Π et Π′ sont égaux aux angles formés par les supports de $\vec{N}$ et $\vec{N}'$; en appelant ω l'angle inférieur à un droit formé par Π et Π′,

(1) $$\cos\omega = \frac{|\vec{N}.\vec{N}'|}{\|\vec{N}\|\|\vec{N}'\|}, \qquad \sin\omega = \frac{\|\vec{N}\wedge\vec{N}'\|}{\|\vec{N}\|\|\vec{N}'\|}.$$

L'orthogonalité de Π et Π' se traduit par celle de $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ c'est-à-dire par

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

2° **Angle d'une droite et d'un plan.** — L'angle d'une droite Δ et d'un plan Π est par définition, l'angle aigu formé par la droite et sa projection orthogonale sur le plan; il est le complément de l'angle aigu formé par la droite et une perpendiculaire au plan.

Si $\vec{V}$ (α, β, γ) est un vecteur directeur de Δ, la mesure ω de cet angle est donnée par

$$\sin \omega = \frac{|\vec{V}.\vec{N}|}{\|\vec{V}\| \|\vec{N}\|}.$$

Si Δ est perpendiculaire à Π, α, β, γ sont proportionnels à a, b, c.

3° **Angle formé par deux droites déterminées par leurs équations (géométrie plane).**

α) On donne dans un repère plan orthonormé, les droites Δ et Δ' par leurs équations

$$ax + by + c = 0 \qquad a'x + b'y + c' = 0.$$

Les vecteurs $\vec{N}(a, b)$ et $\vec{N}'(a', b')$ sont respectivement perpendiculaires à Δ et Δ'; l'angle de mesure ω, inférieur ou égal à un droit, formé par Δ et Δ' est égal à celui que forment les supports de $\vec{N}$ et $\vec{N}'$; $\cos \omega$ et $\sin \omega$ sont donnés par les formules (1), valables dans le plan comme dans l'espace.

L'orthogonalité de Δ et Δ' se traduit par celle de $\vec{N}$ et $\vec{N}'$, c'est-à-dire par

$$aa' + bb' = 0.$$

β) L'angle orienté (Δ, Δ') est égal à l'angle orienté du support de $\vec{N}$ avec le support de $\vec{N}'$; sa mesure algébrique, définie modulo π, est caractérisée par sa tangente

$$\operatorname{tg}(\Delta, \Delta') = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

si m et m' désignent les coefficients directeurs des perpendiculaires à Δ et Δ', ou encore

$$\operatorname{tg}(\Delta, \Delta') = \frac{ab' - ba'}{aa' + bb'}.$$

166. ***Applications et Exercices.*** — 1° **Bissectrices d'un triangle.** — Soit à étudier les bissectrices d'un triangle ABC déterminé par les équations normales de ses trois côtés :

BC	$P \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$	$P = 0$
CA	$Q \equiv x \cos \beta + y \sin \beta - q$	$Q = 0$
AB	$R \equiv x \cos \gamma + y \sin \gamma - r$	$R = 0.$

Nous pouvons supposer que l'origine O du repère orthonormé a été choisie à l'intérieur du triangle, et que les angles polaires α, β, γ sont ceux des perpendiculaires aux côtés, orientées de O vers les projections H, I, J sur les côtés; dans ces conditions, les résultats de substitution P (O), Q (O), R (O) sont négatifs (fig. 34).

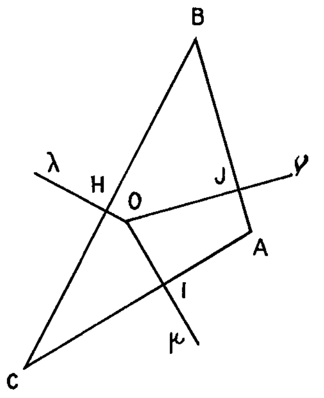


Fig. 34.

Les bissectrices de l'angle A forment l'ensemble des points dont les distances aux côtés AB et AC sont égales; leurs équations sont donc

$$|Q| = |R| \qquad \text{ou} \qquad Q - \varepsilon_1 R = 0 \qquad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

Pour la bissectrice extérieure B et C sont du même côté et les résultats de substitution des coordonnées des points B et C doivent être de même signe; posons

$$S_1 \equiv Q - \varepsilon_1 R$$
$$S_1(B) = Q(B) \qquad S_1(C) = -\varepsilon_1 R(C).$$

Or B et O sont du même côté par rapport à AC, Q (B) et $-q$ sont du même signe, c'est donc que Q (B) < 0; de même R (C) < 0. Alors S_1 (B) et S_1 (C) sont de même signe si, et seulement si, $\varepsilon_1 = -1$.

Finalement on peut, par substitution circulaire, dresser le tableau suivant :

	bissectrices intérieures		bissectrices extérieures	
angle A	$S_1 \equiv Q - R$	$S_1 = 0$	$S'_1 \equiv Q + R$	$S'_1 = 0$
angle B	$S_2 \equiv R - P$	$S_2 = 0$	$S'_2 \equiv R + P$	$S'_2 = 0$
angle C	$S_3 \equiv P - Q$	$S_3 = 0$	$S'_3 \equiv P + Q$	$S'_3 = 0.$

Il est facile d'obtenir alors des bissectrices concourantes :

$S_1 + S_2 + S_3 \equiv (0)$: les trois bissectrices intérieures

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \equiv S'_3 - S'_2 \\ S_2 \equiv S'_1 - S'_3 \\ S_3 \equiv S'_2 - S'_1 \end{array}\right\} \text{ une bissectrice intérieure et deux bissectrices extérieures.}$$

On met aussi en évidence des pieds de bissectrices alignés : l'équation

$$P + Q + R = 0$$

est celle d'une droite qui rencontre le côté BC ($P = 0$) au même point que la droite représentée par l'équation

$$Q + R = 0,$$

c'est-à-dire que la bissectrice extérieure de l'angle A; c'est donc que les pieds des trois bissectrices extérieures sont alignés.

L'équation

$$-P + Q + R = 0$$

est celle d'une droite contenant le pied de la bissectrice extérieure de A et les pieds des bissectrices intérieures de B et C.

2° Exercice. — *Soient* D *et* D′ *deux droites orientées,* A *et* A′ *les pieds sur ces droites de leur perpendiculaire commune,* A_1 *un point fixe de* D′; *deux points* M *et* M′ *se déplacent respectivement sur* D *et* D′ *de façon que* $\overline{AM} = \overline{A_1M'}$; *montrer que le plan médiateur* II *de* MM′ *pivote autour d'une droite fixe* L.

Prenons comme axe $z'z$ la perpendiculaire commune AA′, comme origine le milieu O de AA′ et comme axes $x'x$, $y'y$ les bissectrices des angles formés par les parallèles à D

et D′ menées par O. Orientons D par le vecteur unitaire $\overrightarrow{AB}$ (cos α, sin α, 0) et D′ par le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ (cos α, — sin α, 0). Appelons a la cote de D, — a celle de D′, posons $\overline{A'A_1} = \lambda$ et désignons par ρ la valeur algébrique des segments $\overline{AM}$ et $\overline{A_1M'}$. Les points M et M′ ont respectivement pour coordonnées

$$M : \rho \cos \alpha, \ \rho \sin \alpha, \ a; \qquad M' : (\lambda + \rho) \cos \alpha, \ -(\lambda + \rho) \sin \alpha, \ -a.$$

L'équation du plan Π s'obtient en écrivant que chacun de ses points est équidistant de M et de M′, soit

$$(x - \rho \cos \alpha)^2 + (y - \rho \sin \alpha)^2 + (z - a)^2 = [x - (\lambda + \rho) \cos \alpha]^2 + [y + (\lambda + \rho) \sin \alpha]^2 + (z + a)^2,$$

ou enfin

$$(1) \qquad 2 \lambda x \cos \alpha - 2 (\lambda + 2 \rho) y \sin \alpha - 4 az - \lambda (\lambda + 2 \rho) = 0.$$

L'équation précédente dépend linéairement du paramètre ρ, ou mieux, de la somme $\lambda + 2\rho$, on peut la mettre sous la forme

$$2 \lambda x \cos \alpha - 4 az - (\lambda + 2 \rho) (2 y \sin \alpha + \lambda) = 0.$$

Le plan Π pivote autour de la droite L que représentent les équations

$$(2) \qquad \lambda x \cos \alpha - 2 az = 0, \qquad 2 y \sin \alpha + \lambda = 0.$$

On peut montrer géométriquement que le plan Π pivote autour d'une droite. Appelons $\overrightarrow{A_1B_1}$ le vecteur unitaire d'origine A_1 sur la droite D′ orientée; il existe une rotation autour d'un axe L qui peut amener le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en coïncidence avec le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$; cette rotation amène $\overrightarrow{AM}$ sur $\overrightarrow{A_1M'}$, et par suite le plan médiateur de MM′ contient L.

Remarque. — Si l'on associe les points M et M'_1 de D et D′ tels que $\overline{AM} = -\overline{A_1M'_1}$ le plan médiateur de MM′ pivote encore autour d'une droite L′, car ce problème revient au précédent où l'on aurait changé l'orientation choisie sur D′. La droite L′ a pour équations

$$(3) \qquad \lambda y \sin \alpha + 2 az = 0, \qquad 2 x \cos \alpha - \lambda = 0.$$

167. ***Droites et plans perpendiculaires*** (*repère orthonormé*). — 1° **Perpendiculaire menée d'un point à un plan.** — La perpendiculaire menée du point M_0 (x_0, y_0, z_0) au plan Π déterminé par l'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

a pour équations
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

2° **Plan mené par un point perpendiculairement à une droite.** — Si a, b, c sont des paramètres directeurs d'une droite Δ, le plan perpendiculaire à Δ mené par le point M_0 (x_0, y_0, z_0) a pour équation

$$a (x - x_0) + b (y - y_0) + c (z - z_0) = 0.$$

3° **Plan projetant orthogonalement une droite sur un plan.** — Le plan Π étant donné par l'équation cartésienne

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

le plan mené par Δ, perpendiculaire à Π, est celui qui contient Δ, et la direction de paramètres directeurs (u, v, w). On est ramené au problème traité au n° **160.**

Exemple. — *Plans-hauteurs d'un trièdre.* — On donne, passant par O, trois plans formant trièdre :

$$\begin{array}{llll} \Pi & P = 0, & \text{avec} & P \equiv ax + by + cz \\ \Pi' & P' = 0, & \text{avec} & P' \equiv a'x + b'y + c'z \\ \Pi'' & P'' = 0, & \text{avec} & P'' \equiv a''x + b''y + c''z. \end{array}$$

On pose $\Delta = \Pi' \cap \Pi''$, $\Delta' = \Pi'' \cap \Pi$, $\Delta'' = \Pi \cap \Pi'$.

Le plan mené par Δ perpendiculaire à Π est appelé plan-hauteur du trièdre. Cherchons son équation; celle-ci est de la forme

$$S = 0, \quad \text{avec} \quad S \equiv \lambda' P' + \lambda'' P''.$$

Écrivons que ce plan contient la direction (a, b, c) perpendiculaire à Π :

$$\lambda' (a'a + b'b + c'c) + \lambda'' (a''a + b''b + c''c) = 0.$$

Finalement on peut écrire

$$S \equiv (a''a + b''b + c''c)P' - (a'a + b'b + c'c) P''.$$

Par substitution circulaire on obtiendra S' et S'' associés aux autres plans-hauteurs et on vérifiera

$$S + S' + S'' \equiv (0),$$

ce qui montre que les trois plans-hauteurs ont une droite commune.

168. ***Distance d'un point à une droite*** *(repère orthonormé dans l'espace).* — 1° La droite Δ est donnée par *un point* A (x_0, y_0, z_0) *et un vecteur directeur*, $\vec{V}$ (a, b, c); soit M (x, y, z) le point dont on demande la distance à la droite Δ (fig. 35).

Le produit vectoriel $\vec{V} \wedge \overrightarrow{AM}$ a pour module $V \times MH$, H étant la projection orthogonale de M sur Δ; on trouve ainsi

$$MH = \frac{\|\vec{V} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{V}\|}.$$

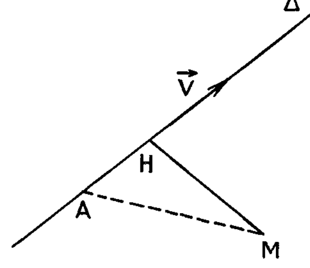


Fig. 35.

2° La droite Δ est donnée comme *intersection de deux plans perpendiculaires.*

Soit Π et Π' deux plans perpendiculaires d'équations $P = 0$, $P' = 0$; si K, K', et H sont respectivement les projections orthogonales de M sur Π, Π' et Δ,

$$MH^2 = MK^2 + MK'^2$$

MK et MK' s'évaluent comme au n° **162.**

EXEMPLE. — La distance de M (x, y, z) à la droite Δ représentée par les équations

$$z - h = 0 \qquad ax + by + c = 0$$

est donnée par la formule

$$MH^2 = (z - h)^2 + \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

REMARQUE. — Lorsque les plans représentés par $P = 0$, $Q = 0$ ne sont pas perpendiculaires, on détermine m de façon que $P + m\,Q = 0$ représente un plan perpendiculaire à l'un des plans donnés et on ramène ainsi le cas général au cas particulier que nous venons d'examiner.

169. ***Perpendiculaire commune à deux droites. Plus courte distance de deux droites*** (*repère orthonormé*). — 1° Soient Δ et Δ_1 deux droites non situées dans un même plan. La direction λ de leur perpendiculaire commune est celle des perpendiculaires au plan Π mené par Δ parallèlement à Δ_1, plan dont nous savons former l'équation. Ayant ainsi déterminé λ, la perpendiculaire commune est représentée par les équations des plans menés par Δ et par Δ_1 parallèlement à λ.

Indiquons le calcul en supposant chacune des deux droites définie par un point et un vecteur directeur :

$$A\,(x_0, y_0, z_0) \quad \text{et} \quad \vec{V}\,(a, b, c) \quad \text{pour} \quad \Delta;$$

$$A_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad \vec{V}_1(a_1, b_1, c_1) \quad \text{pour} \quad \Delta_1;$$

La direction λ perpendiculaire à la fois à $\vec{V}$ et à $\vec{V}_1$ est celle du produit vectoriel $\vec{U} = \vec{V} \wedge \vec{V}_1$; la direction λ a pour paramètres directeurs.

$$\alpha = bc_1 - cb_1, \qquad \beta = ca_1 - ac_1, \qquad \gamma = ab_1 - ba_1.$$

Les plans $(A, \vec{V}, \lambda)$ et $(A_1, \vec{V}_1, \lambda)$ se coupent suivant la perpendiculaire commune cherchée; ils ont pour équations :

$$(\overrightarrow{AM}, \vec{V}, \vec{U}) = 0, \qquad (\overrightarrow{A_1M}, \vec{V}_1, \vec{U}) = 0.$$

2° La plus courte distance l des droites Δ et Δ_1 est la distance d'un point quelconque de la droite Δ_1 au plan Π mené par Δ parallèlement à Δ_1.

Avec les notations du 1°, le plan Π a pour équation

$$(\overrightarrow{AM}, \vec{V}, \vec{V}_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{AM}.\vec{U} = 0.$$

La distance du point A_1 à ce plan est

$$l = \frac{|\overrightarrow{AA_1}.\vec{U}|}{\|\vec{U}\|}.$$

REMARQUE. — La théorie des glisseurs (n° 176) donnera une méthode plus rapide pour évaluer l.

Si $\mathcal{M}$ est le comoment des glisseurs $(A, \vec{V})$ et $(A_1, \vec{V_1})$, et α l'angle de $\vec{V}$ avec $\vec{V_1}$

$$\mathcal{M} = \varepsilon (VV_1 \sin \alpha).l$$

or $VV_1 \sin \alpha = \|\vec{U}\|$;

finalement $$l = \frac{|\mathcal{M}|}{\|\vec{U}\|}.$$

3° Exemple I. — On donne les droites

$$\Delta) \quad x = y = z. \qquad \Delta_1 \begin{cases} x + y + z + 4 = 0 & \text{(II)} \\ 3x - 2y + z - 5 = 0. & \text{(II')} \end{cases}$$

α) Pour trouver leur plus courte distance, l, cherchons le plan Q du faisceau II, II' qui est parallèle à Δ; Q a une équation de la forme

(1) $$\lambda (x + y + z + 4) + \lambda' (3x - 2y + z - 5) = 0.$$

Écrivons que le plan Q_0 mené par l'origine parallèlement à Q contient le point directeur (1, 1, 1) de la direction de Δ :

$$3\lambda + 2\lambda' = 0; \qquad \text{prenons} \qquad \lambda = -2, \qquad \lambda' = 3.$$

Q a pour équation

$$7x - 8y + z - 23 = 0.$$

l est la distance de O à Q : $l = \dfrac{23}{\sqrt{114}}$.

β) Un vecteur directeur $\vec{U}$ de la perpendiculaire commune L à Δ et Δ_1 est perpendiculaire à Q, soit $\vec{U}(7, -8, 1)$.

Le plan S mené par Δ parallèle à $\vec{U}$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 7 \\ y & 1 & -8 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 3x + 2y - 5z = 0.$$

Le plan S_1 mené par Δ_1 parallèle à $\vec{U}$ a une équation de la forme (1), obtenue en écrivant que le plan parallèle mené par O contient le point (7, — 8, 1); on obtient ainsi $\lambda' = 0$, le coefficient de λ étant nul; le plan S_1 est ainsi confondu avec II, ce qui s'explique par le fait que Δ est perpendiculaire à ce plan II, donc orthogonale à Δ_1, et L_1 est ainsi l'intersection des plans menés par Δ et Δ_1, respectivement perpendiculaires à Δ_1 et à Δ :

$$3x + 2y - 5z = 0, \qquad x + y + z + 4 = 0.$$

Exemple II. — *Former les équations de la perpendiculaire commune à l'axe z'z et à la droite* D *représentée par les équations* $x = az + p$, $y = bz + q$ *et calculer la plus courte distance de ces droites* (fig. 36).

Soient A et B les pieds de la perpendiculaire commune sur $z'z$ et sur D. La droite AB perpendiculaire à $z'z$ est parallèle au plan xOy. L'angle droit ABD a un côté parallèle au plan xOy, il se projette sur ce plan suivant un angle droit. La projection de AB sur le plan xOy se fait suivant la perpendiculaire OH abaissée de O sur la projection D' de D. Or l'équation de D' s'obtient en éliminant z entre celles de D, c'est

$$bx - ay = bp - aq.$$

La droite OH du plan xOy a pour équation

(1) $$ax + by = 0,$$

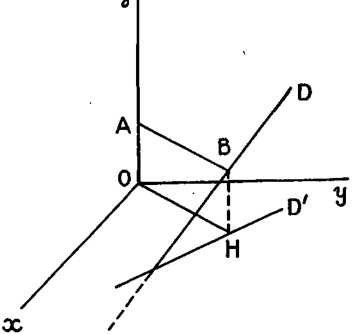


Fig. 36.

cette équation est aussi celle du plan qui contient $z'z$ et AB. Le point B est la trace de D sur ce plan, sa cote est racine de l'équation

$$a(az + p) + b(bz + q) = 0, \qquad \text{c'est} \qquad (2) \quad z = -\frac{ap + bq}{a^2 + b^2}.$$

La perpendiculaire commune est représentée par les équations (1) et (2). La plus courte distance est la distance de O à D′, c'est $\dfrac{|bp - aq|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exemple III. — Reprenons les droites D, D′ et L considérées à l'exercice traité au n° 166, et cherchons les perpendiculaires communes à L et D et à L et D′. La distance à D d'un point $P(x\ y,\ z)$ est donnée par la formule

$$d^2 = (z - a)^2 + (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2.$$

Si P est le point de cote z sur L, $x = \dfrac{2\,az}{\lambda \cos\alpha}$, $y = -\dfrac{\lambda}{2 \sin\alpha}$, et par suite

$$d^2 = \left(1 + \frac{4\,a^2}{\lambda^2}\,\mathrm{tg}^2\alpha\right)z^2 + a^2 + \frac{\lambda^2}{4}\cot^2\alpha$$

La plus courte distance de P à L correspond à $z = 0$; le pied sur L de la perpendiculaire commune à D et L est donc le point $E\left(0,\ -\dfrac{\lambda}{2 \sin\alpha},\ 0\right)$ où L rencontre Oy ; on peut représenter la perpendiculaire commune par les équations du plan (D, E) et du plan mené par E perpendiculairement à D, soit

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha + \frac{\lambda}{2\,a}(z - a) \cot\alpha = 0, \qquad x \cos\alpha + y \sin\alpha + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Tout point P de L est équidistant des droites D et D′ puisque L est un axe de rotation amenant D sur D′ ; il en résulte que le point E est aussi le pied sur la droite L de la perpendiculaire commune à cette droite et à D′.

170. *Couple de droites passant par l'origine dans le plan* xOy. —

Nous nous plaçons dans le plan affine réel de la géométrie élémentaire $\mathcal{E}$, rapporté à un repère quelconque $\left\{ O, \vec{i}, \vec{j} \right\}$.

1° Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites passant par O, représentées respectivement par les équations

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = 0, \qquad \alpha_2 x + \beta_2 y = 0.$$

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble $\{ \Delta_1, \Delta_2 \}$ (on l'appelle gerbe de deux droites de sommet O).

$$M(x,\ y) \in \mathcal{G} \iff (\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y) = 0. \qquad (1)$$

Le premier membre de l'équation (1) est un polynôme quadratique en x et y, en sorte que l'équation (1) est de la forme

$$(2) \qquad Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 = 0, \qquad A,\ B,\ C \in \mathbf{R}.$$

2° Inversement, donnons-nous, a priori, une équation telle que (2), à coefficients réels. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des points $M(x,\ y)$ du plan qui vérifient (2).

a) Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point de $\mathcal{G}$, tout point (tx_0, ty_0), où t décrit R, est aussi un point de $\mathcal{G}$, c'est dire que la droite OM_0 appartient à $\mathcal{G}$; $\mathcal{G}$ est formée de droites passant par O.

b) Pour trouver ces droites, il suffit alors de couper $\mathcal{G}$ par une droite particulière, par exemple la droite $L(x = 1)$; l'équation

$$A + 2By + Cy^2 = 0 \tag{3}$$

est l'équation aux coefficients directeurs des droites de $\mathcal{G}$.

Supposons $C \neq 0$;
si $B^2 - AC > 0$, $\mathcal{G}$ est une gerbe de deux droites réelles,
si $B^2 - AC = 0$, $\mathcal{G}$ est une droite double réelle,
si $B^2 - AC < 0$, $\mathcal{G}$ ne comprend qu'un point réel, O; si l'on se place alors dans le plan affine $\mathcal{E}_c$ complexifié de $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$ représente une gerbe de deux droites imaginaires conjuguées.

Supposons $C = 0$; l'équation (2) prend la forme

$$x(Ax + 2By) = 0$$

$\mathcal{G}$ comprend deux droites dont l'une est Oy; si en outre $B = 0$, $\mathcal{G}$ est la droite double Oy.

Condition pour que deux gerbes de deux droites de sommet O se divisent harmoniquement. Soit D et D′ les droites de la gerbe $\mathcal{G}$; soit D_1 et D'_1 les droites de la gerbe $\mathcal{G}_1$ d'équation

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 = 0. \tag{2'}$$

$$(D, D', D_1, D'_1) = (m, m', m_1, m'_1)$$

si m, m', m_1, m'_1 sont les coefficients directeurs des droites D, D', D_1, D'_1.

$$(D, D', D_1, D'_1) = -1 \iff (m + m')(m_1 + m'_1) = 2(mm' + m_1m'_1)$$

En supposant $C \neq 0$, $C_1 \neq 0$, les relations entre les coefficients et les racines de l'équation (3), et de l'équation (3′) relative à $\mathcal{G}_1$ donnent la condition

$$AC_1 + CA_1 - 2BB_1 = 0.$$

Cette condition subsiste si l'un des nombres C ou C_1 est nul.

3° **Angles des deux droites.** — Supposons le plan euclidien et le repère orthonormé; plaçons-nous dans le cas où $C \neq 0$, $B^2 - AC > 0$. L'équation (2) représente deux droites D et D′, de coefficients directeurs m et m', racines de l'équation (3). Nous savons que

$$\operatorname{tg}(D, D') = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

L'équation (3) donne

$$mm' = \frac{A}{C}; \qquad (m' - m)^2 = (m + m')^2 - 4mm' = \frac{4(B^2 - AC)}{C^2}$$

et finalement :

$$\operatorname{tg}(D, D') = \frac{2\varepsilon\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}. \tag{4}$$

La présence du double signe tient à ce que, l'équation (2) définissant le couple des droites, il est impossible de distinguer les angles de D avec D' de ceux de D' avec D.

Condition d'orthogonalité. — La condition d'orthogonalité des droites D, D' s'exprime par l'égalité $1 + mm' = 0$, le repère étant orthonormé. Elle devient

$$\boxed{A + C = 0.}$$

Remarque. — L'hypothèse $C \neq 0$ a été nécessitée par la méthode suivie (introduction des coefficients directeurs). Si $C = 0$, l'une des droites est $y'y$, l'autre a pour coefficient directeur $-\frac{A}{2B}$, et le lecteur vérifiera que l'angle de ces droites est encore donné par la formule (4) où l'on fait $C = 0$.

4° **Bissectrices des deux droites.** — Appelons θ et θ' des angles polaires des droites D et D'; si α est un angle polaire d'une bissectrice, Δ,

$$2\alpha = \theta + \theta' \qquad (\text{mod. } \pi).$$

Cette égalité équivaut à la suivante :

(5) $$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\theta + \theta').$$

Le repère étant orthonormé, les coefficients directeurs m, m', μ de D, D', Δ sont

$$m = \operatorname{tg}\theta, \qquad m' = \operatorname{tg}\theta', \qquad \mu = \operatorname{tg}\alpha.$$

Cette observation permet de remplacer l'égalité (5) par l'égalité

$$\frac{2\mu}{1 - \mu^2} = \frac{m + m'}{1 - mm'}$$

qui devient, en tenant compte des relations entre les coefficients et les racines de l'équation (3),

(6) $$\frac{2\mu}{1 - \mu^2} = \frac{2B}{A - C}.$$

Pour que le point $M(x, y)$ soit sur l'une des bissectrices, il faut et il suffit que $\frac{y}{x}$ soit racine de l'équation (6) c'est-à-dire que

(7) $$(A - C)xy - B(x^2 - y^2) = 0.$$

Telle est l'équation du couple des bissectrices des angles formés par les droites D, D' *représentées par l'équation* (2).

Remarque. — Le lecteur vérifiera aisément que le résultat subsiste si $C = 0$.

5° **Droites isotropes.** — Le plan complexifié $\mathcal{E}_C$ étant rapporté à un repère orthonormé, on appelle *droite isotrope* toute droite de coefficient directeur i ou $-i$ (1).

La gerbe des deux droites isotropes de sommet O a pour équation

$$(y - ix)(y + ix) = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = 0.$$

La condition d'orthogonalité vue au 3° exprime que la gerbe $\mathcal{G}$ est divisée harmoniquement par la gerbe des isotropes de sommet O.

La question sera reprise, conformément au programme A'2, aux nos **249** et **250**.

6° **Généralisations.** — *a*) Si $P = 0$, $Q = 0$ sont les équations cartésiennes de deux droites se coupant au point S, l'équation

$$AP^2 + 2\,BPQ + CQ^2 = 0$$

représente, comme au 2°, une gerbe de deux droites de sommet S; chacune d'elles a une équation de la forme

$$Q = \lambda P, \qquad \lambda \text{ étant racine de } \qquad A + 2\,B\lambda + C\lambda^2 = 0.$$

b) Si $\varphi(x, y)$ est un polynôme homogène de degré n, à coefficients réels, l'équation

$$\varphi(P, Q) = 0$$

représente une gerbe de n droites de sommet S, réelles ou imaginaires conjuguées, distinctes ou confondues, suivant la nature des racines de l'équation

$$\varphi(1, \lambda) = 0.$$

V. EXEMPLES D'ENDOMORPHISMES DANS UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN

171. *Représentation matricielle de quelques transformations géométriques simples* (2). — 1° Nous considérerons simultanément l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de la géométrie élémentaire et l'espace vectoriel associé $\vec{E}$.

$\mathcal{U} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ étant une base orthonormée de $\vec{E}$, nous rapporterons $\mathcal{E}$ au repère $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Nous orientons $\mathcal{E}$ et nous supposons que la base $\mathcal{U}$ est positive.

La matrice $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ représente soit le point M de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées

(1) Au n° **106**, on a appelé vecteur isotrope du complexifié d'un espace vectoriel euclidien tout vecteur dont le carré scalaire est nul; tout vecteur porté par une droite isotrope est isotrope.

(2) Le lecteur qui a étudié les nos **109** et **110** retrouvera ici des cas particuliers de théories générales qu'il a déjà rencontrées.

cartésiennes sont X, Y, Z, soit le vecteur de $\vec{E}$ dont un représentant est $\overrightarrow{OM}$, et que nous noterons simplement $\vec{M}$.

A tout endomorphisme f de $\vec{E}$ est associée ainsi une transformation ponctuelle linéaire des points de $\mathcal{E}$ (tome I, n° 174).

Rappelons que si f est un endomorphisme de $\vec{E}$, la matrice $\mathcal{F}$ qui représente f dans la base $\mathcal{U}$ a pour vecteurs-colonnes $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$, $f(\vec{k})$.

2° **Projections orthogonales sur une droite et sur un plan.** — Soit Δ et Π une droite et un plan perpendiculaires menés par O; soit m_1 et m_2 les projections orthogonales de M sur Δ et sur Π; $\vec{m_1}$ et $\vec{m_2}$ sont les vecteurs projections orthogonales de $\vec{M}$ sur la direction Δ et sur la direction de plan Π (fig. 37).

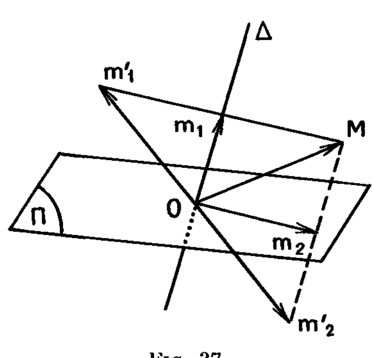


Fig. 37.

Les transformations associées à ces projections vérifient les critères de linéarité; ce sont des endomorphismes de $\vec{E}$; (tome I, n° 162) nous poserons

$$\vec{m_1} = p_1(\vec{M}) \qquad \vec{m_2} = p_2(\vec{M}).$$

Soit $\vec{K}$ un vecteur unitaire de Δ; ses coordonnées u, v, w dans la base $\mathcal{U}$ sont des cosinus directeurs de Δ.

$$(\overline{Om_1})_{\vec{K}} = \vec{K}.\vec{M} = uX + vY + wZ.$$

$$\vec{m_1} = (uX + vY + wZ)\vec{K}$$

ou

$$\vec{m_1} = (uX + vY + wZ)\left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right).$$

La matrice $\mathcal{P}_1$ de l'endomorphisme p_1 est ainsi

$$\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} u^2 & vu & wu \\ uv & v^2 & wv \\ uw & vw & w^2 \end{bmatrix}$$

Alors $\vec{m_2} = \vec{M} - \vec{m_1}$, ou encore, en appelant e l'endomorphisme identique de $\vec{E}$, $\mathcal{I}$ la matrice unitaire d'ordre 3, $\mathcal{P}_2$ la matrice de p_2

$$p_2(\vec{M}) = e(\vec{M}) - p_1(\vec{M}).$$

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{I} - \mathcal{P}_1 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 - u^2 & -vu & -wu \\ -uv & 1 - v^2 & -wv \\ -uw & -vw & 1 - w^2 \end{bmatrix}$$

3° **Symétries orthogonales par rapport à une droite et par rapport à un plan.** — Appelons m'_1 et m'_2 les symétriques du point M par rapport à Δ et Π respectivement; $\vec{m'_1}$ et $\vec{m'_2}$ désigneront les vecteurs symétriques du vecteur $\vec{M}$ dans la symétrie orthogonale s_1 relative à la direction Δ, et dans la symétrie orthogonale s_2 relative à la direction de plan Π; ces symétries sont des endomorphismes de $\vec{E}$ car

$$\vec{m'_1} = s_1(\vec{M}) = \vec{M} - 2\,\vec{m_2} = e(\vec{M}) - 2\,p_2(\vec{M}).$$
$$\vec{m'_2} = s_2(\vec{M}) = \vec{M} - 2\,\vec{m_1} = e(\vec{M}) - 2\,p_1(\vec{M}).$$

Si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont les matrices de s_1 et s_2

$$\mathcal{S}_1 = \mathfrak{I} - 2\,\mathfrak{P}_2, \qquad \mathcal{S}_2 = \mathfrak{I} - 2\,\mathfrak{P}_1$$

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} 2u^2-1 & 2vu & 2wu \\ 2uv & 2v^2-1 & 2wv \\ 2uw & 2vw & 2w^2-1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} 1-2u^2 & -2vu & -2wu \\ -2uv & 1-2v^2 & -2wv \\ -2uw & -2vw & 1-2w^2 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux matrices opposées : $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = [0]$; cela tient à ce que les vecteurs $\vec{m'_1}$ et $\vec{m'_2}$ sont opposés (les points m'_1 et m'_2 sont symétriques par rapport à O).

Les matrices $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont symétriques : les transformations s_1 et s_2 sont en effet involutives.

Les transformations s_1 et s_2 sont deux isométries; la première est droite, la seconde est gauche.

4° **Multiplication vectorielle à gauche par un vecteur.** — Soit $\vec{G}$ un vecteur donné de coordonnées a, b, c. Soit g l'application de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ définie par

$$g(\vec{M}) = \vec{G} \wedge \vec{M}$$

g vérifie les critères de linéarité; g est un endomorphisme de $\vec{E}$.

$g(\vec{M})$ a pour coordonnées $bZ - cY$, $cX - aZ$, $aY - bX$, c'est donc que la matrice associée $\mathcal{G}$ est

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

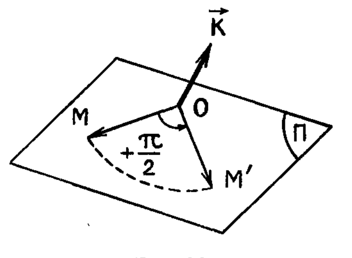


Fig. 38.

Application. — *Faire tourner un vecteur de* $+\frac{\pi}{2}$ *dans un plan orienté donné* Π. Soit $\vec{K}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à Π, orienté de façon que le sens positif de rotation

autour de l'axe $\vec{K}$, concorde avec le sens de rotation choisi dans Π. Alors (fig. 38) si $\vec{M}$ est un vecteur de Π, $\vec{M'}$ le vecteur déduit de $\vec{M}$ par la rotation de mesure $+\frac{\pi}{2}$ dans Π, on a

$$\vec{M'} = \vec{K} \wedge \vec{M}.$$

5° **Rotation autour d'un axe** (*Programmes* A1 *et* A2). — On donne l'axe $\vec{\Delta}$ issu de O, déterminé par le vecteur unitaire $\vec{K}(u, v, w)$. On demande de trouver les coordonnées (X', Y', Z') du point M' transformé du point M(X, Y, Z) par la rotation r d'axe $\vec{\Delta}$, de mesure θ, θ étant un élément de $R/2\pi Z$; nous écrirons

$$r = [\vec{K}, \theta].$$

1ere méthode. — Soit, comme au 2°, $\vec{m_1}$ et $\vec{m_2}$ les projections respectives du vecteur $\vec{M}$ sur Δ et sur le plan Π mené par O perpendiculaire à Δ; le plan Π est orienté à l'aide de $\vec{K}$; le vecteur $\vec{n}$ déduit de $\vec{m_2}$ par la rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de O est (fig. 39)

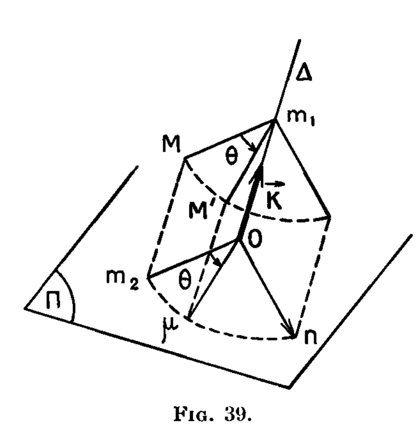


FIG. 39.

$$\vec{n} = \vec{K} \wedge \vec{m_2} \quad \text{ou encore} \quad \vec{n} = \vec{K} \wedge \vec{M}$$

puisque $\vec{K} \wedge \vec{M_1} = \vec{0}$.

Le vecteur $\vec{M'} = r(\vec{M})$ est la somme des vecteurs $\vec{m_1}$ et $\vec{\mu}$, $\vec{\mu}$ étant déduit de $\vec{m_2}$ par la rotation de mesure θ, dans Π :

$$\vec{\mu} = \vec{m_2} \cos\theta + \vec{n} \sin\theta.$$

Finalement $$\vec{M'} = \vec{m_1} + \vec{m_2} \cos\theta + \vec{n} \sin\theta,$$

ou, avec les notations du 2° et du 4°,

$$(1) \qquad r(\vec{M}) = p_1(\vec{M}) + p_2(\vec{M}) \cos\theta + g(\vec{M}) \sin\theta.$$

L'endomorphisme r apparaît ainsi comme la somme des endomorphismes

$$p_1, \quad p_2 \cos\theta, \quad g \sin\theta.$$

C'est donc que la matrice ρ de l'endomorphisme r est

(2) $$\rho = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \cos\theta + \mathcal{K} \sin\theta,$$

les matrices $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont celles du 2°, la matrice $\mathcal{K}$ est

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement

(3) $$\rho = \begin{bmatrix} u^2 & vu & wu \\ uv & v^2 & wv \\ uw & vw & w^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1-u^2 & -vu & -wu \\ -uv & 1-v^2 & -wv \\ -uw & -vw & 1-w^2 \end{bmatrix} \cos\theta + \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix} \sin\theta.$$

La formule $$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

donne les coordonnées du point M' déduit de M par la rotation $[\vec{K}, \theta]$.

2e méthode. — Soit $\mathcal{U}_1 = \{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$ une base orthonormée positive de $\vec{E}$, $\vec{K}$ étant le vecteur unitaire de l'axe $\vec{\Delta}$; $\{\vec{I}, \vec{J}\}$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel des vecteurs de Π (1); on oriente Π conformément à $\vec{K}$; la matrice de r dans la base $\mathcal{U}_1$ est

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si P est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}_1$

(4) $$\rho_1 = P^{-1}\rho P \qquad \text{ou} \qquad \rho = P\rho_1 P^{-1}$$

REMARQUE. — La matrice ρ obtenue au 5° pour la rotation $r = [\vec{K}, \theta]$ est une matrice orthogonale droite : en effet chacune des colonnes de ρ est formée par les coordonnées, dans la base $\mathcal{U}$, des vecteurs $\vec{i'} = r(\vec{i})$, $\vec{j'} = r(\vec{j})$, $\vec{k'} = r(\vec{k})$ transformés des vecteurs de la base; ces vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ constituent une base $\mathcal{U}'$ de $\vec{E}$, de même orientation que $\mathcal{U}$, et par suite ρ est une matrice des neuf cosinus directeurs, dont le déterminant est $+1$.

Inversement, donnons-nous, dans une base orthonormée positive $\mathcal{U} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de $\vec{E}$, une matrice orthogonale droite

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \qquad \text{dét } \mathcal{T} = +1.$$

(1) On peut choisir arbitrairement un vecteur $\vec{I}$ dans Π, par exemple un vecteur colinéaire à $(v, -u, 0)$, alors $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$.

Elle détermine un endomorphisme f de $\vec{E}$; les relations

$$\begin{cases} \vec{i'} = f(\vec{i}) & \text{ou} \quad \vec{i'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \\ \vec{j'} = f(\vec{j}) & \text{ou} \quad \vec{j'} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k} \\ \vec{k'} = f(\vec{k}) & \text{ou} \quad \vec{k'} = a''\vec{i} + b''\vec{j} + c''\vec{k} \end{cases}$$

déterminent une base $\mathcal{U}' = \{\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\}$ qui est orthonormée et positive (nº 133). Les repères $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ et $\mathcal{R}' = \{O, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\}$ sont deux figures *égales* de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, au sens de la géométrie élémentaire; le point O est à lui-même son homologue; on montre alors, géométriquement, qu'il existe une rotation r, autour d'un axe Δ contenant O, qui transforme $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$.

Au point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

la rotation r associe le point M' qui a, dans $\mathcal{R}'$, les mêmes coordonnées que M dans $\mathcal{R}$, soit

$$\overrightarrow{OM'} = x\vec{i'} + y\vec{j'} + z\vec{k'}$$

ou $$\overrightarrow{OM'} = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) + zf(\vec{k}) = f(\overrightarrow{OM}).$$

Pour tout point M de $\mathcal{E}$,

$$f(\vec{M}) = r(\vec{M}), \quad \text{il en résulte} \quad f = r.$$

En résumé, toute matrice orthogonale droite est, dans une base orthonormée positive, la matrice d'une rotation autour d'un axe passant par O.

172. ***Rotation dans un espace vectoriel euclidien de dimension* 3.** — 1º **Rappels.** — Au nº 108, nous avons appelé *rotation* dans un espace vectoriel euclidien $\vec{E}_n$ de dimension n toute isométrie droite, et nous avons annoncé une étude particulière du cas où $n = 3$.

Le théorème général du nº 108, 2º suppose n impair; il est donc vrai pour $n = 3$; nous pouvons donc énoncer :

Toute rotation f de $\vec{E}_3$ admet $+ 1$ pour valeur propre;

ou, ce qui revient au même :

Toute rotation f de $\vec{E}_3$ laisse invariants des vecteurs non nuls.

2º Matrice d'une rotation dans $\vec{E}_3$, quand un vecteur de la base orthonormée est invariant.

Les vecteurs invariants par f forment un sous-espace vectoriel de dimension p (sous-espace propre relatif à $+ 1$); nous avons vu au nº 108, 2º, b) que p est impair; les seules valeurs possibles de p sont ici 3 et 1.

a) Le cas $p = 3$ est trivial; le sous-espace propre relatif à $+ 1$ coïncide avec $\vec{E}_3$; tout vecteur de $\vec{E}_3$ est invariant par f; la rotation f n'est autre que l'application identique de $\vec{E}_3$ sur lui-même; la matrice associée est la matrice-unité d'ordre 3.

b) Pour une rotation f de $\vec{E}_3$, non identique, nous avons donc $p = 1$. Le sous-espace propre relatif à $+1$, $\vec{E}_1$, est ici une droite Δ issue de l'origine; le sous-espace orthogonal $\vec{E}_2$ est le plan Π issu de l'origine, orthogonal à Δ.

Le vecteur générique $\vec{M}$ de $\vec{E}_3$ admet la décomposition unique

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 \qquad \vec{m}_1 \in \vec{E}_1; \quad \vec{m}_2 \in \vec{E}_2;$$

$\vec{m}_1$ et $\vec{m}_2$ sont respectivement les projections orthogonales de $\vec{M}$ sur $\vec{E}_1$ et sur $\vec{E}_2$ (n° 19, 2°).

D'une part $f(\vec{m}_1) = \vec{m}_1$; d'autre part, la restriction $\hat{f}$ de f à $\vec{E}_2$ est une rotation de $\vec{E}_2$ (n° 108, 2°, *b*); si nous choisissons dans $\vec{E}_2$ une base orthonormée $\mathcal{U}_2 = \{\vec{I}, \vec{J}\}$, nous savons (n° 111, 1°) qu'une rotation de $\vec{E}_2$ est alors représentée par une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Finalement, rapportons $\vec{E}_3$ à la base orthonormée constituée par $\vec{I}, \vec{J}$ et par un vecteur unitaire $\vec{K}$ de $\vec{E}_1$:

$$\mathcal{U} = \{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}.$$

Dans la base $\mathcal{U}$, f, qui se traduit par

$$f(\vec{M}) = f(\vec{m}_2) + \vec{m}_1$$

est donc représentée par la matrice

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

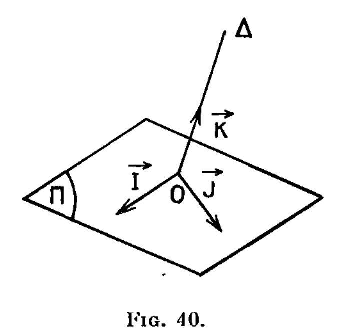


Fig. 40.

c) Pour $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ la matrice $\mathcal{R}$ est la matrice-unité d'ordre 3, et l'on retrouve le cas particulier *a*).

En résumé, toute isométrie droite de $\vec{E}_3$ est associée, par le choix convenable d'une base orthonormée, à une matrice de la forme $\mathcal{R}$.

Dans $\vec{E}_2$ orienté, θ s'appelle la mesure de la rotation $\hat{f}$ subie par $\vec{m}_2$; on dit aussi, par définition, que θ est la mesure de la rotation f subie par $\vec{M}$ dans $\vec{E}_3$, autour de la direction orientée par le vecteur unitaire invariant $\vec{K}$; en abrégé, cette rotation sera notée $[\vec{K}, \theta]$.

Le lecteur a ainsi retrouvé, par voie axiomatique, ce qu'il avait obtenu élémentairement dans l'étude du programme A1 (n° 171, 5°).

REMARQUE. — L'équation caractéristique de la matrice $\mathcal{R}$ est

$$(1-\lambda)[(\cos\theta-\lambda)^2+\sin^2\theta]=0.$$

Les zéros sur C en sont 1, $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$.

Plaçons-nous dans le complexifié $(\vec{E}_3)_C$ de $\vec{E}_3$; les vecteurs propres (X, Y, Z) associés à $e^{i\theta}$ sont tels que

$$Y+iX=0, \qquad Z=0;$$

ces vecteurs sont ceux des vecteurs isotropes de $(\vec{E}_2)_C$ dont le coefficient directeur est $+i$. De même les vecteurs propres associés à $e^{-i\theta}$ sont ceux des vecteurs isotropes de $(\vec{E}_2)_C$ dont le coefficient directeur est $-i$.

La trace de $\mathcal{R}$ est $1+2\cos\theta$.

3° **Caractérisation de la rotation déterminée par une matrice orthogonale droite donnée.** — On donne, relativement à une base orthonormée positive de $\vec{E}_3$

$$\mathcal{U}=\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$$

l'endomorphisme f de $\vec{E}_3$ déterminé par la matrice orthogonale droite

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \qquad \text{dét}\ \mathcal{C}=+1.$$

f est une rotation de $\vec{E}_3$: cherchons à la caractériser sous la forme $[\vec{K}, \theta]$ obtenue à la fin du 2°; $\vec{K}$ est un vecteur unitaire invariant, dont les coordonnées sont appelées u, v, w; θ est la mesure de la rotation. La première méthode du n° 171, 5° donne une expression de la matrice ρ de la rotation $[\vec{K}, \theta]$; il suffit alors d'identifier $\mathcal{C}$ et ρ.

Confrontons les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale :

$$\begin{cases} c'-b''=2u\sin\theta \\ a''-c=2v\sin\theta \\ b-a'=2w\sin\theta \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{K}$ est donc colinéaire au vecteur

$$c'-b'', \quad a''-c, \quad b-a'.$$

Comme d'autre part u, v, w sont les coordonnées de $\vec{K}$ dans la base $\mathcal{U}$, la relation $u^2+v^2+w^2=1$ entraîne

$$4\sin^2\theta=(c'-b'')^2+(a''-c)^2+(b-a')^2.$$

On peut convenir que $\sin\theta$ est positif; u, v, w, et par suite le vecteur $\vec{K}$ sont alors déterminés sans ambiguïté.

On achève de déterminer θ en observant que l'invariance des valeurs propres entraîne celle de la trace de la matrice d'un endomorphisme; par suite

$$a+b'+c''=1+2\cos\theta.$$

θ est déterminé (modulo 2π) par son sinus et par son cosinus.

EXERCICES

1. — On donne deux axes Ox, Oy et le point $I(a, b)$ $(ab \neq 0)$. Par le point fixe $M(x_0, y_0)$ $(x_0y_0 \neq 0)$ on mène une droite variable rencontrant Ox en P, Oy en Q. IP rencontre Oy en Q′, IQ rencontre Ox en P′. Démontrer que, en général, la droite P′Q′ passe par un point fixe $M'(x'_0, y'_0)$. Démontrer que les point M, M′, I sont alignés et que si M varie, les droites OM, OM′ restent conjuguées harmoniques par rapport à deux droites fixes.

Comment doit-on choisir M pour que la droite P′Q′ conserve une direction fixe? Quelle est cette direction?

2. — On donne un triangle ABC par les coordonnées de ses sommets et un point O dans son plan.

a) Soient A′, B′, C′ les symétriques de O par rapport aux milieux des segments BC, CA, AB. Démontrer que les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes.

b) $O\delta$ et $O\delta'$ étant deux droites fixes, la conjuguée harmonique de la droite OA par rapport à $O\delta$ et $O\delta'$ coupe BC en α; démontrer que le point α, et les points analogues β et γ, sont alignés.

3. — On donne un triangle par les équations cartésiennes de ses côtés; trouver les équations des médianes, des hauteurs, des bissectrices.

4. — Soient ABC, A′B′C′ deux triangles d'un même plan. Démontrer que si les parallèles (resp. perpendiculaires) menées de A, B, C à B′C′, C′A′, A′B′ sont concourantes, il en est de même des parallèles (resp. perpendiculaires) menées de A′, B′, C′ à BC, CA, AB.

5. — Par les sommets d'un triangle ABC, on mène trois droites de même direction rencontrant les côtés opposés en A′, B′, C′. Soit α le point d'intersection de BC et de B′C′. Démontrer que α, et les points analogues β et γ, sont alignés.

6. — Une sécante Δ coupe les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC aux points α, β, γ. Par α, on mène les parallèles à AB et AC qui coupent en β_1 et γ_1 la parallèle à BC menée par A. Démontrer que les droites $\beta\beta$ et $\gamma\gamma_1$ sont parallèles.

7. — On donne un triangle A, B, C par les équations normales de ses côtés (repère orthonormé).

a) Par les sommets A, B, C on mène trois droites concourantes; les symétriques de ces droites par rapport aux bissectrices des angles du triangle sont aussi concourantes.

b) Par les sommets A, B, C on mène les parallèles à une direction d'angle polaire φ; montrer que les symétriques de ces droites par rapport aux bissectrices des angles du triangle sont concourantes; lieu de ce point de concours quand φ varie.

c) On construit, en prenant pour bases respectives les segments BC, CA, AB des triangles isocèles BA′C, CB′A, AC′B de sommets A′, B′, C′, extérieurs au triangle ABC, et semblables entre eux : montrer que les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes.

d) Soient A_1, B_1, C_1 les projections orthogonales de l'origine sur les côtés BC, CA, AB; démontrer que les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont concourantes ou parallèles.

e) Évaluer l'aire du triangle ABC.

8. — Soient A′, B′, C′ les symétriques, par rapport aux côtés BC, CA, AB d'un triangle équilatéral ABC, d'un point M du plan de ce triangle. Démontrer que les triangles ABC et A′B′C′ ont même centre de gravité, et que les droites AA′, BB′, CC′ sont, en général, concourantes; quels sont les points M pour lesquels ces droites sont parallèles?

9. — On donne un triangle ABC et une droite D de son plan. Une affinité orthogonale d'axe D, de rapport k, transforme A, B, C en A', B', C'. Démontrer que les perpendiculaires abaissées des sommets de chacun des triangles sur les côtés de l'autre (par exemple de A' sur BC, etc...) sont concourantes.

10. — Deux droites rectangulaires Δ et Δ' passant par l'orthocentre H d'un triangle ABC rencontrent les côtés BC, CA, AB du triangle en P et P', Q et Q', R et R' respectivement. Démontrer que les milieux des segments PP', QQ', RR' sont alignés.

11. — Une hyperbole équilatère Γ, rapportée à ses asymptotes, a pour équation $xy = 1$. Soient A, B, C trois points de Γ, d'abscisses a, b, c.

a) Démontrer que l'orthocentre H du triangle ABC est sur Γ, et calculer son abscisse h.

b) Soient α et α' les perpendiculaires à la droite BC aux points où cette droite rencontre Ox et Oy. On définit de même les droites β, β', γ, γ'? Démontrer que les droites α, β, γ (resp. α', β', γ') concourent en un point I (resp. I'). Calculer les coordonnées de I et I';

c) Évaluer les produits scalaires $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI'}$, $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BI'}$, $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CI'}$. Former l'équation du cercle Δ circonscrit au triangle ABC. Démonter que Δ recoupe Γ au point H' symétrique de H par rapport au centre de Γ.

(*On posera* : $a + b + c = p$, $bc + ca + ab = q$, $abc = r$).

12. — Soit ABC un triangle et soient H, K, L les pieds des perpendiculaires menées d'un point M du plan du triangle aux droites BC, CA, AB. Trouver sur quelles lignes doit être M pour que l'on ait

$$1^\circ \quad MH = MK + ML, \qquad 2^\circ \quad MH + MK + ML = l,$$

l étant une longueur donnée.

13. — Le repère étant orthonormé, on donne la droite Δ représentée par l'équation

$$\lambda^2 x - \lambda y + \frac{a}{2} = 0.$$

On considère les trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 associées aux racines λ_1, λ_2, λ_3 de l'équation

$$\lambda^3 - 3\lambda + k(1 - 3\lambda^2) = 0 \qquad (k \text{ réel donnée}).$$

Montrer que Δ_1, Δ_2, Δ_3 forment un triangle équilatéral; trouver les coordonnées de l'orthocentre et du centre de gravité de ce triangle; trouver l'aire de ce triangle; montrer que lorsque k varie, les sommets du triangle décrivent une hyperbole.

14. — Dans un repère orthonormé on donne les points A$(a, 0)$ et B$(-a, 0)$. Soit u'Au, v'Bv les droites passant respectivement par A et B, sur lesquelles les directions positives sont définies par

$$\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Au}), \qquad \beta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Bv}).$$

Sur u'Au on considère un point variable U, auquel on fait correspondre sur v'Bv le point V tel que $\overline{BV} = k\overline{AU}$, k étant une constante donnée.

a) Le lieu du point M commun à AV et BU est une droite Δ; vérifier que le rapport des distances des points de Δ à la parallèle menée par B à u'Au, et à la parallèle menée par A à v'Bv est constant.

b) On fait varier α et β de façon que $\beta - \alpha = \varphi$, φ étant une constante donnée; démontrer que Δ passe par un point fixe I. Trouver le lieu de I

I. quand φ restant fixe, k varie;

II. quand k restant fixe, φ varie.

15. — Déterminer les droites rencontrant les quatre droites données

$$D_1 \begin{cases} z = a \\ x = b \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} z = -a \\ x = -b \end{cases} \quad D_3 \begin{cases} z = h \\ y = mx \end{cases} \quad D_4 \begin{cases} z = -h \\ y = -mx. \end{cases}$$

16. — Relation entre u, v, w, h pour que le plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ coupe en trois points alignés les droites

$$\begin{cases} x = a \\ y = \alpha z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = b \\ y = \beta z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = c \\ y = \gamma z. \end{cases}$$

17. — Les trois plans dont les équations sont, dans un repère orthonormé,

$$bz - cy = p, \qquad cx - az = q, \qquad ay - bx = r$$

déterminent en général une surface prismatique. Quelle est l'aire d'une section droite de cette surface?

18. — Dans un repère orthonormé, on donne les droites

$$\mathrm{D}\ (y = 0, \quad z = ux + a), \qquad \mathrm{D}'\ (x = 0, \quad z = vy - a).$$

a) Déterminer leur perpendiculaire commune Δ, puis la perpendiculaire commune L à Oz et Δ, et enfin les coordonnées du point d'intersection M de L et Δ.

b)* Étudier la surface lieu de M lorsque u et v varient.

19. — Former des équations de la perpendiculaire commune aux droites D, D' définies par les équations

$$(\mathrm{D}) \begin{cases} x - y = z + 2 \\ 3x + 4 = 2z - y \end{cases} \qquad (\mathrm{D}') \begin{cases} 2x - 4y + z - 1 = 0 \\ 3x - 6y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

et calculer la plus courte distance de ces droites (repère orthonormé).

20. — Une droite D étant définie par les équations $4x + 5y - 7z + 1 = 0$ et $x = 2z + 4$ (repère orthonormé) former : *a*) l'équation d'un plan P qui contient cette droite et fait un angle de 30° avec la droite qui a pour équations

$$x + y + 3z - 1 = 0, \qquad 2x + y + 6z + 4 = 0;$$

b) l'équation d'un plan Q qui contient la droite donnée et qui est à la distance unité du point A(1, 1, 1).

21. — Former des équations de la perpendiculaire commune aux droites D et D' dont les équations s'obtiennent en donnant au paramètre φ les valeurs φ et φ' dans les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi \quad \text{(repère orthonormé).}$$

22. — On donne un trièdre par son sommet, O, et par les cosinus directeurs de ses arêtes (repère orthonormé).

a) Trouver les équations des plans de symétrie des arêtes prises deux à deux, et montrer qu'ils ont une droite commune.

b) Trouver les équations des plans bissecteurs des dièdres du trièdre (bissecteur intérieur et bissecteur extérieur), et montrer qu'ils ont trois à trois une droite commune.

c) Trouver les équations des plans projetant orthogonalement les arêtes sur les plans des faces opposées et montrer qu'ils ont une droite commune.

d) Trouver les équations des plans passant par les arêtes et par les bissectrices (intérieure et extérieure) des faces opposées, et montrer qu'ils ont trois à trois une droite commune.

23. — On reprend l'exercice proposé au n° 166, 2°.

a) Montrer que tout point de L est équidistant des droites D et D';

b) Trouver les perpendiculaires communes aux droites L et D, L et D', L et Oz;

c) Résoudre les questions précédentes en remplaçant la droite L par la droite L';

d) Montrer que les droites L et L' ont un point commun dont on cherchera le lieu géométrique quand λ varie.

24. — Soient AA′, BB′, CC′ trois segments parallèles, non situés dans un même plan.

a) Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les plans A′BC, B′CA, C′AB soient parallèles à une même droite est que la somme

$$s = \frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} \qquad \text{soit nulle.}$$

Que peut-on dire alors des plans AB′C′, BC′A′, CA′B′?

b) On suppose $s \neq 0$. Soit S le point commun aux plans A′BC, B′CA, C′AB; S′ le point commun aux plans AB′C′, BC′A′, CA′B′. Démontrer que la droite SS′ est parallèle aux droites AA′, BB′, CC′, et qu'elle rencontre les plans ABC, A′B′C′ aux points T et T′ tels que

$$\overline{TS} = \overline{SS'} = \overline{S'T'} \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{\overline{TT'}} = \frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}}$$

25. — On donne deux droites non sécantes D et D′; par un point M de l'espace, il passe une droite G s'appuyant sur D et sur D′ en des points P et P′; soit M′ le point défini par (M, M′, P, P′) = — 1; lieu de M′ lorsque M décrit une droite ou un plan.

26. — On donne trois points O, A, B dans l'espace; trouver le lieu géométrique des points M tels que la droite OM soit équidistante des points A et B.

27. — On donne un tétraèdre ABCD. Sur les axes $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, on marque les points P, Q, R, P′, Q′, R′ déterminés par :

$$\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \lambda \qquad \overline{AP'} = \overline{BQ'} = \overline{CR'} = -\lambda.$$

a) Démontrer que, lorsque λ varie, le point M commun aux plans PBC, QCA, RAB décrit une droite Δ passant par le centre U du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

Soit M′ le point commun aux plans P′BC, Q′CA, R′AB : démontrer que les points M et M′ restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes.

b) La droite Δ coupe les plans des faces du tétraèdre en A_1, B_1, C_1, D_1. Démontrer que

$$\frac{1}{\overline{UD_1}} = \frac{1}{\overline{UA_1}} + \frac{1}{\overline{UB_1}} + \frac{1}{\overline{UC_1}}$$

28. — On donne, dans l'espace, trois droites X, Y, Z, non situées dans un même plan, et concourantes en un point O; sur X deux points A et A′, sur Y deux points B et B′, sur Z deux points C et C′. Soit S le point commun aux plans A′BC, B′CA, C′AB, et soit S′ le point commun aux plans AB′C′, BC′A′, CA′B′.

a) Démontrer que les points O, S, S′ sont alignés.

b) La droite OSS′ rencontre le plan ABC en T et le plan A′B′C′ en T′; démontrer que

$$(O, S, T, T') = (O, S', T', T) = -2.$$

c) Démontrer qu'il existe un point I conjugué harmonique de O par rapport à la fois à S et S′ et à T et T′.

29. — Soit S un point situé hors du plan d'un triangle ABC. Un plan parallèle au plan de ce triangle rencontre les droites SA, SB, SC en A′, B′, C′. Vérifier que, α, β, γ étant les milieux des côtés BC, CA, AB, les droites A′α, B′β, C′γ sont concourantes ou parallèles.

30. — Équation du plan symétrique du plan d'équation

$$x - y + 2z - 1 = 0$$

par rapport à la droite Δ

$$x = z + 2, \qquad y = -z + 1$$

(repère orthonormé).

31. — Soit $Oxyz$ un repère orthonormé. Le plan P d'équation $ux + vy + wz = 0$ ($uvw \neq 0$) coupe les plans yOz, zOx, xOy suivant les droites A, B, C respectivement.

a) Démontrer qu'il existe un second repère orthonormé $Ox_1y_1z_1$ dont les plans y_1Oz_1, z_1Ox_1, x_1Oy_1 passent respectivement par les droites A,B,C. Déterminer, par leurs cosinus directeurs, les droites Ox_1, Oy_1, Oz_1.

b) Démontrer que les plans xOx_1, yOy_1, zOz_1 ont une droite commune Δ perpendiculaire au plan P, et que les deux repères $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ sont symétriques par rapport à Δ.

Représenter la figure obtenue en coupant les deux trièdres par un plan parallèle à P.

32. — On donne un repère orthonormé T (Ox, Oy, Oz) et trois angles α, β, γ. La rotation $\mathcal{R}\,[Ox, \alpha]$ transforme T en le trièdre T_1 (Ox_1, Oy_1, Oz_1). La rotation $\mathcal{R}\,[Oy_1, \beta]$ transforme T_1 en T_2 (Ox_2, Oy_2, Oz_2). La rotation $\mathcal{R}\,[Oz_2, \gamma]$ transforme T_2 en T′ (Ox', Oy', Oz'). Former la matrice de la rotation qui transforme T en T′. Déterminer l'angle et l'axe de cette rotation.

33. — a, b, c sont trois nombres réels. Pour que $\Omega = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ soit une matrice de rotation, il faut et il suffit que (a, b, c) soient les racines de l'équation : $t^3 - t^2 + k = 0$, k étant un nombre réel vérifiant l'inégalité $0 < k < \frac{4}{27}$

Posons $k = \frac{4}{27}\sin^2\varphi$. Déterminer explicitement les matrices Ω correspondantes, ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

34. — Trouver l'axe et l'angle de la rotation déterminée par la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

CHAPITRE XIV

VECTEURS GLISSANTS

I. MOMENTS

173. ***Notion de vecteur glissant.*** — 1° **Rappels.** — *a*) Dans tout ce chapitre, l'espace étudié sera celui de la géométrie élémentaire, considéré comme un modèle d'espace affine euclidien réel orienté de dimension trois; nous y disposons des notions de produit scalaire, de produit vectoriel, et de produit mixte.

Les repères utilisés seront orthonormés, et auront même orientation que le trièdre de référence (repères positifs).

b) Les vecteurs liés — ou segments orientés — (I, n° 57) ou bipoints (III, n° 48, 4°) seront notés $[\overrightarrow{AB}]$.

La classe d'équivalence des vecteurs liés équipollents à $[\overrightarrow{AB}]$ est appelée vecteur libre et notée $\overrightarrow{AB}$ (I, n° 58 et III, n° 48, 4°).

2° **Vecteur glissant.** — Dans l'ensemble des vecteurs liés non nuls, la relation $\mathfrak{R}$ « $[\overrightarrow{AB}]$ est équipollent à $[\overrightarrow{CD}]$ et a même support » est une relation d'équivalence.

Toute classe d'équivalence modulo $\mathfrak{R}$ est appelée un *vecteur glissant*, ou un *glisseur*.

En d'autres termes, un glisseur est *l'ensemble des vecteurs liés de même support, équipollents à l'un d'entre eux.* Si $[\overrightarrow{AB}]$ est un représentant d'un glisseur, nous noterons ce glisseur par

$$\text{glisseur } \overrightarrow{AB} \qquad \text{ou} \qquad (\overrightarrow{AB}).$$

Un glisseur est déterminé par l'association d'un vecteur libre $\vec{u}$ non nul et d'une droite D ayant la direction de $\vec{u}$; si A est un point de D, le vecteur lié $[\overrightarrow{AB}]$ représentant de $\vec{u}$ est porté par D, c'est aussi un représentant du glisseur que nous noterons alors $(D, \vec{u})$. On peut encore noter le glisseur précédent par le symbole $(A, \vec{u})$.

Le vecteur libre $\vec{u}$ est dit *vecteur libre du glisseur*, ou même simplement, *vecteur du glisseur.*

En cas de besoin, on pourra aussi représenter un glisseur par une seule lettre, $\mathcal{V}$ par exemple.

Remarque. — Pour éviter certains cas d'exception dans des énoncés, il sera commode de considérer le glisseur nul de support donné D; nous le représenterons par la notation $(\mathrm{D}, \vec{0})$.

Mais, sauf indication expresse du contraire, tous les glisseurs que nous considérerons seront non nuls.

3° **Produit d'un glisseur par un nombre réel.** — *a*) Soit le glisseur $\mathcal{V} = (\mathrm{D}, \vec{u})$, et le nombre réel $\lambda \neq 0$.

On appelle produit de $\mathcal{V}$ par le nombre λ non nul, et on note $\lambda\mathcal{V}$, le glisseur $(\mathrm{D}, \lambda\vec{u})$. Autrement dit, les deux glisseurs $\mathcal{V}$ et $\lambda\mathcal{V}$ ont le même support; le vecteur libre du second est le produit par λ du vecteur libre du premier.

b) En particulier, si $\lambda = -1$, le glisseur obtenu $(\mathrm{D}, -\vec{u})$ est appelé l'opposé du glisseur $(\mathrm{D}, \vec{u})$: *deux glisseurs opposés sont deux glisseurs de même support, dont les vecteurs libres sont opposés.*

174. ***Moment d'un vecteur glissant en un point.*** — 1° Théorème et Définition. — **Étant donné le glisseur $(\overrightarrow{AB})$ et un point O, le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$ est indépendant du représentant $[\overrightarrow{AB}]$ adopté pour déterminer le glisseur; le vecteur lié, d'origine O, représentant de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$, est appelé moment du glisseur en O.**

Soit Δ le support du glisseur, et considérons un autre représentant $[\overrightarrow{A'B'}]$ du glisseur (fig. 41) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{A'B'} &= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'}\right) \wedge \overrightarrow{A'B'} \\ &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{A'B'}.\end{aligned}$$

Fig. 41.

Or $\quad \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$

et $\quad \overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{A'B'} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{A'B'}$;

le théorème est ainsi démontré.

2° **Notation.** — Soit $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$; le vecteur lié $[\overrightarrow{OG}]$, moment du glisseur $\overrightarrow{AB}$ en O, se note

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}'_0 (\overrightarrow{AB})$$

ou encore, si aucune confusion n'est à craindre, $\overrightarrow{\mathcal{G}_0}$.

Si la lettre $\mathcal{V}$ désigne un glisseur, ou écrira aussi $\overrightarrow{\mathcal{M}}'_0 (\mathcal{V})$.

3° **Propriétés du moment.** — *a) Nullité.* — Le moment $\overrightarrow{\mathcal{G}_0} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$ est nul si, et seulement si,

ou bien $\quad \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

ou bien, si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OA}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire O est sur le support du glisseur.

Le moment d'un glisseur en un point n'est nul que si le glisseur est nul, ou si son support passe par le point.

b) Direction et sens. — Supposons $\overrightarrow{OG} \neq \vec{0}$. Ce vecteur est perpendiculaire au plan OAB déterminé par le point O et le support du glisseur.

D'autre part, menons $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{AB}$; par définition le trièdre O (GAS) est positif, ce qui détermine le sens de $\overrightarrow{OG}$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. — Les lecteurs qui suivent les programmes A1 et A2 peuvent utiliser les notions de droite et de gauche, et déterminer le sens du moment $[\overrightarrow{OG}]$, sans faire intervenir le vecteur $\overrightarrow{OS}$, de la façon suivante : pour l'observateur qui a les pieds en O, la tête en G, et qui regarde l'origine A du représentant du glisseur $(\overrightarrow{AB})$, l'extrémité B est à gauche ou à droite suivant que le trièdre de référence est direct ou inverse.

En remarquant que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OG}$, on constate de même que pour l'observateur qui a les pieds en A, la tête en B, et qui regarde O, G est à gauche ou à droite suivant que le trièdre de référence est direct ou inverse.

c) Module. — Le module de $\overrightarrow{OG}$ est

$$\|\overrightarrow{OG}\| = OA \times AB \times \sin \widehat{OAB};$$

le produit $OA \times \sin \widehat{OAB}$ est la distance OH de O au support Δ du glisseur. Finalement

$$\|\overrightarrow{OG}\| = AB \times OH$$

c'est-à-dire le produit de la mesure du vecteur libre du glisseur par la distance du point O au support du glisseur.

On pourrait présenter ici, sur le point de vue du physicien, des remarques analogues à celles du n° 130.

d) Produit par un scalaire. — Soit $[\overrightarrow{AB}]$ un représentant du glisseur $\mathcal{V} = (\Delta, \vec{u})$; on peut adopter $[\overrightarrow{AB'}] = \lambda \overrightarrow{AB}$ comme représentant du glisseur $\lambda \mathcal{V} = (\Delta, \lambda \vec{u})$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}'_0}(\lambda \mathcal{V}) = \overrightarrow{OA} \wedge (\lambda \overrightarrow{AB}) = \lambda (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}).$$

Finalement,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}'_0}(\lambda \mathcal{V}) = \lambda \overrightarrow{\mathcal{M}'_0}(\mathcal{V}).$$

4° **Changement de l'origine du moment.** — *a)* Soit O et O′ deux points distincts;

$$\vec{\mathcal{G}}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}; \qquad \vec{\mathcal{G}}_{O'} = \overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{AB}$$
$$\vec{\mathcal{G}}_{O'} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}) \wedge \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Finalement, en désignant par $\vec{V}$ le vecteur libre du glisseur,

$$\vec{\mathcal{G}}_{O'} = \vec{\mathcal{G}}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V}.$$

b) COROLLAIRE. — Les moments d'un glisseur en deux points O et O′ distincts sont équipollents si, et seulement si

$$\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

c'est-à-dire, puisque $\vec{V}$ n'est pas nul, si $\overrightarrow{OO'}$ est colinéaire à $\vec{V}$: les moments $\vec{\mathcal{G}}_O$ et $\vec{\mathcal{G}}_{O'}$ d'un glisseur sont équipollents si, et seulement si, la droite OO′ est parallèle au support du glisseur.

5° **Coordonnées du moment en un point.** — Rapportons l'espace au repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ orthonormé positif. Définissons le glisseur $\mathcal{V}$ par son vecteur libre $\vec{V}$, de coordonnées X, Y, Z, et par un point de son support, $A(x_0, y_0, z_0)$; le moment en un point $P(x, y, z)$ est

$$\vec{\mathcal{G}}_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V};$$

ses coordonnées L_P, M_P, N_P sont les cofacteurs de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_0 - x & X & \vec{i} \\ y_0 - y & Y & \vec{j} \\ z_0 - z & Z & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} L_P = (y_0 - y)Z - (z_0 - z)Y \\ M_P = (z_0 - z)X - (x_0 - x)Z \\ N_P = (x_0 - x)Y - (y_0 - y)X \end{cases}$$

En particulier le moment en O, $\vec{\mathcal{G}}_O$ est donné par

$$\begin{cases} L_O = y_0 Z - z_0 Y \\ M_O = z_0 X - x_0 Z \\ N_O = x_0 Y - y_0 X. \end{cases}$$

Connaissant $\vec{\mathcal{G}}_O$, $\vec{\mathcal{G}}_P$ s'obtient par les formules

$$\begin{cases} L_P = L_O - (yZ - zY) \\ M_P = M_O - (zX - xZ) \\ N_P = N_O - (xY - yX) \end{cases}$$

qui traduisent le résultat du 4°

$$\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{V}.$$

175. ***Détermination d'un vecteur glissant par son vecteur libre et le moment en un point*** — On donne un vecteur libre $\vec{V} \neq \vec{0}$, et un vecteur lié $[\overrightarrow{OG}]$, d'origine O. Existe-t-il une droite Δ, parallèle à $\vec{V}$ telle que le glisseur $\mathcal{V} = (\Delta, \vec{V})$ admette $[\overrightarrow{OG}]$ pour moment en O?

1° **Cas particulier.** $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$. — Il existe alors une solution et une seule : Δ est la parallèle à $\vec{V}$ menée par le point O.

2° **Cas général** : $\overrightarrow{OG} \neq \vec{0}$. — *a*) *Première méthode.* — Procédons par analyse et synthèse.

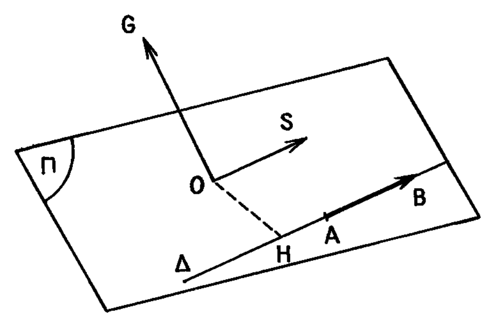


FIG. 42.

Analyse. — Supposons que $\mathcal{V}$ existe, et soit $\overrightarrow{AB}$ un de ses représentants (fig. 42) :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Cette égalité entraîne l'orthogonalité de $\overrightarrow{OG}$ et de $\vec{V}$,

$$\text{soit } \overrightarrow{OG} . \vec{V} = 0;$$

si donc $\overrightarrow{OG} . \vec{V} \neq 0$, le problème est impossible.

La droite AB est située dans le plan Π perpendiculaire en O à $\overrightarrow{OG}$; si l'on construit $\overrightarrow{OS} = \vec{V}$, la droite AB est parallèle à la droite OS. Si H désigne la projection orthogonale de O sur la droite AB,

d'une part $\quad \|\overrightarrow{OG}\| = OH \times OS,$

d'autre part le trièdre $\quad (\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ est positif.

Synthèse. — Supposons $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{V} = 0$. Le plan Π perpendiculaire en O à $\overrightarrow{OG}$ contient alors le vecteur $[\overrightarrow{OS}] = \overrightarrow{V}$. Il existe dans Π deux droites parallèles à OS, dont la distance à OS est le quotient

$$\frac{\|\overrightarrow{OG}\|}{OS}.$$

Si H_1 et H_2 sont les projections de O sur ces droites, $\overrightarrow{OH_2} = -\overrightarrow{OH_1}$; il en résulte que, des deux trièdres $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH_1})$ et $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH_2})$ un, et un seul, est positif. Il existe donc une, et une seule, droite, soit Δ, sur laquelle on peut placer un glisseur ayant $\overrightarrow{V}$ pour vecteur libre, tel que

$$\overrightarrow{\mathcal{M}'_0}(\Delta, \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{OG}.$$

Le problème posé admet donc une solution et une seule.

b) Deuxième méthode. — Nous connaissons $\overrightarrow{V}$ et le vecteur lié $[\overrightarrow{OG}]$. Un point A du support Δ d'un glisseur qui répond éventuellement à la question est défini par

$$(1) \qquad \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{OG}.$$

Trouver $\overrightarrow{OA}$, connaissant $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{V}$ est un problème de division vectorielle, examiné au n° 127.

Sous réserve de la condition $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{OG} = 0$, le problème admet pour solutions tous les vecteurs

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{V}\|^2} + \lambda\overrightarrow{V} \qquad (\lambda \in R)$$

Le point H déterminé par $\overrightarrow{OH} = \dfrac{\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{V}\|^2}$ est tel que le trièdre OSGH soit un trièdre trirectangle positif; la droite Δ est la parallèle à OS menée par H; le glisseur $(\Delta, \overrightarrow{V})$ répond à la question, et c'est le seul.

En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donné un vecteur libre $\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$, un point O et un vecteur lié $[\overrightarrow{OG}]$ d'origine O tel que $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{OG} = 0$, il existe un glisseur et un seul dont le vecteur libre soit $\overrightarrow{V}$, et dont le moment en O soit $[\overrightarrow{OG}]$.**

Les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $[\overrightarrow{OG}]$ sont appelés les coordonnées vectorielles en O du glisseur.

3° **Coordonnées scalaires d'un glisseur.** — Soit $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère orthonormé d'origine O; les vecteurs précédents $\vec{V}$ et $[\overrightarrow{OG}]$ peuvent être déterminés par leurs coordonnées

$$\vec{V}\begin{cases}X\\Y\\Z\end{cases} \quad \overrightarrow{OG}\begin{cases}L\\M\\N\end{cases} \quad \begin{matrix}\text{avec la condition}\\ LX + MY + NZ = 0\end{matrix} \qquad (2)$$

Les six nombres (X, Y, Z, L, M, N), liés par la relation (2), qui déterminent sans ambiguïté un glisseur $\mathcal{V}$ sont appelés *coordonnées scalaires* de $\mathcal{V}$.

Un point $A(x, y, z)$ du support du glisseur a des coordonnées qui satisfont au système

$$(3) \qquad \begin{cases}L = yZ - zY\\ M = zX - xZ\\ N = xY - yX\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}0 & Z & -Y\\ -Z & 0 & X\\ Y & -X & 0\end{bmatrix} = \mu$$

La matrice μ du système (3) est de rang 2, si l'une au moins des coordonnées de $\vec{V}$ n'est pas nulle, ce qui résulte de l'hypothèse $\vec{V} \neq \vec{0}$.

La condition (2) exprime que le caractéristique associé à l'équation non principale est nul; moyennant cette condition, la solution générale de (3) s'obtient en ajoutant à une solution particulière (x_1, y_1, z_1) de (3), la solution générale $(\rho X, \rho Y, \rho Z)$ du système homogène associé :

$$x = x_1 + \rho X, \qquad y = y_1 + \rho Y, \qquad z = z_1 + \rho Z;$$

on obtient ainsi les points d'une droite Δ, parallèle à $\vec{V}$, support du glisseur dont on s'était donné les coordonnées.

Remarque. — Si le glisseur $\mathcal{V}$ a pour coordonnées (X, Y, Z, L, M, N), avec $LX + MY + NZ = 0$, le glisseur $\lambda\mathcal{V}$ a pour coordonnées

$$(\lambda X, \ \lambda Y, \ \lambda Z, \ \lambda L, \ \lambda M, \ \lambda N).$$

4° **Application aux coordonnées de Plücker d'une droite.** — Nous avons défini au n° 154, 4°, les coordonnées de Plücker d'une droite D de l'espace; ce sont six nombres a, b, c, l, m, n tels que D soit représentée par les équations compatibles

$$(4) \qquad \begin{cases}cy - bz = l\\ az - cx = m\\ bx - ay = n.\end{cases} \qquad al + bm + cn = 0$$

Si le repère est orthonormé, les égalités (4) expriment que le vecteur $\overrightarrow{OG}\,(l, m, n)$ est le moment en O du glisseur $(D, \vec{u})$, $\vec{u}$ étant le vecteur libre de coordonnées a, b, c.

Les coordonnées de Plücker d'une droite D, dans un repère orthonormé, sont les coordonnées scalaires d'un glisseur quelconque ayant D pour support.

176. ***Comoment de deux vecteurs glissants.*** — On donne deux vecteurs glissants $\mathcal{V} = (\Delta, \vec{V})$, $\mathcal{V}' = (\Delta', \vec{V}')$, dont les moments en un point M quelconque de l'espace sont respectivement désignés par $\vec{\mathcal{G}}_M$ et $\vec{\mathcal{G}}'_M$.

1° <u>THÉORÈME ET DÉFINITION.</u> — **Quels que soient P sur Δ et P′ sur Δ′, les produits scalaires $\vec{V}.\vec{\mathcal{G}}'_P$ et $\vec{V}'.\vec{\mathcal{G}}_{P'}$ ont une valeur commune, indépendante du choix de P et P′; cette valeur commune est appelée comoment des glisseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ et désignée par le symbole $\mathcal{M}t(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$.**

En effet
$$\vec{V}.\vec{\mathcal{G}}'_P = \vec{V}.\left(\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{V}'\right) \quad \text{ou} \quad \left(\vec{V}, \overrightarrow{PP'}, \vec{V}'\right) \qquad (1)$$
$$\vec{V}'.\vec{\mathcal{G}}_{P'} = \vec{V}'.\left(\overrightarrow{P'P} \wedge \vec{V}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\vec{V}', \overrightarrow{P'P}, \vec{V}\right) \qquad (2)$$

Étant donné qu'un produit mixte est changé en son opposé quand on transpose les vecteurs extrêmes, et aussi quand on remplace le vecteur moyen par son opposé, on a

$$\left(\vec{V}, \overrightarrow{PP'}, \vec{V}'\right) = -\left(\vec{V}', \overrightarrow{PP'}, \vec{V}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\vec{V}', \overrightarrow{P'P}, \vec{V}\right).$$

L'égalité de $\vec{V}.\vec{\mathcal{G}}'_P$ et $\vec{V}'.\vec{\mathcal{G}}_{P'}$ en résulte.

Lorsque, P étant fixe sur Δ, P′ varie sur Δ′, $\vec{\mathcal{G}}'_P$ est fixe, puisqu'il s'agit du moment en P du glisseur $\left(\Delta', \vec{V}'\right)$; de même $\vec{\mathcal{G}}_{P'}$ est fixe quand, P′ étant fixe sur Δ,′ P varie sur Δ.

La valeur commune des produits mixtes (1) et (2) ne dépend donc pas du choix de P sur Δ, de P′ sur Δ′; elle ne dépend pas non plus de l'ordre dans lequel on considère les deux glisseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$.

2° **Nullité.** — Le produit mixte $\left(\vec{V}, \overrightarrow{PP'}, \vec{V}'\right)$ est nul si, et seulement si, les trois vecteurs forment un système lié. $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ n'étant pas nuls par hypothèse, cela se produit :
ou bien si Δ et Δ′ sont parallèles,
ou bien si, Δ et Δ′ n'étant pas parallèles, les droites Δ, PP′ et Δ′ sont dans un même plan.

En résumé, pour des glisseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ non nuls,

$\mathcal{M}t(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = 0 \iff$ les supports Δ et Δ′ sont dans un même plan.

3° **Autre expression du comoment.** — Introduisons les moments des deux glisseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ en un même point O, arbitraire.

$$\vec{\mathcal{G}}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}; \qquad \vec{\mathcal{G}}'_O = \overrightarrow{OP'} \wedge \vec{V}'$$
$$\begin{aligned} \mathcal{M}t(\mathcal{V}, \mathcal{V}') &= \vec{V}'.\left(\overrightarrow{P'P} \wedge \vec{V}\right) \\ &= \vec{V}'.\left[\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}\right) \wedge \vec{V}\right] \\ &= \vec{V}'.\left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}\right) - \vec{V}'.\left(\overrightarrow{OP'} \wedge \vec{V}\right). \end{aligned}$$

Le premier produit mixte du second membre est $\vec{V}'.\vec{\mathcal{G}}_O$; dans le second produit mixte, intervertissons les termes extrêmes, nous obtenons $\vec{V}.\left(\overrightarrow{OP'} \wedge \vec{V}'\right)$, c'est-à-dire $\vec{V}.\vec{\mathcal{G}}'_O$, et nous faisons ainsi disparaître le signe — qui le précède.

En définitive

$$\mathcal{M}^t(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = \vec{V}.\vec{\mathcal{G}}'_0 + \vec{V}'.\vec{\mathcal{G}}_0. \tag{3}$$

4° **Expression analytique.** — On donne un repère orthonormé, dans lequel les glisseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ ont pour coordonnées

$$\mathcal{V} : X, Y, Z, L, M, N \quad (LX + MY + NZ = 0)$$
$$\mathcal{V}' : X', Y', Z', L', M', N' \quad (L'X' + M'Y' + N'Z' = 0)$$

En supposant que, dans la formule (3), O est l'origine du repère,

$\vec{\mathcal{G}}_0$ a pour coordonnées L, M, N

$\vec{\mathcal{G}}'_0$ a pour coordonnées L', M', N'

et finalement

$$(4) \qquad \mathcal{M}^t(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = L'X + M'Y + N'Z + LX' + MY' + NZ'.$$

REMARQUE I. — En considérant l'expression $2(LX + MY + NZ)$ comme un polynôme quadratique des variables X, Y, Z, L, M, N, l'expression (4) est celle de la valeur que la forme bilinéaire associée fait correspondre au couple $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$.

REMARQUE II. — Si deux droites D et D' sont déterminées par leurs coordonnées de Plücker (n° 175)

$$D(a, b, c, l, m, n) \qquad D'(a', b', c', l', m', n'),$$

elles sont situées dans un même plan si, et seulement si,

$$al' + bm' + cn' + a'l + b'm + c'n = 0.$$

5° DÉFINITION. — **Étant donnés deux glisseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ non coplanaires, on dit qu'ils ont la disposition positive ou négative suivant que leur comoment est positif ou négatif.**

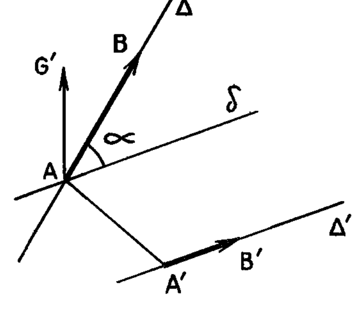


FIG. 43.

Soient A et A' les pieds sur Δ et Δ' de la perpendiculaire commune aux deux supports (fig. 43); soit $\vec{AB} = \vec{V}$, $\vec{A'B'} = \vec{V}'$; on sait que

$$\mathcal{M}^t(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = (\vec{V}, \vec{AA'}, \vec{V}').$$

Construisons

$$\vec{AG'} = \vec{AA'} \wedge \vec{V}'.$$

On a $\quad \mathcal{M}^t(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = \vec{AB}.\vec{AG'}.$

Les deux glisseurs présentent la position positive (resp. négative) si $[\vec{AB}]$ et $[\vec{AG'}]$ sont dans un même demi-espace (resp. dans deux demi-espaces différents) par rapport au plan déterminé par A et Δ'.

Un vecteur glissant $(\overrightarrow{AB})$ et son moment $[\overrightarrow{OG}]$ en un point O présentent la disposition positive, car

$$\mathcal{M}'(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OG}.(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OG})^2.$$

Interprétation géométrique. — Les lecteurs qui suivent les programmes A1 et A2 constateront, en appliquant le résultat obtenu au n° 174, 3°, que les glisseurs $(\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{A'B'})$ présentent la disposition positive si l'observateur qui a les pieds en A' (resp. en A), la tête en B' (resp. en B) et qui regarde A (resp. A') voit le point B (resp. B') à sa gauche ou à sa droite selon que le trièdre de référence est direct ou inverse.

6° **Expressions diverses du comoment.** — *a*) Avec les notations du 5°, le comoment $\mathcal{M}$ a pour valeur absolue

$$|\mathcal{M}| = AB \times AG' \times |\cos \widehat{G'AB}|$$

or

$$AG' = AA' \times A'B';$$

$$|\cos \widehat{G'AB}| = \sin \widehat{BAB'} \quad \text{ou} \quad \sin\alpha$$

en appelant α l'angle algu des supports Δ et Δ'.

Désignons par V, V', les modules des vecteurs glissants, par l la plus courte distance des deux supports; nous aurons

$$\mathcal{M} = \varepsilon VV' l \sin\alpha,$$

ε étant $+1$ ou -1 suivant que les glisseurs présentent la disposition positive ou négative

b) Supposons que les glisseurs soient représentés par les vecteurs liés $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{P'Q'}$ (fig. 44). La mesure du moment $\overrightarrow{PG'}$ de $(\overrightarrow{P'Q'})$ en P est l'aire du parallélogramme construit sur PP' et P'Q'. La valeur absolue du produit scalaire $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PG'}$ est le produit de PG' par la projection de PQ sur la direction PG', c'est-à-dire la distance du point Q au plan PP'Q'.

En définitive la valeur absolue du comoment de $(\overrightarrow{PQ})$ et $(\overrightarrow{P'Q'})$ est le volume du parallélipipède qui a pour arêtes PQ, PP', P'Q'; c'est aussi six fois le volume du tétraèdre qui a pour arêtes les segments PQ et P'Q'.

On peut s'assurer directement que ces volumes sont invariants quand on fait glisser les segments PQ et P'Q' sur leurs supports Δ et Δ'.

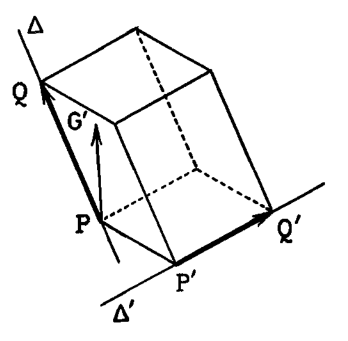


Fig. 44.

177. ***Moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe.*** — 1° Soit $\vec{D}$ un axe sur lequel on a choisi un vecteur unitaire $\vec{u}$; nous appellerons glisseur unitaire de $\vec{D}$ le glisseur $(D, \vec{u})$ dont le vecteur libre est le vecteur unitaire de l'axe.

2° Définition. — **On appelle moment d'un glisseur par rapport à un axe le comoment du glisseur donné, et du glisseur unitaire de l'axe.**

Si $\mathcal{V}$ est le glisseur donné, ce moment se note $\mathcal{M}'_{\vec{D}}(\mathcal{V})$.

3° Si Ω désigne un point de D, P un point du support Δ de $\mathcal{V}$, $[\overrightarrow{PQ}]$ un représentant de $\mathcal{V}$ (fig. 45),

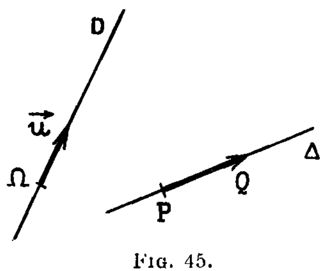


Fig. 45.

$$\mathcal{M}^{\prime}_{\overrightarrow{D}}(\mathcal{V}) = \left(\vec{u},\ \overrightarrow{\Omega P},\ \overrightarrow{PQ}\right)$$
$$= \vec{u}\,.\,\vec{\mathcal{G}}_{\Omega}$$

Sous cette forme, on constate que $\mathcal{M}^{\prime}_{\overrightarrow{D}}$ est la mesure algébrique de la projection orthogonale sur $\overrightarrow{D}$ du moment de $\mathcal{V}$ par rapport à un point Ω quelconque de l'axe D.

Remarque. — Ce résultat se retrouve directement en observant que si Ω' est un autre point de l'axe D,

$$\vec{\mathcal{G}}_{\Omega'} = \vec{\mathcal{G}}_{\Omega} + \overrightarrow{\Omega'\Omega} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

et
$$\vec{u}\,.\,\vec{\mathcal{G}}_{\Omega'} = \vec{u}\,.\,\vec{\mathcal{G}}_{\Omega}$$

car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega'\Omega}$ sont colinéaires.

On peut traduire encore ce résultat en disant que la projection orthogonale sur la droite D du moment du glisseur $\mathcal{V}$ en un point quelconque de D est un vecteur qui reste équipollent à lui-même, ce vecteur s'appelle le moment (vectoriel) de $\mathcal{V}$ sur la droite D; on le note

$$\overrightarrow{\mathcal{M}^{\prime}_{D}}(\mathcal{V}).$$

4° **Nullité du moment par rapport à l'axe $\overrightarrow{D}$.** — D'après l'étude du n° **176**, 2°, $\mathcal{M}^{\prime}_{\overrightarrow{D}}(\mathcal{V})$ est nul si, et seulement si

ou bien $\mathcal{V}$ est nul

ou bien le support Δ de $\mathcal{V}$ est coplanaire avec l'axe $\overrightarrow{D}$.

5° **Expression analytique.** — Soit α, β, γ, λ, μ, ν les coordonnées scalaires du glisseur unitaire de l'axe $\overrightarrow{D}$; X, Y, Z, L, M, N les coordonnées scalaires du glisseur donné $\mathcal{V}$; le résultat du n° **176**, 4° permet d'écrire

$$\mathcal{M}^{\prime}_{\overrightarrow{D}}(\mathcal{V}) = L\,\alpha + M\,\beta + N\,\gamma + X\,\lambda + Y\,\mu + Z\,\nu.$$

Rappelons
$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$$
$$LX + MY + NZ = 0;$$

en outre
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Insistons sur le fait que le moment d'un glisseur en un point est un vecteur; au contraire, le moment d'un glisseur par rapport à un axe est un nombre réel.

Remarque. — Les nombres L, M, N coordonnées de $\vec{\mathcal{G}}_{O}$ sont aussi les moments du glisseur $\mathcal{V}$ par rapport aux axes Ox, Oy, Oz du repère.

6° **Expressions diverses du moment d'un glisseur par rapport à un axe.** — *a*) Soit Π le plan perpendiculaire à l'axe $\vec{D}$ au point Ω; projetons orthogonalement en $\overrightarrow{P'Q'}$ sur Π un représentant $\overrightarrow{PQ}$ du glisseur $\mathcal{V}$; on peut décomposer $\overrightarrow{PQ}$ en deux vecteurs $\overrightarrow{PQ_1}$ orthogonal à D $\left(\overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{P'Q'}\right)$, $\overrightarrow{PQ_2}$ parallèle à D (fig. 46).

$$\mathcal{M}^{t}_{\vec{D}}(\mathcal{V}) = \left(\vec{u},\ \overrightarrow{\Omega P},\ \overrightarrow{PQ}\right)$$
$$= \left(\vec{u},\ \overrightarrow{\Omega P'} + \overrightarrow{P'P},\ \overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{PQ_2}\right).$$

Comme $\overrightarrow{P'P}$ et $\overrightarrow{PQ_2}$ sont colinéaires à $\vec{u}$, il reste simplement

$$\mathcal{M}^{t}_{\vec{D}}(\mathcal{V}) = \left(\vec{u},\ \overrightarrow{\Omega P'},\ \overrightarrow{P'Q'}\right);$$
$$= \vec{u}.\left(\overrightarrow{\Omega P'} \wedge \overrightarrow{P'Q'}\right).$$

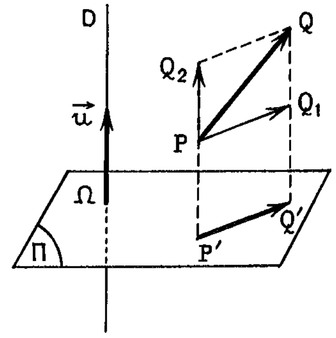


Fig. 46.

Le produit vectoriel envisagé est colinéaire à $\vec{u}$; c'est le moment en Ω de la projection orthogonale $\overrightarrow{P'Q'}$ de $\overrightarrow{PQ}$ sur le plan Π; en convenant que $\overrightarrow{P'Q'}$ est le représentant d'un glisseur $\mathcal{V}'$, appelé projection orthogonale du glisseur $\mathcal{V}$ sur le plan Π, nous pouvons énoncer : Le moment d'un glisseur par rapport à un axe est la mesure algébrique sur cet axe du moment de la projection orthogonale de ce glisseur sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport au pied de l'axe sur ce plan.

b) Le résultat du n° **176, 6°** montre que

$$\left|\mathcal{M}^{t}_{\vec{D}}(\mathcal{V})\right| = V\, l \sin \alpha,$$

V étant le module du vecteur libre du glisseur, l la plus courte distance de l'axe et du support du glisseur, α l'angle aigu de l'axe et du support.

II. TORSEURS

178. ***Système de vecteurs glissants.*** — 1° **Somme et moment en un point.** — Soit $\mathcal{V}_i = \left(\Delta_i, \vec{V}_i\right) (i = 1, 2, \ldots n)$ des glisseurs; nous appellerons système de glisseurs et nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n\}$.

<u>Définition I.</u> — **On appelle somme du système $\mathcal{S}$ le vecteur libre somme des vecteurs libres des divers glisseurs de $\mathcal{S}$.**

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{V}_1 + \ldots + \vec{V}_n.$$

<u>Définition II.</u> — **On appelle moment en O du système $\mathcal{S}$ le vecteur lié d'origine O, somme des moments en O des divers glisseurs de $\mathcal{S}$.**

Si $\left(\vec{\mathcal{G}}_i\right)_0$ désigne le moment en O de $\mathcal{V}_i$, le moment en O de $\mathcal{S}$, noté $\vec{\mathcal{G}}_0$ est donné par

$$\vec{\mathcal{G}}_0 = \left(\vec{\mathcal{G}}_1\right)_0 + \ldots + \left(\vec{\mathcal{G}}_n\right)_0$$

$\vec{\mathcal{G}}_0$ est dit encore parfois « moment résultant » en O.

On peut aussi utiliser la notation

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathcal{M}}_O(\mathcal{V}_i).$$

Les vecteurs $\vec{OS} = \vec{\mathcal{S}}$ et $[\vec{OG}] = \vec{\mathcal{G}}_O$ sont dits *éléments de réduction* en O du système $\mathcal{S}$.

2° **Comparaison des moments en deux points.** — Soit O et O′ deux points distincts; nous savons que

$$(\vec{\mathcal{G}}_i)_{O'} = (\vec{\mathcal{G}}_i)_O + \vec{O'O} \wedge \vec{V}_i.$$

Faisons la somme membre à membre de toutes les égalités analogues pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nous obtenons

$$\vec{\mathcal{G}}_{O'} = \vec{\mathcal{G}}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{\mathcal{S}}. \qquad (1)$$

3° **Systèmes de glisseurs équivalents.** — La formule (1), fort importante permet d'énoncer :

Théorème et définition. — **Si deux systèmes de glisseurs ont mêmes éléments de réduction en un point O, ils ont mêmes éléments de réduction en tout autre point de l'espace. Deux tels systèmes de glisseurs sont dits équivalents.**

Soit en effet $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{G}}_O$ les éléments de réduction en O du système $\mathcal{S}$ de glisseurs; $\vec{\mathcal{S}}'$ et $\vec{\mathcal{G}}'_O$ les éléments de réduction en O du système $\mathcal{S}'$.

L'égalité $\vec{\mathcal{S}}' = \vec{\mathcal{S}}$ est indépendante du choix de O.

L'égalité $\vec{\mathcal{G}}'_O = \vec{\mathcal{G}}_O$ entraîne alors

$$\vec{\mathcal{G}}'_{O'} = \vec{\mathcal{G}}_{O'}$$

d'après la formule (1).

179. *Torseurs.* — 1° **Définition.** — Dire que deux systèmes de glisseurs sont équivalents établit entre eux une relation $\mathfrak{R}$ réflexive, symétrique et transitive, qui est donc une relation d'équivalence dans l'ensemble Σ des systèmes de glisseurs.

Toute classe d'équivalence, élément de l'ensemble quotient $\Sigma/\mathfrak{R}$ est appelée torseur (1).

(1) Le mot « torseur » était employé autrefois comme synonyme de système de vecteurs glissants; cet abus de langage se trouve encore dans certains énoncés de concours.

Si $\mathcal{S}$ est un système de glisseurs, le torseur associé est l'ensemble de tous les systèmes de glisseurs équivalents à $\mathcal{S}$; chacun d'eux est un représentant de ce torseur.

Nous représenterons un torseur par la lettre $\mathcal{T}$, affectée éventuellement d'indices ou d'accents.

2° **Coordonnées d'un torseur.** — Un torseur $\mathcal{T}$ est déterminé dès que l'on connaît pour l'un quelconque des systèmes de glisseurs qui le représentent :

la somme, $\vec{\mathcal{S}}$, dite *somme du torseur* ou *vecteur libre du torseur*

le moment en O, $\vec{\mathcal{G}}_O$, dit *moment du torseur en* O.

Les vecteurs $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{G}}_O$ sont dits *coordonnées vectorielles du torseur* $\mathcal{T}$ en O.

Si O est l'origine d'un repère orthonormé $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, les coordonnées X, Y, Z et L, M, N des vecteurs $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{G}}_O$ sont dites *coordonnées scalaires du torseur* $\mathcal{T}$ dans le repère considéré.

La formule

$$\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\mathcal{S}} \tag{2}$$

permet de trouver le moment de $\mathcal{T}$ en un point P quelconque; analytiquement si x, y, z sont les coordonnées de P dans le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\begin{cases} L_P = L - (yZ - zY) \\ M_P = M - (zX - xZ) \\ N_P = N - (xY - yX). \end{cases}$$

Si le glisseur $\mathcal{V}_i$ a pour coordonnées scalaires

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ L_i,\ M_i,\ N_i$$

dans le repère précédent, le torseur $\mathcal{T}$ ayant pour représentant le système $\mathcal{S} = \}\mathcal{V}_i\{$ a pour coordonnées scalaires

$$\begin{cases} X = \Sigma X_i, & Y = \Sigma Y_i, & Z = \Sigma Z_i, \\ L = \Sigma L_i, & M = \Sigma M_i, & N = \Sigma N_i. \end{cases}$$

Remarque I. $\qquad \vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_O \iff \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S} = \vec{0}.$

Le moment du torseur en un point P est égal au moment du torseur en O

ou bien si $\vec{\mathcal{S}} = \vec{0}$, et alors $\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_O$, quel que soit P

ou bien si $\overrightarrow{PO}$ est colinéaire à $\vec{\mathcal{S}} \neq \vec{0}$;

lorsque la somme du torseur n'est pas nulle, les moments en deux points O et P ne sont équipollents que si la droite OP a la direction de la somme.

Remarque II. — Nous examinerons au n° **180** si, étant donnés *a priori* six nombres X, Y, Z, L, M, N il existe un torseur dont ils sont les coordonnées scalaires.

3° **Invariant scalaire d'un torseur.** — *a*) Soit $\mathcal{T}$ un torseur dont les coordonnées vectorielles en O sont $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{G}}_O$; soit X, Y, Z, L, M, N ses coordonnées scalaires par rapport à un repère orthonormé d'origine O.

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Le produit scalaire des deux coordonnées vectorielles d'un torseur en un point est indépendant de ce point; ce produit scalaire est appelé invariant scalaire du torseur.**

En effet, le moment en P est donné par

$$\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\mathcal{S}}.$$
$$\vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}}_O.$$

L'invariant scalaire est désigné par $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = LX + MY + NZ.$$

b) Le produit scalaire $\vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}}_P$ est aussi le produit scalaire de $\vec{\mathcal{S}}$ par la projection orthogonale de $\vec{\mathcal{G}}_P$ sur la direction du vecteur $\vec{\mathcal{S}}$; il en résulte que cette projection est constante. *La projection orthogonale du vecteur $\vec{\mathcal{G}}_P$ sur la direction du vecteur $\vec{\mathcal{S}}$ est un vecteur qui reste équipollent à lui-même.*

c) *Interprétation du comoment de deux glisseurs.* — Soit $\mathcal{T}$ le torseur représenté par le système des deux glisseurs

$$\mathcal{V} = (\Delta, \vec{V}) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}' = (\Delta', \vec{V'}).$$

Soit P un point de Δ, P' un point de Δ'; le torseur $\mathcal{T}$ a pour coordonnées vectorielles en P :

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{V} + \vec{V'}$$
$$\vec{\mathcal{G}}_P = \overrightarrow{PP'} \wedge \vec{V'} \quad \text{(le moment de } \mathcal{V} \text{ en P est nul).}$$

L'invariant scalaire $\mathcal{J}$ de $\mathcal{T}$ est alors

$$\mathcal{J} = (\vec{V} + \vec{V'}).(\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{V'})$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{J} = \vec{V}.(\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{V'}) \quad \text{ou encore} \quad \mathcal{M}^t(\mathcal{V}, \mathcal{V}').$$

L'invariant scalaire $\mathcal{J}$ est le comoment des deux glisseurs qui représentent $\mathcal{T}$.

180. ***Existence d'un torseur dont on donne les coordonnées. Représentation canonique.*** — 1° Au n° 179 nous avons déterminé un torseur à partir d'un système de glisseurs, et nous en avons déduit ses coordonnées, vectorielles et scalaires.

Inversement, étant donnés un vecteur libre $\vec{\mathcal{S}}$ et un vecteur lié $[\overrightarrow{OG}] = \vec{\mathcal{G}}_0$, existe-t-il un torseur $\mathcal{T}$ ayant pour coordonnées vectorielles les deux vecteurs donnés?

Nous répondrons cette question en cherchant à construire un système $\mathcal{E}$ de glisseurs dont la somme est $\vec{\mathcal{S}}$ et dont le moment en O est $\vec{\mathcal{G}}_0$; le torseur dont un représentant est $\mathcal{E}$ répondra à la question. Notons que si nous savons construire deux systèmes de glisseurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ dont la somme est $\vec{\mathcal{S}}$ et dont le moment en O est $\vec{\mathcal{G}}_0$, ces deux systèmes sont équivalents : ce sont deux représentants d'un même torseur. Nous pouvons donc affirmer que le problème proposé admet au maximum une solution.

L'invariant scalaire d'une solution éventuelle est $\mathcal{I} = \vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}}_0$; nous aurons donc à distinguer les cas où $\mathcal{I} = 0$ et $\mathcal{I} \neq 0$; $\mathcal{I}$ est nul si l'un des vecteurs $\vec{\mathcal{S}}$ ou $\vec{\mathcal{G}}_0$ est nul, ou si ces vecteurs sont orthogonaux.

1er *Cas* : $\vec{\mathcal{S}} = \vec{0}$; $\vec{\mathcal{G}}_0 = \vec{0}$. *Torseur nul.* — Si un torseur a ses coordonnées vectorielles nulles en un point O, celles-ci sont nulles en tout autre point de l'espace.

α) Un représentant du torseur cherché $\mathcal{T}$ ne peut comprendre un seul glisseur.

β) Peut-on trouver un système $\mathcal{E}$ de deux glisseurs $\mathcal{V} = (\Delta, \vec{V})$ et $\mathcal{V}' = (\Delta', \vec{V}')$ tels que $\mathcal{E}$ ait ses deux coordonnées vectorielles nulles?

$\vec{V} + \vec{V}' = \vec{0}$, entraîne que les vecteurs libres $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont opposés; les supports Δ et Δ' sont alors parallèles.

Si Δ et Δ' sont distincts, le moment de $\mathcal{E}$, en un point P de Δ est le moment en P de $\mathcal{V}'$, donc n'est pas nul. Nécessairement Δ et Δ' sont confondus.

Inversement, le système

$$\mathcal{E} = \left\{ (\Delta, \vec{V}), (\Delta, -\vec{V}) \right\}$$

répond à la question quel que soit le glisseur $(\Delta, \vec{V})$.

Énonçons :

Théorème et définition. — **Il existe un et un seul torseur dont les coordonnées vectorielles sont nulles; on l'appelle le torseur nul.**

Remarque. — Quand un système de glisseurs est représentant du torseur nul, il est commode de dire que ce système de glisseurs est équivalent à zéro. Un système de deux glisseurs ne peut être équivalent à zéro que si les deux glisseurs sont opposés.

2e *Cas* : $\vec{\mathcal{S}} \neq \vec{0}$; $\vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}}_0 = 0$. *Glisseur unique.* — Nous avons montré (no 175) qu'il existe un, et un seul, glisseur $\mathcal{V}$ qui admet $\vec{\mathcal{S}} \neq \vec{0}$ pour vecteur libre et

$\vec{\mathcal{G}}_0$ pour moment en O; le système $\mathcal{E} = \{\mathcal{V}\}$ formé par le glisseur unique $\mathcal{V}$ convient.

D'autre part, si un torseur admet pour représentant un glisseur unique, son vecteur libre $\vec{\mathcal{S}}$ n'est pas nul, et son moment en un point O est nul ou orthogonal à $\vec{\mathcal{S}}$, c'est dire que l'invariant scalaire de ce torseur est nul.

En résumé, nous énoncerons :

<u>Théorème et définition.</u> — **Un torseur admet pour représentant un glisseur unique si, et seulement si, son invariant scalaire est nul, son vecteur libre n'étant pas nul :**

$$\vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}}_0 = 0, \qquad \text{avec} \qquad \vec{\mathcal{S}} \neq \vec{0}.$$

Ce glisseur unique est appelé le représentant canonique du torseur.

Remarque. — Lorsqu'un système $\mathcal{E}$ de glisseurs est équivalent à un glisseur unique $\mathcal{V}$, on dit aussi que $\mathcal{V}$ est la *résultante* du système $\mathcal{E}$.

En tout point P du support de $\mathcal{V}$, le moment de $\mathcal{E}$ est nul; en tout point P hors de ce support, le moment de $\mathcal{E}$ n'est pas nul, et est orthogonal à la somme de $\mathcal{E}$.

3e *Cas* : $\vec{\mathcal{S}} = \vec{0}$; $\vec{\mathcal{G}}_0 \neq \vec{0}$. *Couple*. — Pour construire un système de glisseurs répondant aux conditions précédentes, nous choisissons arbitrairement, un vecteur libre $\vec{V}$ orthogonal à $\vec{\mathcal{G}}_0$; il existe (cf. n° 175) un glisseur $(\Delta, \vec{V})$ dont le moment en O est $[\overrightarrow{OG}] = \vec{\mathcal{G}}_0$ (fig. 47) : le support Δ est dans le plan Π mené par O perpendiculaire à $\overrightarrow{OG}$; si A et B sont deux points de Δ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$, $[\overrightarrow{OG}]$ et $[\overrightarrow{AB}]$ présentent la disposition directe et la distance de O à Δ est $\frac{OG}{AB}$. Sur la parallèle Δ' à Δ menée par O plaçons un glisseur $(\overrightarrow{A'B'})$ dont le vecteur libre est $-\vec{V}$.

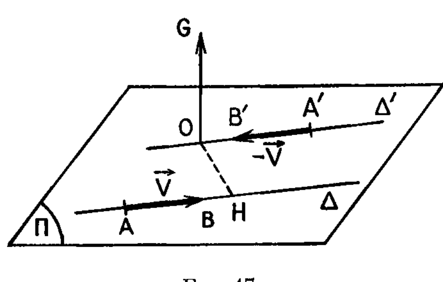


Fig. 47.

Le système $\mathcal{E}$ formé par $(\Delta, \vec{V})$ et $(\overrightarrow{A'B'})$ admet $\vec{0}$ pour somme, $\vec{\mathcal{G}}_0$ pour moment en O : il répond à la question.

L'étude qui précède permet les énoncés suivants :

<u>Théorème.</u> — **Il existe un torseur et un seul dont la somme $\vec{\mathcal{S}}$ est nulle, et dont le moment en O est un vecteur donné $\vec{\mathcal{G}}_0$ non nul.**

<u>Définition.</u> — **On appelle couple tout torseur non nul dont la somme est nulle.**

THÉORÈME. — **Tout couple peut être représenté et d'une infinité de façons, par un système de deux glisseurs dont les supports sont strictement parallèles et dont les vecteurs libres sont opposés.**

REMARQUE. — Pour abus de langage, on appelle aussi couple tout système de deux glisseurs dont les supports sont strictement parallèles et dont les vecteurs libres sont opposés.

MOMENT D'UN COUPLE. — Soit le couple $\mathcal{T}$ donné par ses coordonnées vectorielles en O, $\vec{\mathcal{S}} = \vec{0}$, $\vec{\mathcal{G}}_0 \neq \vec{0}$.

D'après la formule du n° **179**, en tout autre point P de l'espace

$$\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_0.$$

Le moment d'un couple en un point quelconque restant équipollent à lui-même, on peut le considérer comme le représentant d'un vecteur libre, et le représenter par une notation, telle que $\vec{\mathcal{G}}$, sans indice. En résumé :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Le moment d'un couple en un point quelconque est équipollent à un vecteur fixe, non nul; le vecteur libre dont il est un représentant est appelé moment du couple.**

Un couple est caractérisé par son moment.

REMARQUE. — On trouve encore l'expression « axe d'un couple » pour désigner le moment d'un couple.

4° *Cas général* : $\vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}}_0 \neq 0$. Cette hypothèse implique $\vec{\mathcal{S}} \neq \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{G}}_0 \neq \vec{0}$.

Désignons par $\mathcal{V}$ le glisseur de vecteur libre $\vec{\mathcal{S}}$ et dont le support passe par O; désignons par $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_1'$ deux glisseurs de vecteurs libres opposés qui constituent un représentant du couple dont le moment est $\vec{\mathcal{G}}_0$. Le système $\mathcal{E}$ des trois glisseurs $\{ \mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1' \}$ répond à la question.

En résumant les quatre cas qui ont été successivement examinés, nous pouvons donner l'énoncé général suivant :

THÉORÈME. — **Étant donnés un vecteur libre $\vec{\mathcal{S}}$ et un vecteur lié $[\overrightarrow{OG}] = \vec{\mathcal{G}}_0$, il existe un torseur $\mathcal{T}$ et un seul dont les coordonnées vectorielles en O sont $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{G}}_0$.**

REMARQUE. — Non seulement nous avons démontré l'existence du torseur $\mathcal{T}$, mais nous en avons construit, dans chaque cas, un représentant $\mathcal{E}$ particulièrement simple; ce représentant est unique seulement dans le 2e cas : si $\mathcal{T}$ est représenté par un glisseur unique, nous avons appelé ce glisseur *le représentant canonique* de $\mathcal{T}$.

Dans les trois autres cas, nous conviendrons néanmoins de dire que le système $\mathcal{E}$ obtenu est *un représentant canonique* de $\mathcal{T}$; c'est ainsi que, dans le cas général un représentant canonique de $\mathcal{T}$ est constitué par trois glisseurs dont deux forment un couple.

2° **Expressions analytiques.** — Soit X, Y, Z, L, M, N les six coordonnées d'un torseur $\mathcal{T}$, rapporté à un repère orthonormé.

I.	$\left.\begin{matrix} X = 0, \ Y = 0, \ Z = 0 \\ L = 0, \ M = 0, \ N = 0 \end{matrix}\right\}$	$\Longrightarrow$	$\mathcal{T}$ est nul
II.	$\left.\begin{matrix} X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0 \\ LX + MY + NZ = 0 \end{matrix}\right\}$	$\Longrightarrow$	$\mathcal{T}$ est représenté par un glisseur unique.
III.	$\left.\begin{matrix} X = 0, \ Y = 0, \ Z = 0 \\ L^2 + M^2 + N^2 \neq 0 \end{matrix}\right\}$	$\Longrightarrow$	$\mathcal{T}$ est un couple
IV.	$LX + MY + NZ \neq 0$	$\Longrightarrow$	$\mathcal{T}$ est représenté par un glisseur et un couple.

181. ***Moment par rapport à un axe.*** — 1° **Moment d'un système de glisseurs par rapport à un axe.** — Étant donné un système de glisseurs, $\mathcal{E}$, et un axe $\vec{D}$, on appelle *moment de* $\mathcal{E}$ *par rapport à* $\vec{D}$ la somme des moments par rapport à $\vec{D}$ des glisseurs de $\mathcal{E}$;

on note $$\mathcal{M}^{t}_{\vec{D}}(\mathcal{E}).$$

2° Soit $\mathcal{V}_i = (\Delta_i, \vec{V}_i)$ un glisseur de $\mathcal{E}$; soit Ω un point de l'axe $\vec{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{D}$; si l'on désigne par $(\vec{\mathcal{G}}_i)_\Omega$ le moment de $\mathcal{V}_i$ en Ω,

$$\mathcal{M}^{t}_{\vec{D}}(\mathcal{V}_i) = \vec{u}.(\vec{\mathcal{G}}_i)_\Omega$$

et par suite
$$\mathcal{M}^{t}_{\vec{D}}(\mathcal{E}) = \vec{u}.\vec{\mathcal{G}}_\Omega$$

$$\vec{\mathcal{G}}_\Omega = (\vec{\mathcal{G}}_1)_\Omega + \ldots + (\vec{\mathcal{G}}_n)_\Omega$$

étant le moment en Ω du système $\mathcal{E}$. Nous énonçons donc :

<u>Théorème.</u> — **Le moment d'un système de glisseurs par rapport à un axe est la mesure algébrique de la projection sur l'axe du moment du système en un point quelconque de l'axe.**

$$\mathcal{M}^{t}_{\vec{D}}(\mathcal{E}) = \overline{\text{proj}_{\vec{D}}}(\vec{\mathcal{G}}_\Omega).$$

3° **Moment d'un torseur par rapport à un axe.** — Le moment d'un torseur $\mathcal{T}$ par rapport à l'axe $\vec{D}$ est le moment par rapport à $\vec{D}$ de l'un quelconque des systèmes de glisseurs qui représentent $\mathcal{T}$; l'indifférence du choix du représentant résulte du théorème du 2°.

Remarque. — La projection orthogonale sur la droite D du moment d'un torseur en un point quelconque de D est un vecteur qui reste équipollent à lui-même; on dit que ce vecteur est le moment du torseur sur la droite D; on le note

$$\vec{\mathcal{M}}_D(\mathcal{T}).$$

4° **Expression analytique du moment d'un torseur par rapport à un axe.** — Soit un repère orthonormé d'origine O; soit $\mathcal{T}$ le torseur ayant pour coordonnées $\vec{\mathcal{S}}(X, Y, Z)$ et $\vec{\mathcal{G}}_0(L, M, N)$.

Introduisons le glisseur unitaire de l'axe $\vec{D}$ par son vecteur libre $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et par son moment en O, $\vec{g}_0(\lambda, \mu, \gamma)$:

$$\vec{g}_0 = \overrightarrow{O\Omega} \wedge \vec{u}, \qquad \Omega \in D.$$

Pour le torseur $\mathcal{T}$,

$$\vec{\mathcal{G}}_\Omega = \vec{\mathcal{G}}_0 + \overrightarrow{\Omega O} \wedge \vec{\mathcal{S}}$$

d'où

$$\mathcal{M}'_{\vec{D}}(\mathcal{T}) = \vec{u}.\vec{\mathcal{G}}_\Omega$$

$$= \vec{u}.\vec{\mathcal{G}}_0 + \vec{u}.\left(\overrightarrow{\Omega O} \wedge \vec{\mathcal{S}}\right)$$

le second terme s'écrit encore

$$\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{\Omega O}\right).\vec{\mathcal{S}} \qquad \text{ou} \qquad \left(\overrightarrow{O\Omega} \wedge \vec{u}\right).\vec{\mathcal{S}}.$$

Finalement

$$\mathcal{M}'_{\vec{D}}(\mathcal{T}) = \vec{u}.\vec{\mathcal{G}}_0 + \vec{\mathcal{S}}.\vec{g}_0.$$

$$\mathcal{M}'_{\vec{D}}(\mathcal{T}) = \alpha L + \beta M + \gamma N + \lambda X + \mu Y + \nu Z.$$

Remarque. — Les trois scalaires L, M, N projections orthogonales de $\vec{\mathcal{G}}_0$ sur les axes Ox, Oy, Oz du repère, sont les moments du torseur par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

5° **Droites du moment nul.** — Une droite D est dite droite de moment nul par rapport au torseur $\mathcal{T}$ si

$$\mathcal{M}'_{\vec{D}}(\mathcal{T}) = 0.$$

Si $\vec{\mathcal{G}}_0 = \vec{0}$, toute droite passant par O est une droite de moment nul.

Si $\vec{\mathcal{G}}_0 \neq \vec{0}$, les droites passant par O, perpendiculaires à $\vec{\mathcal{G}}_0$ sont droites de moment nul.

Si la droite D a pour coordonnées de Plücker (n° 175) a, b, c, l, m, n, les droites de moment nul par rapport au torseur $\mathcal{T}$ sont caractérisées par la condition

$$aL + bM + cN + lX + mY + nZ = 0.$$

182. *Axe central d'un torseur.* — 1° **Problème.** — On donne un torseur $\mathcal{T}$ dont la somme $\vec{\mathcal{S}}$ n'est pas nulle. *Existe-t-il des points* P *tels que le moment de* $\mathcal{T}$ *en* P, $\vec{\mathcal{G}}_P$, *soit colinéaire à* $\vec{\mathcal{S}}$? S'il en existe, quel est l'ensemble $\mathcal{A}$ de ces points?

Rappelons que deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont dits colinéaires s'ils forment un système lié (cf. n° 118).

Nous supposons le torseur $\mathcal{T}$ déterminé par ses coordonnées vectorielles en un point O, $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{G}}_0$; soit $\mathcal{I} = \vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}}_0$ l'invariant scalaire de $\mathcal{T}$.

2° **Cas particulier** : $\mathcal{J} = 0$. — Ce cas est celui où $\mathcal{C}$ admet comme représentant un glisseur $(\Delta, \vec{\mathcal{G}})$, dont le support Δ est bien déterminé (n° 180). En tout point de Δ, le moment de $\mathcal{C}$ est nul, donc colinéaire à $\vec{\mathcal{G}}$; en tout point hors de Δ, le moment de $\mathcal{C}$ est orthogonal à Δ.

Δ est le lieu des points où le moment de $\mathcal{C}$ est nul; Δ est alors l'ensemble $\mathcal{A}$ des points où le moment de $\mathcal{C}$ est colinéaire à $\vec{\mathcal{G}}$.

3° **Cas général** : $\mathcal{J} \neq 0$. — Au point O, $\overrightarrow{OG} = \vec{\mathcal{G}}_0$ n'est pas nul; $\overrightarrow{OG}$ est la somme d'un vecteur $\overrightarrow{OH} \neq \vec{0}$ colinéaire à $\vec{\mathcal{G}}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{Og}$ orthogonal à $\vec{\mathcal{G}}$ (fig. 48). En tout point P de l'espace, la projection orthogonale du moment $\vec{\mathcal{G}}_P$ sur la direction de $\vec{\mathcal{G}}$ est équipollente à $\overrightarrow{OH}$; par conséquent, si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points P où $\vec{\mathcal{G}}_P$ et $\vec{\mathcal{G}}$ sont colinéaires :

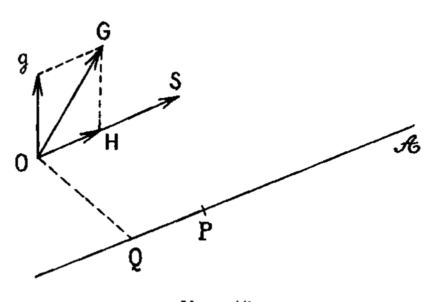


FIG. 48.

$$P \in \mathcal{A} \iff \vec{\mathcal{G}}_P = \overrightarrow{OH}. \quad (1)$$

Or $\qquad \vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_0 + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\mathcal{G}} \qquad$ et $\qquad \vec{\mathcal{G}}_0 - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{Og}$;

(1) peut donc s'écrire $\quad \overrightarrow{Og} = -\overrightarrow{PO} \wedge \vec{\mathcal{G}}$.

Finalement

$$P \in \mathcal{A} \iff \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\mathcal{G}} = \overrightarrow{Og}. \quad (2)$$

La détermination de $\overrightarrow{OP}$ est ramenée à un problème de division vectorielle, possible ici puisque $\vec{\mathcal{G}}$ et $\overrightarrow{Og}$ sont orthogonaux. D'après le n° 127,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{\mathcal{G}} \wedge \overrightarrow{Og}}{\|\vec{\mathcal{G}}\|^2} + \lambda\vec{\mathcal{G}} \qquad (\lambda \in R).$$

Le produit vectoriel $\vec{\mathcal{G}} \wedge \overrightarrow{Og}$ est aussi $\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\mathcal{G}}_0$. Appelons Q le point défini par

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\mathcal{G}}_0}{\|\vec{\mathcal{G}}\|^2}$$

Les points P cherchés sont ceux de la droite $\mathcal{A}$ menée par Q, parallèle à $\vec{\mathcal{G}}$. On résume le 2° et le 3° par un énoncé unique :

4° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si la somme $\vec{\mathcal{S}}$ d'un torseur n'est pas nulle, le lieu des points où le moment du torseur est colinéaire à $\vec{\mathcal{S}}$ est une droite parallèle à $\vec{\mathcal{S}}$; cette droite s'appelle l'axe central du torseur.**

On peut caractériser l'axe central $\mathcal{A}$ en observant que le glisseur $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{S}})$, d'après l'égalité (2), admet $\overrightarrow{Og}$ pour moment en O.

Or $$\overrightarrow{Og} = \vec{\mathcal{G}}_0 - \overrightarrow{OH}$$

et $$\mathcal{I} = \vec{\mathcal{G}}_0 . \vec{\mathcal{S}} = \overrightarrow{OH} . \vec{\mathcal{S}}.$$

Puisque $\overrightarrow{OH}$ est colinéaire à $\vec{\mathcal{S}}$, $\overrightarrow{OH} = \rho \vec{\mathcal{S}}$,

avec $$\mathcal{I} = \rho \left\| \vec{\mathcal{S}} \right\|^2.$$

Finalement

$$\overrightarrow{Og} = \vec{\mathcal{G}}_0 - \frac{\mathcal{I}}{\left\| \vec{\mathcal{S}} \right\|^2} \vec{\mathcal{S}}$$

On peut prendre pour coordonnées vectorielles en O du glisseur $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{S}})$

$$\vec{\mathcal{S}} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}_0 - \frac{\mathcal{I}}{\left\| \vec{\mathcal{S}} \right\|^2} \vec{\mathcal{S}}.$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{I} = 0$, on retrouve que $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{G}}_0$ sont les coordonnées vectorielles d'un glisseur; le support de ce glisseur est, dans ce cas particulier, l'axe central du torseur.

5° **Étude analytique de l'axe central.** — Donnons un repère orthonormé d'origine O et soit X, Y, Z, L, M, N les coordonnées scalaires du torseur. Le point P (x, y, z) appartient à l'axe central $\mathcal{A}$ si, et seulement si, il existe un nombre ρ (éventuellement nul) tel que

$$L_P = \rho X, \quad M_P = \rho Y, \quad N_P = \rho Z,$$

les premiers membres étant les composantes scalaires du moment $\vec{\mathcal{G}}_P$ du torseur en P.

Tenant compte des résultats du n° **179**, 2°, x, y, z sont les solutions éventuelles du système

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} L - yZ + zY = \rho X \\ M - zX + xZ = \rho Y \\ N - xY + yX = \rho Z \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right.$$

S'il existe une solution x, y, z, en faisant la combinaison linéaire des égalités (4) avec les coefficients respectifs X, Y, Z, on obtient

$$LX + MY + NZ \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{I} = \rho \left\| \vec{\mathcal{S}} \right\|^2.$$

Adoptons alors pour ρ cette valeur nécessaire, les équations (4) deviennent

$$(5) \qquad \begin{cases} yZ - zY = l \\ zX - xZ = m \\ xY - yX = n \end{cases} \qquad \begin{cases} l = L - \rho X \\ m = M - \rho Y \\ n = N - \rho Z \end{cases} \qquad \rho = \frac{\mathfrak{I}}{\|\vec{\mathcal{G}}\|^2}$$

Les équations (5) forment un système de rang 2 car la matrice des coefficients des inconnues

$$\begin{bmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{bmatrix} \quad \text{est de rang 2.}$$

La condition $lX + mY + nZ = 0$ exprime que le caractéristique relatif à l'équation non principale est nul. Le système (5) est équivalent au système des deux équations principales; le système homogène associé a pour solution X, Y, Z, si bien que la solution générale est de la forme

$$(6) \qquad x = x_0 + \lambda X, \quad y = y_0 + \lambda Y, \quad z = z_0 + \lambda Z,$$

x_0, y_0, z_0 étant une solution particulière de (5). Les équations (6) sont celles de l'axe central $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}$ est parallèle à $\vec{\mathcal{G}}$.

Éliminant ρ entre les trois équations (4), nous obtenons les deux équations suivantes qui représentent la droite $\mathcal{A}$:

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}.$$

183. *Propriétés de l'axe central.* — 1° Supposons le torseur $\mathcal{T}$ déterminé par ses coordonnées vectorielles en un point Ω quelconque de l'axe central $\mathcal{A}$; la figure 49 montre $\overrightarrow{\Omega S} = \vec{\mathcal{G}}$, et $\vec{\mathcal{G}}_\Omega = \overrightarrow{\Omega G}$, tous deux portés par $\mathcal{A}$; les vecteurs $\overrightarrow{\Omega S}$ et $\overrightarrow{\Omega G}$ ne font que subir la translation $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ si l'on remplace Ω par un autre point Ω' de $\mathcal{A}$.

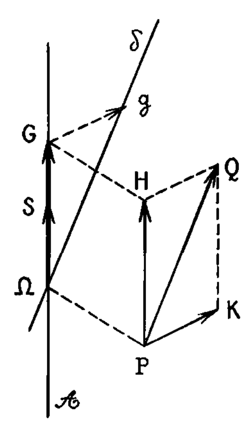


Fig. 49.

Soit alors P un point quelconque de l'espace; pour construire le moment en P, $\vec{\mathcal{G}}_P$, on peut procéder ainsi : on suppose que Ω soit la projection orthogonale de P sur $\mathcal{A}$.

$$\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_\Omega + \overrightarrow{P\Omega} \wedge \vec{\mathcal{G}}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{P\Omega} \wedge \vec{\mathcal{G}}$ est perpendiculaire en P au plan ($\mathcal{A}$, P), de sens positif par rapport à $\vec{\mathcal{G}}$, et sa mesure est $\Omega S \times P\Omega$.

En construisant $\overrightarrow{PH} = \vec{\mathcal{G}}_\Omega$, $\vec{\mathcal{G}}_P = \overrightarrow{PQ}$ est la diagonale du rectangle construit sur $\overrightarrow{PH}$ et $\overrightarrow{PK}$.

La figure précédente permet d'obtenir les résultats suivants :

a) $$\left\|\vec{\mathcal{G}}_P\right\|^2 = PQ^2 + PK^2$$

L'axe central est le lieu des points en lesquels $\left\|\vec{\mathcal{G}}_P\right\|$ est minimal.

b) Quand P décrit une droite D parallèle à $\mathcal{A}$, $\vec{\mathcal{G}}_P$ se déplace par translation parallèle à $\mathcal{A}$; quand P décrit un cercle C d'axe $\mathcal{A}$, $\vec{\mathcal{G}}_P$ se déplace par rotation d'axe $\mathcal{A}$.

Si l'on fait subir au point P un déplacement hélicoïdal d'axe $\mathcal{A}$, le vecteur moment $\vec{\mathcal{G}}_P$ subit le même déplacement hélicoïdal.

2° **Lieu des points où le moment d'un torseur a une direction donnée.** — *a*) Nous supposons que la somme $\vec{\mathcal{S}}$ du torseur $\mathcal{T}$ n'est pas nulle; nous pouvons alors déterminer $\mathcal{T}$ par ses coordonnées vectorielles en un point Ω de l'axe central $\mathcal{A}$, soit $\vec{\mathcal{S}}$, et $\vec{\mathcal{G}}_\Omega$, colinéaire à $\vec{\mathcal{S}}$.

Nous cherchons à déterminer l'ensemble des points P tels que

$$\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_\Omega + \overrightarrow{P\Omega} \wedge \vec{\mathcal{S}} \qquad \text{puisse s'écrire} \qquad \vec{\mathcal{G}}_P = \rho\,\vec{u},$$

$\vec{u}$ étant un vecteur fixe, parallèle à la direction donnée δ, et ρ un réel.

L'équation du problème est ainsi

$$\overrightarrow{\Omega P} \wedge \vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{G}}_\Omega - \rho\,\vec{u}. \tag{1}$$

L'équation (1) est une équation de division vectorielle qui n'est possible que si

$$\vec{\mathcal{S}}.\left(\vec{\mathcal{G}}_\Omega - \rho\,\vec{u}\right) = 0$$

ou

$$\mathcal{I} = \rho\left(\vec{\mathcal{S}}.\vec{u}\right). \tag{2}$$

α) Écartons d'abord le cas où la direction donnée δ est orthogonale à $\mathcal{A}$; alors $\vec{\mathcal{S}}.\vec{u} \neq 0$, et (2) s'écrit

$$\rho = \rho_1 \qquad \text{avec} \qquad \rho_1 = \frac{\mathcal{I}}{\vec{\mathcal{S}}.\vec{u}}.$$

La division vectorielle (1) a pour solution

$$\overrightarrow{\Omega P} = \frac{\vec{\mathcal{S}} \wedge \left(\vec{\mathcal{G}}_\Omega - \rho_1\vec{u}\right)}{\left\|\vec{\mathcal{S}}\right\|^2} + \lambda\,\vec{\mathcal{S}}$$

et, comme $\vec{\mathcal{S}} \wedge \vec{\mathcal{G}}_\Omega = \vec{0}$,

$$\overrightarrow{\Omega P} = \frac{\rho_1}{\left\|\vec{\mathcal{S}}\right\|^2}\left(\vec{u} \wedge \vec{\mathcal{S}}\right) + \lambda\,\vec{\mathcal{S}}$$

Le lieu cherché est une droite D parallèle à l'axe central.

β) Si δ est orthogonale à $\mathcal{A}$, c'est-à-dire si $\vec{\mathcal{S}}.\vec{u} = 0$, il ne peut exister de point P répondant à la question que si $\mathcal{I} = 0$ c'est-à-dire si $\vec{\mathcal{G}}_\Omega = \vec{0}$. Le vecteur $\vec{\mathcal{G}}_P = \overrightarrow{P\Omega} \wedge \vec{\mathcal{S}}$ est alors colinéaire à $\vec{u}$ si, et seulement si, P est situé dans le plan qui passe par $\mathcal{A}$ et est perpendiculaire à la direction δ.

b) On retrouve ce résultat élémentairement sur la figure 49; soit $\overrightarrow{\Omega G} = \vec{\mathcal{G}}_\Omega$; le plan perpendiculaire en G à $\mathcal{A}$ rencontre la droite $\Omega\delta$ en g (cela suppose δ non orthogonale à $\mathcal{A}$); le point P précédent est situé sur la perpendiculaire en Ω au plan $G\Omega\delta$, à une distance de Ω telle que

$$\|\vec{\mathcal{S}}\| \times \Omega P = Gg,$$

de façon que $[\overrightarrow{\Omega S}] = \vec{\mathcal{S}}$ et $[\overrightarrow{PK}] = \overrightarrow{Gg}$ présentent la disposition positive; la parallèle D à $\mathcal{A}$ menée par ce point P est le lieu cherché.

c) *Solution analytique.* — Dans un problème où intervient un torseur, on a intérêt à choisir l'origine en un point O de l'axe central, l'un des axes du repère, Oz par exemple, étant confondu avec l'axe central. Dans ces conditions le torseur $\mathcal{T}$ a pour coordonnées scalaires 0, 0, Z, 0, 0, N (Z et N n'étant pas nuls).

Choisissons ces données pour traiter le problème envisagé dans ce 2°; la direction δ est supposée parallèle au plan yOz, soit 0, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ ses paramètres directeurs.

Au point $P(x, y, z)$, le moment $\vec{\mathcal{G}}_P$ de $\mathcal{T}$ est donné par

$$\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\mathcal{S}}, \qquad \text{d'où} \qquad \vec{\mathcal{G}}_P \begin{cases} -yZ \\ xZ \\ N. \end{cases}$$

En exprimant que les coordonnées de ce moment sont proportionnelles à 0, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, on trouve que P vérifie

$$x = \frac{N}{Z}\operatorname{cotg}\alpha, \qquad y = 0;$$

on retrouve la droite D obtenue en *a*) ou en *b*).

184. ***Propriété caractéristique d'un champ de moments.*** — **1° Champ de moments.** — Si on donne le moyen de faire correspondre à tout point P d'une certaine région de l'espace un vecteur lié $\vec{F}(P) = [\overrightarrow{PP'}]$ d'origine P, on dit qu'on définit un *champ de vecteurs*.

En particulier, étant donné un torseur $\mathcal{T}$, à tout point P de l'espace correspond le moment $\vec{\mathcal{G}}_P$ du torseur en P; le champ constitué par les vecteurs $\vec{\mathcal{G}}_P$ est un *champ de moments*.

Un champ de moments est déterminé dans un repère orthonormé d'origine O, par les coordonnées scalaires X, Y, Z, L, M, N du torseur.

Si la somme $\vec{\mathcal{S}}$ est nulle, $\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{\mathcal{G}}_O$, quel que soit P; on dit que le champ de moments est un champ constant.

Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposerons $\vec{\mathcal{S}} \neq \vec{0}$.

2° Équiprojectivité. — Soient P et Q deux points quelconques de l'espace, $\vec{\mathcal{G}}_P$ et $\vec{\mathcal{G}}_Q$ les moments du torseur en P et Q; si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de la droite PQ, on sait que

$$\vec{u}.\vec{\mathcal{G}}_P = \vec{u}.\vec{\mathcal{G}}_Q,$$

la valeur commune étant le moment de $\mathcal{T}$ par rapport à l'axe $\vec{D}$ de support PQ, de vecteur $\vec{u}$.

En résumé nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Les projections orthogonales de $\vec{\mathcal{G}}_P$ et $\vec{\mathcal{G}}_Q$ sur la droite PQ sont des vecteurs équipollents.**

On traduit cette propriété en disant qu'*un champ de moments est équiprojectif.*
Nous allons montrer que cette propriété est caractéristique des champs de moments.

3° THÉORÈME. — **Si un champ de vecteurs liés défini dans tout l'espace est tel que deux quelconques des vecteurs du champ se projettent orthogonalement sur la droite qui joint leurs origines, suivant des vecteurs équipollents, c'est un champ de moments.**

Soit ABCD un tétraèdre quelconque, et soit $\vec{F}(A) = [\overrightarrow{AA'}]$, $\vec{F}(B) = [\overrightarrow{BB'}]$, $\vec{F}(C) = [\overrightarrow{CC'}]$, $\vec{F}(D) = [\overrightarrow{DD'}]$, les vecteurs du champ aux points A, B, C, D.

Par hypothèse $\vec{F}(A)$ et $\vec{F}(B)$ ont la même projection sur AB, soit $\vec{H}_{AB}$.

Or on peut placer sur la droite CD un glisseur $(\vec{U})$ et un seul dont le moment sur AB soit $\vec{H}_{AB}$: il suffit de trouver λ tel que

$$(\vec{U}) = \lambda(\overrightarrow{CD})$$

or

$$\overrightarrow{\mathcal{M}'_{AB}}(\vec{U}) = \lambda\,\overrightarrow{\mathcal{M}'_{AB}}(\overrightarrow{CD}) = \vec{H}_{AB}$$

détermine sans ambiguïté le nombre réel λ.

Nous procédons de même pour chacune des arêtes DB, BC, AB, AC, AD, ce qui conduit à placer sur ces droites des glisseurs $(\vec{V})$, $(\vec{W})$, $(\vec{R})$, $(\vec{S})$, $(\vec{T})$.

Soit $\mathcal{S}$ le système formé par ces six glisseurs. Sur la droite AB, le moment de $\mathcal{S}$ se réduit à celui de $(\vec{U})$ puisque les moments sur AB des cinq autres glisseurs sont nuls. Par suite les moments de $\mathcal{S}$ sur les droites AB, AC, AD coïncident avec les projections orthogonales de $\vec{F}(A)$ sur ces droites et

$$\overrightarrow{\mathcal{M}'_A}(\mathcal{S}) = \vec{F}(A).$$

On reconnaît de même que

$$\overrightarrow{\mathcal{M}'_B}(\mathcal{S}) = \vec{F}(B), \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}'_C}(\mathcal{S}) = \vec{F}(C), \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}'_D}(\mathcal{S}) = \vec{F}(D).$$

Soit maintenant $\vec{F}(P)$ un vecteur quelconque du champ donné; le moment de $\mathcal{S}$ sur PA est la projection orthogonale de $\vec{F}(A)$ sur PA, c'est aussi celle de $\vec{F}(P)$. Il en est de même pour les droites PB, PC, PD.

Or parmi les droites PA, PB, PC, PD trois au moins ne sont pas dans un

même plan; le moment de $\mathcal{E}$ en P ayant les mêmes projections orthogonales que $\vec{F}(P)$ sur ces trois droites, il en résulte que

$$\vec{\mathcal{M}}'_P(\mathcal{E}) = \vec{F}(P).$$

Le champ donné coïncide avec le champ des moments relatifs au système $\mathcal{E}$, ce qui démontre la proposition.

Remarque. — D'après ce raisonnement, si deux systèmes de glisseurs ont les mêmes moments sur les supports des six arêtes d'un tétraèdre, ils ont même moment en tout point.

185. ***Opérations sur les torseurs.*** — Nous nous proposons de montrer que l'ensemble des torseurs peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.

1° **Opération interne : addition des torseurs.** — *a*) Soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux torseurs déterminés par leurs coordonnées vectorielles au point O,

$$\vec{\mathcal{S}} \text{ et } \vec{\mathcal{G}}_O \text{ pour } \mathcal{T}, \qquad \vec{\mathcal{S}}' \text{ et } \vec{\mathcal{G}}'_O \text{ pour } \mathcal{T}'.$$

Soit $\mathcal{T}^*$ le torseur ayant pour coordonnées vectorielles au point O

$$\vec{\mathcal{S}}^* = \vec{\mathcal{S}} + \vec{\mathcal{S}}', \qquad \vec{\mathcal{G}}^*_O = \vec{\mathcal{G}}_O + \vec{\mathcal{G}}'_O.$$

La formule de comparaison des moments en O et P montre que

$$\vec{\mathcal{G}}^*_P = \vec{\mathcal{G}}_P + \vec{\mathcal{G}}'_P.$$

En tout point P les coordonnées vectorielles de $\mathcal{T}^*$ sont la somme des coordonnées vectorielles de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$; nous dirons que $\mathcal{T}^*$ est la *somme des torseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$*.

On note $$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} + \mathcal{T}'.$$

Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont connus par leurs coordonnées scalaires relatives à un repère orthonormé, les coordonnées scalaires de $\mathcal{T}^*$ sont la somme des coordonnées scalaires de même nom de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$

$$\begin{cases} X^* = X + X' & Y^* = Y + Y' & Z^* = Z + Z' \\ L^* = L + L' & M^* = M + M' & N^* = N + N' \end{cases}$$

b) L'addition des torseurs est une opération associative et commutative. Le torseur nul (0) est élément neutre pour cette opération.

Le torseur qui a pour coordonnées vectorielles $-\vec{\mathcal{S}}$ et $-\vec{\mathcal{G}}_O$ est dit torseur opposé du torseur $\mathcal{T}$; on peut le noter opp$\mathcal{T}$;

$$\mathcal{T} + \text{opp}\,\mathcal{T} = (0).$$

Dès lors l'*ensemble des torseurs est muni d'une structure de groupe additif.*

REMARQUE. — Soit $\mathcal{E} = \{ \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n \}$ un système de glisseurs, et soit $\mathcal{T}$ le torseur dont $\mathcal{E}$ est un représentant. Appelons $\mathcal{T}_i$ le torseur dont le glisseur $\mathcal{V}_i$ est le représentant canonique : il résulte du nº 180 qu'il existe une correspondance biunivoque entre un glisseur et un torseur dont l'invariant scalaire est nul, mais dont le vecteur libre n'est pas nul :

$$\mathcal{T}_i \longleftrightarrow \mathcal{V}_i.$$

En convenant de représenter $\mathcal{T}_i$ par le symbole $\mathcal{V}_i$, c'est-à-dire d'appeler, par abus de langage, glisseur tout torseur dont le représentant canonique est un glisseur unique, on pourra écrire

$$\mathcal{T} = \mathcal{V}_1 + \ldots + \mathcal{V}_n$$

c'est-à-dire considérer un torseur comme la somme des glisseurs qui le représentent.

2° **Opération externe; multiplication par un scalaire.** — *a*) Reprenons le torseur $\mathcal{T}(\vec{\mathcal{G}}, \vec{\mathcal{G}}_0)$; soit $\mathcal{T}_1$ le torseur ayant pour coordonnées vectorielles en O

$$\vec{\mathcal{G}}_1 = \lambda\vec{\mathcal{G}}, \qquad \vec{\mathcal{G}}_{10} = \lambda\vec{\mathcal{G}}_0, \qquad \lambda \in R.$$

La formule de comparaison des moments en O et en P montre que

$$\vec{\mathcal{G}}_{1P} = \lambda\vec{\mathcal{G}}_P :$$

en tout point P les coordonnées vectorielles de $\mathcal{T}_1$ sont le produit par λ des coordonnées vectorielles de $\mathcal{T}$; nous dirons que $\mathcal{T}_1$ est le *produit de $\mathcal{T}$ par λ*.

On note $$\mathcal{T}_1 = \lambda\mathcal{T}$$

Dans un repère orthonormé, les coordonnées scalaires de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_1$ sont liées par

$$\begin{cases} X_1 = \lambda X, & Y_1 = \lambda Y, & Z_1 = \lambda Z \\ L_1 = \lambda L, & M_1 = \lambda M, & N_1 = \lambda N \end{cases}$$

b) Cette opération externe est associative pour les scalaires, distributive par rapport à l'addition des scalaires et à l'addition des torseurs; elle est telle que $1\,\mathcal{T} = \mathcal{T}$.

c) $$\text{opp}\,\mathcal{T} = (-1)\mathcal{T}.$$

3° **L'ensemble des torseurs est un espace vectoriel sur le corps des réels.** — Ce résultat est la conséquence des propriétés énoncées au 1° et au 2°.

a) On pourra par suite parler d'un système de torseurs indépendants; on pourra parler d'une combinaison linéaire de torseurs.

$$\mathcal{T}^* = \lambda\mathcal{T} + \lambda'\mathcal{T}' \iff \begin{cases} \vec{\mathcal{S}}^* = \lambda\vec{\mathcal{S}} + \lambda'\vec{\mathcal{S}}' \\ \vec{\mathcal{G}}_0^* = \lambda\vec{\mathcal{G}}_0 + \lambda'\vec{\mathcal{G}}_0' \end{cases}$$

b) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ étant les vecteurs unitaires du repère orthonormé, considérons les six torseurs

	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_1'$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_3'$
somme	$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{j}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$\vec{0}$
moment en O	$\vec{0}$	$[\vec{i}]$	$\vec{0}$	$[\vec{j}]$	$\vec{0}$	$[\vec{k}]$

Tout torseur $\mathcal{T}$ (ayant pour coordonnées scalaires X, Y, Z, L, M, N) est une combinaison linéaire des six torseurs précédents :

$$\mathcal{T} = X\mathcal{T}_1 + Y\mathcal{T}_2 + Z\mathcal{T}_3 + L\mathcal{T}_1' + M\mathcal{T}_2' + N\mathcal{T}_3'.$$

Ces six torseurs sont indépendants car

$\mathcal{T}$ est nul $\iff$ $X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0,\quad L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,$

ils forment donc une base pour l'espace vectoriel des torseurs; l'ensemble des torseurs est un espace vectoriel de dimension 6 sur le corps R.

III. SYSTÈMES PARTICULIERS DE VECTEURS GLISSANTS

186. ***Réduction d'un système de vecteurs glissants.*** — 1° DÉFINITION. — **Réduire un système de glisseurs, soit $\mathcal{E}$, c'est trouver un système équivalent $\mathcal{E}'$ formé d'un nombre moindre de glisseurs.**

Pour réduire $\mathcal{E}$, il suffit en général de chercher les coordonnées (vectorielles ou scalaires) du torseur $\mathcal{T}$ dont $\mathcal{E}$ est un représentant, et d'en déduire, comme on a fait précédemment, une représentation canonique de $\mathcal{T}$; cette représentation canonique constitue une réduction du système $\mathcal{E}$.

On peut en obtenir d'autres, comme on le constatera plus loin.

2° **Glisseurs de même support.** — Soit $\mathcal{V} = (\Delta, \vec{V})$ et $\mathcal{V}' = (\Delta, \vec{V}')$ deux glisseurs ayant le même support Δ. En tout point O de Δ, le système $\mathcal{E} = \{\mathcal{V}, \mathcal{V}'\}$ a pour somme $\vec{V} + \vec{V}'$ et un moment nul; $\mathcal{E}$ est donc équivalent à l'unique glisseur $(\Delta, \vec{V} + \vec{V}')$.

Un système de glisseurs ayant le même support Δ est équivalent à un glisseur unique de support Δ, et dont le vecteur libre est la somme des vecteurs libres des glisseurs considérés.

Si la somme des vecteurs libres est nulle, le système donné est équivalent à zéro.

Remarque. — Le lecteur n'aura pas manqué de remarquer, à la lecture des définitions des nos 173 et 178 qu'un système $\mathcal{E}$ de glisseurs $\mathcal{V}_i$ n'est pas la réunion des $\mathcal{V}_i$, au sens de la théorie des ensembles (I, n° 5). En effet si p des $\mathcal{V}_i$ sont confondus avec un glisseur $\left(D, \vec{u}\right)$, celui-ci intervient p fois dans la définition de la somme et du moment de $\mathcal{E}$, alors que, dans le contexte de la théorie des ensembles, il ne serait intervenu qu'une seule fois. Tout se passe d'ailleurs ici comme si nous avions, au préalable, remplacé le système Σ des p glisseurs confondus par le glisseur unique $\left(D, p\vec{u}\right)$ qui constitue un système équivalent à Σ.

3° **Glisseurs concourants.** — *Lorsque plusieurs glisseurs ont des supports qui ont un point commun* A, *on dit que ces glisseurs sont concourants.*

Soit $\mathcal{V} = \left(A, \vec{V}\right)$ et $\mathcal{V}' = \left(A, \vec{V}'\right)$ deux glisseurs dont les supports concourent en A; le système $\mathcal{E} = \{ \mathcal{V}, \mathcal{V}' \}$ a un moment nul en A, et sa somme est $\vec{V} + \vec{V}'$; $\mathcal{E}$ est donc équivalent au glisseur unique $\left(A, \vec{V} + \vec{V}'\right)$. Plus généralement :

Un système de glisseurs dont les supports concourent en A est équivalent à un glisseur unique dont le support passe par A et a pour vecteur libre la somme des vecteurs libres des glisseurs considérés.

Si la somme des vecteurs libres est nulle, le système donné est équivalent à zéro.

Remarque. — D'après la définition posée au n° 180, un système de glisseurs ayant même support Δ, ou un système de glisseurs dont les supports concourent au point A admet pour résultante le glisseur unique équivalent (1).

4° **Système formé de plusieurs couples.** — Soit $\mathcal{C}_i$ un système de glisseurs non nul dont la somme est nulle; c'est un couple, soit $\vec{\mathcal{G}}_i$ son moment.

Le système $\mathcal{E} = \{ \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \}$ est encore un système dont la somme est nulle; soit alors

$$\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}_1 + \ldots + \vec{\mathcal{G}}_n.$$

Si $\vec{\mathcal{G}} \neq \vec{0}$, $\mathcal{E}$ est un couple dont le moment est $\vec{\mathcal{G}}$;
si $\vec{\mathcal{G}} = \vec{0}$, $\mathcal{E}$ est équivalent à zéro.

(1) L'énoncé connu autrefois sous le nom de Théorème de Varignon « Le moment en un point de la résultante de glisseurs concourants est la somme des moments en ce point des glisseurs considérés » ne fait que traduire autrement l'équivalence de deux systèmes de glisseurs.

187. *Réduction d'un système de glisseurs à deux glisseurs.* — 1° Soit $\mathcal{E}$ un système de glisseurs, $\mathcal{T}$ le torseur dont il est un représentant. Plaçons-nous dans le cas général où l'invariant scalaire $\mathcal{J}$ de $\mathcal{T}$ n'est pas nul (1); soit $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{G}}_0$ les coordonnées vectorielles de $\mathcal{T}$ en O (fig. 50).

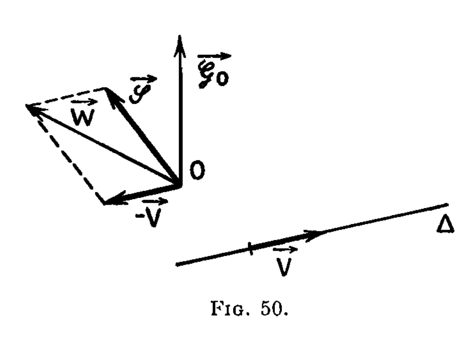


FIG. 50.

On peut représenter le couple dont $\vec{\mathcal{G}}_0$ est le moment par un système de deux glisseurs parallèles dans le plan perpendiculaire en O à $\vec{\mathcal{G}}_0$; l'un d'eux $(\Delta, \vec{V})$ peut être choisi de façon que Δ ne contienne pas O; l'autre est le glisseur $(O, -\vec{V})$.

$\mathcal{T}$ est ainsi représenté par le système des glisseurs $(O, \vec{\mathcal{S}})$, $(O, -\vec{V})$, $(\Delta, \vec{V})$; or les deux premiers sont deux glisseurs concourants, on peut donc remplacer leur système par le glisseur $(O, \vec{\mathcal{S}} - \vec{V})$ qui lui est équivalent.

Finalement $\mathcal{T}$ est représenté par le système des deux glisseurs

$$(\Delta, \vec{V}) \quad \text{et} \quad (O, \vec{\mathcal{S}} - \vec{V}).$$

Cette représentation est susceptible d'une infinité de solutions.

Examinons maintenant, à titre d'exercice, un problème plus précis.

2° **Problème.** — *Peut-on représenter un torseur $\mathcal{T}$ par un système de deux glisseurs dont l'un ait un support donné Δ?*

a) SOLUTION ANALYTIQUE. — Rapportons $\mathcal{T}$ à un repère orthonormé dont l'axe Oz est confondu avec l'axe central de $\mathcal{T}$; ses coordonnées scalaires sont 0, 0, Z, 0, 0, N ($NZ \neq 0$).

La droite Δ est donnée par les coordonnées α, β, γ, λ, μ, ν du glisseur unitaire $(\Delta, \vec{u})$ qui a pour support Δ; un glisseur porté par Δ est alors défini par $(\Delta, \rho\vec{u})$, ρ étant un réel non nul.

Les données α, β, γ, λ, μ, ν vérifient par hypothèse la relation

$$(1) \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$$

Soit $\mathcal{V}$ un glisseur quelconque de coordonnées a, b, c, l, m, n; par hypothèse

$$(2) \qquad al + bm + cn = 0.$$

$\mathcal{T}$ est représenté par $\mathcal{E} = \{(\Delta, \rho\vec{u}), \mathcal{V}\}$ si et seulement si on peut trouver ρ, a, b, c, l, m, n de façon que

$$(3) \begin{cases} \rho\alpha + a = 0 \\ \rho\beta + b = 0 \\ \rho\gamma + c = Z \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} \rho\lambda + l = 0 \\ \rho\mu + m = 0 \\ \rho\nu + n = N. \end{cases}$$

(1) Si $\mathcal{T}$ admet pour résultante un glisseur unique, la réduction à deux glisseurs est sans intérêt.

Si $\mathcal{T}$ est un couple, nous savons le représenter par un système de deux glisseurs à supports parallèles.

En résolvant les équations (3) et (4) en a, b, c, l, m, n et en substituant dans (2), on obtient, en tenant compte de (1)

$$(5) \qquad \rho(\gamma N + \nu Z) = NZ.$$

Si Δ n'est pas une droite de moment nul ($\gamma N + \nu Z \neq 0$), on obtient une valeur non nulle de ρ à laquelle correspond le glisseur $(\Delta, \rho \vec{u})$; les équations (3) et (4) donnent alors les coordonnées du glisseur $\mathcal{V}$; les coordonnées a, b, c sont nulles, et le problème n'est pas possible dans le seul cas où Δ est parallèle à l'axe central ($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\lambda = \mu = \nu = 0$).

b) SOLUTION GÉOMÉTRIQUE. — Soit O un point de la droite donnée Δ, $\vec{\mathcal{S}} = \vec{OS}$ et $\vec{\mathcal{G}_0} = [\vec{OG}]$ les coordonnées vectorielles en O du torseur $\mathcal{T}$ (nous supposons $\mathcal{I} = \vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{G}_0} \neq 0$) (fig. 51).

Analyse. — Si $\mathcal{T}$ est représenté par le système des glisseurs $\mathcal{V} = (\Delta, \vec{V})$ et $\mathcal{V}' = (\Delta', \vec{V'})$

$$\vec{\mathcal{M}'_0}(\mathcal{V}') = \vec{OG}.$$

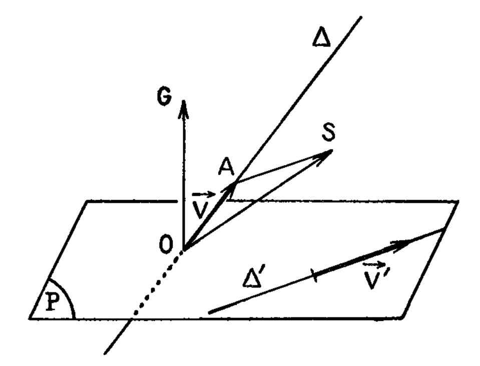


FIG. 51.

Δ' est située dans le plan P mené par O perpendiculaire à $\vec{OG}$; $\vec{V'}$ est orthogonal à $\vec{OG}$; c'est donc que si $\vec{V} = \vec{OA}$, $\vec{AS} = \vec{V'}$ est dans le plan perpendiculaire à $\vec{OG}$ mené par S.

Synthèse. — Supposons Δ distincte de OS (c'est-à-dire non parallèle à l'axe central), et non perpendiculaire à OG (c'est-à-dire Δ n'est pas une droite de moment nul). Le plan perpendiculaire à OG, mené par S, coupe Δ en A;

$$\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{AS}.$$

On peut trouver dans le plan P perpendiculaire en O à $\vec{OG}$ un glisseur $(\Delta', \vec{V'} = \vec{AS})$ dont le moment en O soit $[\vec{OG}]$; le système des glisseurs $(O, \vec{OA})$ et $(\Delta', \vec{V'})$ représente le torseur $\mathcal{T}$ donné.

Pour une droite Δ donnée, la détermination des deux glisseurs ne dépend pas du choix de O : en effet $\mathcal{I} = (\vec{V} + \vec{V'}).\vec{OG}$ ou $\vec{V}.\vec{OG}$ ne dépend pas de O; or si O_1 est un autre point de Δ,

$$\vec{O_1G_1} = \vec{OG} + \vec{O_1O} \wedge (\vec{V} + \vec{V'})$$
$$\vec{O_1G_1} = \vec{OG} + \vec{O_1O} \wedge \vec{V'}$$

Comme $\vec{V}$ et $\vec{O_1O}$ sont colinéaires

$$\vec{V}.\vec{O_1G_1} = \vec{V}.\vec{OG} = \mathcal{I},$$

ce qui montre que la détermination de $\vec{V}$ est indépendante du choix de O.

188. ***Système de glisseurs dont les supports sont coplanaires.*** — 1° Soit $\mathcal{V}_i = (\Delta_i, \vec{V_i})$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) un glisseur dont le support est situé dans le plan H.

Le moment de $\mathcal{V}_i$ en un point O de H est nul ou perpendiculaire à H; le moment en O, $\vec{\mathcal{G}}_O$, du système $\mathcal{E}$ de ces glisseurs est nul ou perpendiculaire à H.

La somme $\vec{\mathcal{S}} = \vec{V}_1 + \ldots + \vec{V}_n$ est nulle ou parallèle au plan H.

a) Supposons $\vec{\mathcal{S}} \neq \vec{0}$; $\mathcal{E}$ est équivalent à un glisseur unique, équipollent à $\vec{\mathcal{S}}$, soit $(D, \vec{\mathcal{S}})$, déterminé par la condition

$$\vec{\mathcal{G}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O^t (D, \vec{\mathcal{S}}).$$

b) Supposons $\vec{\mathcal{S}} = \vec{0}$, $\vec{\mathcal{G}}_O \neq \vec{0}$; $\mathcal{E}$ est équivalent à un couple.

c) Supposons $\vec{\mathcal{S}} = \vec{0}$, $\vec{\mathcal{G}}_O = \vec{0}$; $\mathcal{E}$ est équivalent à zéro.

En résumé :

Un système non nul de glisseurs dont les supports sont dans un même plan est équivalent soit à un glisseur unique, soit à un couple.

2° **Étude analytique.** — Soit $Oxyz$ un repère orthonormé, Ox et Oy étant situés dans H, Oz perpendiculaire à H.

$\mathcal{V}_i$ a pour coordonnées X_i, Y_i, 0, 0, 0, N_i. Le torseur $\mathcal{T}$ dont $\mathcal{E}$ est un représentant a pour coordonnées

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad N = \Sigma N_i.$$

Si X et Y ne sont pas nuls tous deux, l'équation du support D du glisseur équivalent traduit le fait que

$$\vec{\mathcal{G}}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\mathcal{S}}, \qquad P(x, y) \in D$$

soit

$$N = x Y - y X.$$

189. ***Système de glisseurs parallèles.*** — 1° *On dit que des glisseurs sont parallèles lorsque leurs supports sont parallèles.*

Orientons la direction commune à tous les supports; soit $\vec{U}$ le vecteur unitaire correspondant.

Soit $\mathcal{V}_i = (A_i, \lambda_i \vec{U})$ un glisseur du système déterminé par un point A_i de son support ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Soit $\mathcal{T}$ le torseur associé au système $\mathcal{E}$ des glisseurs $\mathcal{V}_i$.

La somme de $\mathcal{T}$ est $\vec{\mathcal{S}} = \lambda \vec{U}$, $\lambda = \Sigma \lambda_i$.

Le moment de $\vec{\mathcal{T}}$ en O est

$$\vec{\mathcal{G}}_O = \Sigma \overrightarrow{OA_i} \wedge (\lambda_i \vec{U}) \quad \text{ou} \quad (\Sigma \lambda_i \overrightarrow{OA_i}) \wedge \vec{U}.$$

$\vec{\mathcal{S}}$ est nulle, ou parallèle à δ;

$\vec{\mathcal{G}}_O$ est nul, ou orthogonal à δ.

2° **Cas général** : $\Sigma \lambda_i \neq 0$ ou $\vec{\mathcal{G}} \neq \vec{0}$. $\mathcal{T}$ est représenté par un glisseur unique; un point M du support de ce glisseur est déterminé par la condition que le moment de $\mathcal{T}$ en M est nul, c'est-à-dire

$$\vec{\mathcal{G}}_M = \Sigma \overrightarrow{MA_i} \wedge \left(\lambda_i \vec{U}\right) = \vec{0}$$

ou

$$\left(\Sigma \lambda_i \overrightarrow{MA_i}\right) \wedge \vec{U} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Quelle que soit la direction δ, le barycentre G des points pondérés $A_i(\lambda_i)$ est un point M satisfaisant à l'égalité (1).

Le glisseur d'origine G, équipollent à $(\Sigma\lambda_i)\vec{U}$ est un représentant de $\mathcal{T}$; c'est la *résultante* du système des glisseurs parallèles.

Énonçons ce résultat :

Théorème. — **Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les mesures algébriques de glisseurs parallèles au vecteur unitaire $\vec{U}$; si la somme $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ n'est pas nulle, ces glisseurs ont une résultante qui est un glisseur parallèle à $\vec{U}$, de mesure algébrique λ et dont un représentant a pour origine le barycentre des origines des représentant des glisseurs donnés, affectées des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.**

Ce résultat est utilisé dans la mécanique du corps solide.

Remarque. — Si l'on change les points A_i sur les supports des glisseurs donnés, le point G reste sur la droite support de la résultante du système.

3° **Cas particuliers.** — *a)* Si $\lambda = 0$, $\vec{\mathcal{G}}_0 \neq \vec{0}$, la torseur $\mathcal{T}$ est un couple qui admet $\vec{\mathcal{G}}_0$ pour moment;

b) si $\lambda = 0$ et $\vec{\mathcal{G}}_0 = \vec{0}$, $\mathcal{T}$ est le torseur nul.

4° **Étude analytique.** — Soit un repère orthonormé $Oxyz$; $\vec{U}$ a pour coordonnées α, β, γ, et le point A_i a pour coordonnées x_i, y_i, z_i. Le torseur $\mathcal{T}$ a pour coordonnées scalaires

$X = \lambda\alpha,\ Y = \lambda\beta,\ Z = \lambda\gamma,$

$L = \gamma \Sigma \lambda_i y_i - \beta \Sigma \lambda_i z_i, \quad M = \alpha \Sigma \lambda_i z_i - \gamma \Sigma \lambda_i x_i, \quad N = \beta \Sigma \lambda_i x_i - \alpha \Sigma \lambda_i y_i.$

a) Si $\lambda \neq 0$, le support de la résultante passe par le point G

$$\xi = \frac{\Sigma\lambda_i x_i}{\lambda}, \qquad \eta = \frac{\Sigma\lambda_i y_i}{\lambda}, \qquad \zeta = \frac{\Sigma\lambda_i z_i}{\lambda}$$

b) Pour que $\mathcal{T}$ soit le torseur nul, il faut et il suffit que soient remplies les conditions suivantes :

$$\Sigma \lambda_i = 0, \qquad \frac{\Sigma \lambda_i x_i}{\alpha} = \frac{\Sigma \lambda_i y_i}{\beta} = \frac{\Sigma \lambda_i z_i}{\gamma},$$

avec la convention habituelle sur les rapports égaux. C'est le cas où le système des points pondérés $A_i(\lambda_i)$ est astatique (I, n° 67).

190. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de trois glisseurs soit équivalent à zéro.* — On donne les trois glisseurs

$$\mathcal{V}_1 = \left(\Delta_1, \vec{V}_1\right), \qquad \mathcal{V}_2 = \left(\Delta_2, \vec{V}_2\right), \qquad \mathcal{V}_3 = \left(\Delta_3, \vec{V}_3\right).$$

Comment les choisir pour que le système $\mathcal{E} = \{ \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3 \}$ soit équivalent à zéro?

1° *Analyse.* — Supposons $\mathcal{E}$ équivalent à zéro;

$$\forall \vec{D}, \qquad \mathcal{M}'_{\vec{D}}(\mathcal{E}) = 0.$$

Par suite toute droite D rencontrant Δ_1 et Δ_2 rencontre aussi Δ_3 ou lui est parallèle. Prenons un point fixe P sur Δ_1; toute droite issue de P dans le plan (P, Δ_2) doit être située dans le plan (P, Δ_3); les plans (P, Δ_2) et (P, Δ_3) sont confondus, et comme cela a lieu quel que soit P sur Δ_1, c'est que Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont coplanaires.

Si Δ_1 et Δ_2 concourent en O, le moment en O de $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ étant déjà nul, le moment de $\mathcal{V}_3$ est nul aussi, et Δ_3 passe par O.

Si Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, Δ_3 leur est donc aussi parallèle.

On peut, en résumé, énoncer :

Si trois glisseurs forment un système équivalent à zéro, leurs supports sont dans un même plan, et dans ce plan, ils sont concourants ou parallèles.

2° *Synthèse.* — *a*) *Cas de trois glisseurs concourants.* — Soit O le point de concours dans le plan Π; il suffit de construire dans Π trois vecteurs d'origine O, de somme nulle $\vec{OA}_1 = \vec{V}_1$, $\vec{OA}_2 = \vec{V}_2$, $\vec{OA}_3 = \vec{V}_3$

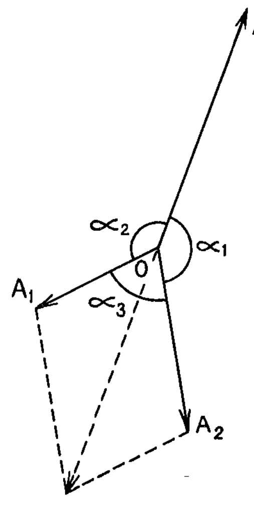


Fig. 52.

avec $$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$$

pour que les glisseurs $\mathcal{V}_1 = \left(O, \vec{V}_1\right)$, $\mathcal{V}_2 = \left(O, \vec{V}_2\right)$, $\mathcal{V}_3 = \left(O, \vec{V}_3\right)$ forment un système équivalent à zéro (fig. 52).

L'un quelconque des trois glisseurs est opposé à la résultante des deux autres.

On peut exprimer cette condition de la façon suivante : soit

$$\alpha_1 = \widehat{A_2OA_3}, \qquad \alpha_2 = \widehat{A_3OA_1}, \qquad \alpha_3 = \widehat{A_1OA_2}.$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0} \implies \begin{cases} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 = \vec{0} \\ \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \vec{0} \end{cases}$$

ou encore

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1 \qquad (1)$$

L'égalité des modules entraîne

$$V_1V_2 \sin\alpha_3 = V_2V_3 \sin\alpha_1 = V_3V_1 \sin\alpha_2 \tag{2}$$

ou

$$\frac{\sin\alpha_1}{V_1} = \frac{\sin\alpha_2}{V_2} = \frac{\sin\alpha_3}{V_3}. \tag{3}$$

Inversement, supposons la condition (3) réalisée, les angles arithmétiques α_1, α_2, α_3 ayant une somme égale à 2π; chaque demi-droite OA_1, OA_2, OA_3 est dans l'angle rentrant des deux autres; les produits vectoriels $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$, $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$, $\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}$ ont le même sens sur la perpendiculaire en O au plan Π; (3) ou (2) exprime l'égalité des modules, par suite (1) est vérifié. Comme il existe deux scalaires α et β tels que $\vec{V_3} = \alpha\vec{V_1} + \beta\vec{V_2}$, les relations (1) donnent $\alpha = -1$, $\beta = -1$, c'est donc que

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = \vec{0},$$

et le système des trois glisseurs $(\overrightarrow{OA_1})$, $(\overrightarrow{OA_2})$, $(\overrightarrow{OA_3})$ est équivalent à zéro.

b) Cas de trois glisseurs parallèles. — Supposons donnés, avec les notations du n° **189**, les glisseurs

$$\mathcal{V}_1 = (A_1, \lambda_1\vec{U}), \qquad \mathcal{V}_2 = (A_2, \lambda_2\vec{U}), \qquad \mathcal{V}_3 = (A_3, \lambda_3\vec{U});$$

ils forment un système équivalent à zéro si le glisseur $\mathcal{V}_3$ est opposé à la résultante de $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$; cherchons celle-ci : elle est équipollente au vecteur $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{U}$, et un point de son support est le barycentre G de $A_1(\lambda_1)$ et $A_2(\lambda_2)$, c'est-à-dire le point défini sur la droite A_1A_2 par

$$\lambda_1\overline{GA_1} + \lambda_2\overline{GA_2} = 0.$$

Sur la figure 53, cette résultante est représentée par $\overrightarrow{GC}$.

En prenant sur la parallèle à $\vec{U}$ menée par G le glisseur équipollent à $\lambda_3\vec{U}$, avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

on aura constitué un système équivalent à zéro formé de trois glisseurs parallèles.

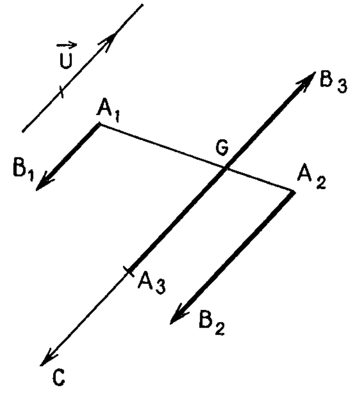


FIG. 53.

Les supports Δ_1, Δ_2, Δ_3 rencontrent une droite quelconque de leur plan en trois points P_1, P_2, P_3 tels que

$$\lambda_1\overline{P_3P_1} + \lambda_2\overline{P_3P_2} = 0,$$

ce qui s'exprime encore par

$$\frac{\lambda_1}{\overline{P_2P_3}} = \frac{\lambda_2}{\overline{P_3P_1}} \quad \text{ce qui est encore égal à} \quad \frac{\lambda_3}{\overline{P_1P_2}}.$$

Inversement, si trois glisseurs de supports parallèles coplanaires rencontrent une droite de leur plan en des points P_1, P_2, P_3 tels que

$$\frac{\lambda_1}{\overline{P_2P_3}} = \frac{\lambda_2}{\overline{P_3P_1}} = \frac{\lambda_3}{\overline{P_1P_2}} \tag{1}$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant leurs mesures algébriques, ces trois glisseurs forment un système équivalent à zéro. En effet (1) entraîne $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, le point P_3 étant barycentre de $P_1(\lambda_1)$ et $P_2(\lambda_2)$.

EXERCICES

1. — Étant donné deux glisseurs $(D, \vec{u})$, $(D', \vec{u'})$, non coplanaires, on les représente en géométrie descriptive, après avoir choisi un plan frontal de projection parallèle à D et à D'. Construire les projections de l'axe central du torseur qu'ils représentent. Conclure du résultat que, lorsque deux glisseurs sont les représentants d'un torseur $\mathcal{T}$, la perpendiculaire commune à leurs supports rencontre orthogonalement l'axe central de $\mathcal{T}$.

Retrouver ce résultat par le calcul en utilisant un repère convenablement choisi.

2. — L'invariant $\mathcal{I}$ d'un torseur $\mathcal{T}$ est la somme des comoments des glisseurs pris deux à deux d'un système équivalent à $\mathcal{T}$.

Application : la somme de deux glisseurs peut-elle être un glisseur unique?

3. — Lieu de l'axe central d'un torseur ayant pour représentant le système formé par :

a) un glisseur fixe et un glisseur variable dont le support passe par un point fixe;

b) deux glisseurs fixes, et un glisseur variable ayant un support fixe.

c) deux glisseurs dont les supports sont fixes.

4. — On donne un torseur $\mathcal{T}$ et une droite Δ; M étant un point quelconque de Δ, soit $[\overrightarrow{MK}]$ le moment de $\mathcal{T}$ en M; trouver, lorsque M décrit Δ :

a) le lieu du point K;

b) la surface engendrée par le support de $[\overrightarrow{MK}]$.

5. — On donne un torseur $\mathcal{T}$ et un point A; trouver le lieu des points M tels que le support du moment de $\mathcal{T}$ en M passe par A; trouver la surface engendrée par la droite AM.

6. — On donne un torseur $\mathcal{T}$ et une droite D; trouver le lieu des points M tels que le support du moment de $\mathcal{T}$ en M s'appuie sur D.

7. — Le repère étant orthonormé, soit $\mathcal{T}$ un torseur dont les coordonnées sont

$$X,\ Y,\ Z,\ \alpha X,\ \beta Y,\ \gamma Z$$

α, β, γ étant des constantes données.

A quelle condition $\mathcal{T}$ est-il équivalent à un glisseur unique? Trouver la surface engendrée par les supports des glisseurs auxquels $\mathcal{T}$ peut être équivalent.

8. — Dans un repère orthonormé, on donne trois glisseurs (α), (β), (γ) ayant pour supports respectifs les droites d'équations

$$(y + b = 0,\quad z - c = 0),\quad (z + c = 0,\quad x - a = 0),\quad (x + a = 0,\quad y - b = 0).$$

Les vecteurs de ces glisseurs ont pour mesures algébriques, respectivement,

$$p \text{ sur } Ox, \qquad q \text{ sur } Oy, \qquad r \text{ sur } Oz.$$

a) Trouver les équations de l'axe central du torseur $\mathcal{T}$ déterminé par ces trois glisseurs.

b) Comment choisir p, q, r pour que $\mathcal{T}$ ait pour représentant un glisseur unique? Trouver alors la surface engendrée par le support de ce glisseur unique.

9. — Lieu des points où deux torseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ ont des moments :
a) de même longueur; *b*) perpendiculaires.

10. — On donne un axe Δ et un glisseur, qu'on notera γ_0, dont le support ne rencontre pas Δ. On désigne par γ_θ le glisseur déduit de γ_0 par la rotation d'axe Δ, d'angle θ. Déterminer l'axe central D du torseur déterminé par les glisseurs γ_0 et γ_θ. Démontrer que D rencontre une droite fixe lorsque θ varie.

11. — On donne un plan Π et un torseur $\mathcal{T}$ dont l'axe central coupe Π.
a) Montrer qu'il existe un, et un seul, point F de Π en lequel le moment de $\mathcal{T}$ est perpendiculaire à Π.
b) Trouver un système représentant $\mathcal{T}$ et constitué par un glisseur $\mathcal{V}_1$ perpendiculaire à Π, et un glisseur $\mathcal{V}_2$ situé dans Π. En utilisant un repère convenablement choisi, on donnera les coordonnées de ces glisseurs, les équations de leurs supports.
c) Trouver le lieu L des points M de Π en lesquels le moment de $\mathcal{T}$ a un support Δ situé dans Π; trouver l'enveloppe de Δ quand M décrit L.
d) Trouver l'enveloppe des droites de Π par rapport auxquelles $\mathcal{T}$ a un moment dont la valeur absolue est donnée.

12. — On donne un torseur $\mathcal{T}$ et un point A. Montrer que l'on peut, d'une infinité de façons, représenter $\mathcal{T}$ par un système formé de deux glisseurs $(D_1, \vec{V}_1)$ et $(D_2, \vec{V}_2)$ vérifiant les deux conditions suivantes :
a) D_1 passe par A;
b) D_1 et D_2 sont orthogonaux.
Trouver le lieu de D_1 et l'enveloppe de D_2.
Reprendre le problème en remplaçant la condition *b*) par l'une ou l'autre des suivantes :

$$b')\ \|\vec{V}_1\| = k, \quad k \text{ étant donné;}$$
$$b'')\ \|\vec{V}_2\| = \rho\,\|\vec{V}_1\|, \ \rho \text{ étant donné.}$$

13. — On donne un tétraèdre ABCD et un torseur $\mathcal{T}$; trouver un représentant de $\mathcal{T}$ formé par six glisseurs ayant pour supports respectifs les arêtes du tétraèdre.

14. — On donne un tétraèdre ABCD. Le vecteur $\vec{\alpha}$ a pour origine A; il est perpendiculaire au plan BCD et dirigé vers ce plan; sa longueur est le produit de l'aire du triangle BCD par un nombre k donné; on définit de façon analogue les vecteurs $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$. Déterminer les éléments de réduction du système formé par les quatre glisseurs respectivement représentés par $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$.

15.* — On donne les deux vecteurs orthogonaux $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Un premier glisseur, équipollent à $\vec{A}$, admet $\vec{B}$ pour moment en O; un second glisseur, équipollent à $\vec{B}$, admet $\vec{A}$ pour moment en O. Montrer que les supports des deux glisseurs sont des droites conjuguées par rapport à la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$.

16. — On donne un axe Δ et un angle θ. La rotation $\mathcal{R}$ d'axe Δ, d'angle θ transforme M en M'.
a) Démontrer que si $\theta \neq \pi + 2k\pi$, et si H est le milieu de MM', le vecteur $[\overrightarrow{HM'}]$ est le moment, par rapport à H, d'un vecteur glissant $\vec{\Omega}$ indépendant de M et dont le support est Δ.
b) L'espace est rapporté à un repère orthonormé dont l'origine O est un point de Δ. On donne les composantes λ, μ, ν du vecteur $\vec{\Omega}$. Trouver la matrice de la rotation $\mathcal{R}$.
c) Que devient cette matrice quand on y remplace λ, μ, ν par $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$, $\frac{r}{s}$? Démontrer que la matrice de la symétrie par rapport à Δ s'obtient en remplaçant s par 0 dans la matrice précédente.

17. — Soit deux torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ définis par leurs coordonnées vectorielles au point O

$$\vec{s}_1 \quad \text{et} \quad \vec{m}_1 = \left(\vec{\mathcal{G}}_1\right)_O \qquad \text{pour } \mathcal{T}_1$$
$$\vec{s}_2 \quad \text{et} \quad \vec{m}_2 = \left(\vec{\mathcal{G}}_2\right)_O \qquad \text{pour } \mathcal{T}_2.$$

a) On appelle comoment de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ le scalaire

$$\mathcal{M} = \vec{s}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{m}_1;$$

montrer que $\mathcal{M}$ ne dépend pas du point O choisi pour définir les coordonnées de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

b) Montrer que si le comoment $\mathcal{M}$ est nul, et si $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, les axes centraux des deux torseurs se rencontrent à angle droit.

c) On associe à $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ le torseur $\mathcal{T}$ ayant pour coordonnées vectorielles en O

$$\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2, \qquad \vec{s}_1 \wedge \vec{m}_2 - \vec{s}_2 \wedge \vec{m}_1.$$

Montrer que l'axe central de $\mathcal{T}$ est la perpendiculaire commune aux axes centraux de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

d) On considère un troisième torseur $\mathcal{T}_3$, de coordonnées vectorielles $\vec{s}_3$ et $\vec{m}_3$ en O.

On suppose que la somme des torseurs $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ est le torseur nul.

Montrer qu'alors les axes centraux de $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ rencontrent orthogonalement une même droite.

Cette droite est l'axe central du torseur Θ défini par ses coordonnées

$$\vec{\sigma} = \vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \wedge \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \wedge \vec{s}_1$$
$$\vec{\mu} = \vec{s}_1 \wedge \left(\vec{m}_2 - \vec{m}_3\right) + \vec{s}_2 \wedge \left(\vec{m}_3 - \vec{m}_1\right) + \vec{s}_3 \wedge \left(\vec{m}_1 - \vec{m}_2\right)]$$

e) On peut alors en déduire le théorème de Morley-Petersen : Soit D_1, D_2, D_3 trois droites quelconques; Δ_1, Δ_2, Δ_3, les perpendiculaires communes à D_2 et D_3, D_3 et D_1, D_1 et D_2; soit X_i la perpendiculaire commune à D_i et Δ_i $(i = 1, 2, 3)$: les droites X_1, X_2, X_3 coupent orthogonalement une même droite.

D_i est le support du glisseur $\left(\vec{s}_i, \vec{m}_i\right)$ avec $\vec{s}_i \cdot \vec{m}_i = 0$.

Δ_1 est l'axe central du torseur qui a pour coordonnées

$$\vec{l}_1 = \vec{s}_2 \wedge \vec{s}_3, \qquad \vec{n}_1 = \vec{s}_2 \wedge \vec{m}_3 - \vec{s}_3 \wedge \vec{m}_2$$

X_1 est l'axe central du torseur $\mathcal{T}'_1$ qui a pour coordonnées

$$\vec{s}_1 \wedge \vec{l}_1; \qquad \vec{s}_1 \wedge \vec{n}_1 - \vec{l}_1 \wedge \vec{m}_1.$$

On applique alors le *d*).

CHAPITRE XV

LE CERCLE ET LA SPHÈRE

Nous nous proposons d'étendre et de compléter l'étude analytique du cercle et de la sphère abordée dans les classes antérieures.

Pour l'étude du cercle, nous nous placerons dans le plan métrique $\mathcal{E}_2$ rapporté au repère orthonormé $\{ O, \vec{i}, \vec{j} \}$.

Pour l'étude de la sphère, nous nous placerons dans l'espace métrique $\mathcal{E}_3$, rapporté au repère orthonormé $\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$.

Il nous arrivera d'introduire les complexifiés de $\mathcal{E}_2$ et de $\mathcal{E}_3$, mais dans ce cas nous nous astreindrons à n'utiliser que des repères orthonormés réels, et à ne considérer que des courbes et des surfaces ayant des équations algébriques à coefficients réels.

Dans certains cas, nous traiterons seulement le cas de la sphère, celui du cercle s'en déduisant par la suppression de la coordonnée z.

I. REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

191. *Équation cartésienne de la sphère.* — 1° Soit S la sphère de centre I (a, b, c) et de rayon R ; l'appartenance d'un point $M(x, y, z)$ à la sphère S se traduit, par définition, par la condition

$$M \in S \iff IM = R \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{IM}^2 = R^2.$$

L'équation de (S) est ainsi

$$(1) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

En ordonnant par groupes homogènes de degrés décroissants, on écrit

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,ax - 2\,by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0.$$

Le premier membre de (2) est un polynôme de degré 2 en x, y, z; ce n'est pas le polynôme le plus général de degré 2 : on constate que les termes *carrés* en x^2, y^2, z^2 ont des coefficients égaux, non nuls et que les termes *rectangles* en yz, zx, xy ont des coefficients nuls.

2° Inversement, considérons l'équation

$$(3) \quad K(x^2 + y^2 + z^2) + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0, \qquad K \neq 0$$

à coefficients réels, dans laquelle le premier membre a des coefficients égaux pour les termes carrés, et des coefficients nuls pour les termes rectangles.

En divisant par K l'ensemble des coefficients, on ramène à l'unité les coefficients égaux des termes carrés, et l'on peut écrire l'équation équivalente

$$(4) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + p = 0.$$

Une décomposition en carrés portant successivement sur x, y, z conduit à la forme

$$(5) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p.$$

La comparaison avec (1) porte sur le signe du second membre, puisque toutes les lettres désignent des nombres réels; posons

$$k = a^2 + b^2 + c^2 - p.$$

a) Si $k > 0$, l'équation (5) représente la sphère de centre I (a, b, c), de rayon $\sqrt{k}$.

b) Si $k = 0$, un seul point vérifie l'équation (5), le point I (a, b, c); on convient que l'équation (5) est celle de la sphère de centre I, de rayon nul.

c) Si $k < 0$, l'équation (5) n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point réel. On convient de dire qu'elle représente, dans l'espace complexifié de $\mathcal{E}_3$, une sphère imaginaire ayant pour centre le point I (a, b, c) et dont le rayon est un nombre imaginaire pur ayant pour carré k.

REMARQUE. — Les équations (3) et (4) sont équivalentes; l'équation (4) est dite *équation normale* de la sphère; sous cette forme les coordonnées du centre sont mises en évidence. Passer de l'équation (3) à l'équation (4), c'est *normaliser* l'équation de la sphère.

Le plus souvent, c'est sous la forme normale que nous chercherons, ou que nous nous donnerons l'équation d'une sphère.

3° **Cas particuliers.** — *a*) La sphère de centre O et de rayon R a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

b) La sphère de centre I $(a, 0, 0)$ sur Ox, et qui passe par O, est tangente en O au plan yOz; son rayon est $R = OI = |a|$; son équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0.$$

c) La sphère qui passe par O et recoupe les axes de coordonnées respectivement aux points

$$A(a, 0, 0), \qquad B(0, b, 0), \qquad C(0, 0, c)$$

a pour centre le point commun I aux trois plans médiateurs des segments OA, OB, OC; I a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$; l'équation de la sphère est donc

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0.$$

La nullité du terme constant exprime que l'origine appartient à la sphère.

d) Soit S la sphère ayant pour diamètre le segment joignant les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$M \in S \iff \widehat{M_1MM_2} = \frac{\pi}{2} \iff \overrightarrow{MM_1}.\overrightarrow{MM_2} = 0;$$

l'équation de S est ainsi

$$(x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1 - y)(y_2 - y) + (z_1 - z)(z_2 - z) = 0$$

ou encore

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y - (z_1 + z_2)z + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

On reconnaît le centre I, milieu de M_1M_2, qui a pour coordonnées

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad b = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad c = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Nous interpréterons plus loin le terme constant, qui est $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}$.

192. ***Équation cartésienne du cercle.*** — 1° Les raisonnements et les résultats vus au n° **191** s'appliquent, lorsqu'on se limite, dans le cas du plan rapporté à un repère orthonormé, à l'étude du cercle.

C'est sous la forme normale

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + p = 0$$

que, le plus souvent, nous chercherons, ou nous nous donnerons l'équation d'un cercle en géométrie plane.

2° **Détermination d'un cercle.** — L'équation générale des cercles d'un plan pouvant s'écrire

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\,\alpha x - 2\,\beta y + \gamma = 0,$$

elle dépend de trois paramètres α, β, γ. Il résulte de là que pour déterminer un cercle situé dans un plan donné on peut l'assujettir à des conditions se traduisant par trois équations entre les coefficients α, β, γ de l'équation générale des cercles de ce plan.

Exemple I. — *Un triangle* ABC *étant rapporté à un repère orthonormé tel que la droite* BC *porte l'axe $x'x$ et la perpendiculaire menée de* A *à $x'x$ porte l'axe $y'y$, former l'équation du cercle circonscrit au triangle.* Soient b et c les abscisses des points B et C et a l'ordonnée de A. Le cercle représenté par l'équation générale (1) rencontre $x'x$ aux points qui ont pour abscisses les racines de l'équation

$$x^2 - 2\,\alpha x + \gamma = 0.$$

Pour que ce cercle passe par B et C, il faut et il suffit que les racines de cette équation soient b et c et pour cela que $2\alpha = b + c$ et $\gamma = bc$.

En écrivant que le cercle passe par A on trouve $2\beta = \frac{a^2 + bc}{a}$ et l'on obtient pour l'équation du cercle Γ circonscrit au triangle

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 - (b + c)x - \left(a + \frac{bc}{a}\right) y + bc = 0.$$

Exemple II. — *Former l'équation du cercle circonscrit au triangle* ABC *déterminé par les équations normales des droites* BC, CA, AB, *soit* $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$,

$$P \equiv x \cos\alpha + y \sin\alpha - p, \quad Q \equiv x \cos\beta + y \sin\beta - q, \quad R \equiv x \cos\gamma + y \sin\gamma - r.$$

Quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres λ, μ, ν l'équation

$$(3) \qquad \lambda QR + \mu RP + \nu PQ = 0$$

est vérifiée par les coordonnées des sommets A, B, C du triangle puisque les coordonnées de chacun de ces points annulent deux des polynômes P, Q, R. On va constater qu'il est possible de déterminer λ, μ, ν de façon que l'équation (3) présente les caractères de l'équation d'un cercle; l'équation obtenue sera l'équation demandée puisqu'on sait qu'il n'existe qu'un seul cercle contenant les points A, B, C.

Écrivons donc que dans le premier membre de l'équation (3) les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et que celui de xy est nul, nous trouvons ainsi

$$\lambda \cos(\beta + \gamma) + \mu \cos(\gamma + \alpha) + \nu \cos(\alpha + \beta) = 0$$
$$\lambda \sin(\beta + \gamma) + \mu \sin(\gamma + \alpha) + \nu \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Ces deux équations linéaires et homogènes par rapport à λ, μ et ν montrent que ces inconnues doivent être proportionnelles à $\sin(\beta - \gamma)$, $\sin(\gamma - \alpha)$, $\sin(\alpha - \beta)$. Finalement nous obtenons pour représenter le cercle circonscrit au triangle ABC l'équation

$$QR \sin(\beta - \gamma) + RP \sin(\gamma - \alpha) + PQ \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

193. *Tangente au cercle.* — 1° En géométrie élémentaire, on a vu que la tangente Δ au cercle C (I, R) en un point P est la perpendiculaire en P au rayon IP.

C'est ce résultat que nous utiliserons pour obtenir l'équation cartésienne de Δ; au tome IV, ce résultat sera rattaché à la notion générale de tangente à une courbe.

Exemple. — Soit a et b les coordonnées du centre I du cercle C, x_0, y_0 les coordonnées du point P de C; si C est connu par son équation normale,

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\,ax_0 - 2\,by_0 + p = 0.$$

$$M(x, y) \in \Delta \iff \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{PM} = 0 \qquad \text{ou encore}$$

$$(1) \qquad (x_0 - a)\,(x - x_0) + (y_0 - b)\,(y - y_0) = 0.$$

L'équation (1) peut encore s'écrire

$$(x_0 - a)\,x + (y_0 - b)\,y + h = 0$$

avec

$$h = -x_0^2 - y_0^2 + ax_0 + by_0 \qquad \text{ou} \qquad h = -ax_0 - by_0 + p.$$

Finalement Δ a pour équation

$$xx_0 + yy_0 - a\,(x + x_0) - b\,(y + y_0) + p = 0.$$

2° **Équation tangentielle d'un cercle.** DÉFINITION. — **On appelle équation tangentielle d'une courbe plane C l'équation**

$$\varphi(u, v, h) = 0$$

qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour que la droite représentée par l'équation

$$ux + vy + h = 0$$

soit tangente à la courbe C.

Pour que la droite D qui a pour coordonnées tangentielles homogènes u, v, h soit tangente au cercle qui a pour rayon R et pour centre le point I (a, b), il faut et il suffit que la distance du centre à la droite soit égale au rayon, c'est-à-dire que

$$(au + bv + h)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0. \tag{2}$$

On a ainsi une équation tangentielle du cercle donné. Si le centre est à l'origine des coordonnées, cette équation se réduit à

$$h^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0.$$

Tangentes de direction donnée. Si le centre est à l'origine, les tangentes parallèles à la droite représentée par $ux + vy = 0$ correspondent à

$$h = \varepsilon R\sqrt{u^2 + v^2},$$

elles ont pour équations

$$ux + vy + \varepsilon R\sqrt{u^2 + v^2} = 0, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

En particulier les tangentes de coefficient directeur m ont pour équations

$$y - mx = \varepsilon R\sqrt{1 + m^2}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

ÉQUATION AUX COEFFICIENTS DIRECTEURS DES TANGENTES MENÉES D'UN POINT. — Pour que m soit le coefficient directeur de l'une des tangentes menées de $M_0(x_0, y_0)$, il faut et il suffit que l'équation

$$y - y_0 - m(x - x_0) = 0$$

représente une tangente au cercle et, pour cela, que la distance du centre à cette droite soit égale au rayon. En exprimant qu'il en est ainsi dans le cas où le cercle a pour centre l'origine et pour rayon R, on trouve

$$(y_0 - mx_0)^2 - R^2(1 + m^2) = 0.$$

Ordonnée, l'équation aux coefficients directeurs des tangentes menées de M_0 au cercle (O, R) s'écrit

$$m^2(x_0^2 - R^2) - 2mx_0y_0 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

194. ***Représentation paramétrique du cercle.*** — 1° *a*) — Le cercle C qui a pour centre I (a, b) et pour rayon R peut être représenté paramétriquement par les équations (fig. 54).

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + R\cos\varphi \\ y = b + R\sin\varphi \end{array}\right. \qquad \varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{IM}\right). \tag{1}$$

Cette représentation est propre si on convient, par exemple, de choisir φ dans l'intervalle $[0,\ 2\pi[$.

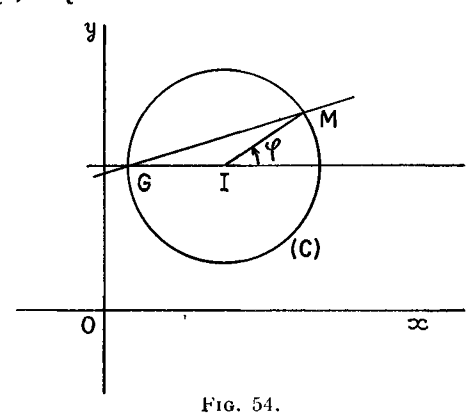


Fig. 54.

On obtient une représentation paramétrique rationnelle de C en posant

$$t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

$$(2) \qquad x = a + \mathrm{R}\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = b + \mathrm{R}\frac{2t}{1 + t^2}.$$

Cette représentation est propre, car t est le coefficient directeur de la droite GM, le point G étant le point dont l'abscisse est $a - \mathrm{R}$.

b) On obtient encore une représentation paramétrique d'un cercle C en coupant ce cercle par une droite Δ variable pivotant autour d'un point fixe de C.

Par exemple, soit C un cercle quelconque passant par O, et dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

La droite Δ issue de O, ayant t pour coefficient directeur, recoupe le cercle en un point M de coordonnées

$$x = 2\frac{\alpha + \beta t}{1 + t^2}, \qquad y = 2\frac{\alpha t + \beta t^2}{1 + t^2}.$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique de l'ensemble $\mathrm{C} - \{\mathrm{B}\}$, B étant le point d'ordonnée 2β sur l'axe Oy.

c) *Extension à la sphère.* — La sphère de centre I (a, b, c), de rayon R, et dont M est le point générique, peut être paramétrée au moyen des angles polaires du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ (nº 134, 3º). On obtient ainsi

$$\begin{cases} x = a + \mathrm{R}\cos\lambda\cos\theta \\ y = b + \mathrm{R}\cos\lambda\sin\theta \\ z = c + \mathrm{R}\sin\lambda. \end{cases}$$

2º **Intersection d'un cercle et d'une droite.** — Nous supposerons, dans la suite, le cercle C centré en O ($a = 0$; $b = 0$; équations (1) et (2) du 1º).

a) Soit Δ la droite d'équation

$$ux + vy + h = 0.$$

L'équation aux t des points communs à C et Δ est

(3) $$t^2(h - Ru) + 2\,Rvt + h + Ru = 0.$$

La condition de réalité des points communs s'écrit

$$R^2(u^2 + v^2) - h^2 \geqslant 0.$$

L'égalité redonne la condition de contact du n° **193**, 2°.

b) Études le problème inverse. On donne deux points de C : $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$; on demande l'équation de la droite M_1M_2.

Dans le problème étudié en *a*), les données étaient u, v, h, et les inconnues étaient les paramètres t_1 et t_2 des points communs à C et Δ; maintenant, t_1 et t_2 sont connus, et les paramètres u, v, h sont inconnus.

t_1 et t_2 n'interviennent que par leurs fonctions symétriques

$$t_1 + t_2 = s; \qquad t_1t_2 = p.$$

En écrivant que les équations (3) et

(4) $$t^2 - st + p = 0$$

ont les mêmes racines, on obtient les relations

$$\frac{h - Ru}{1} = \frac{-2\,Rv}{s} = \frac{h + Ru}{p}$$

qui permettent d'obtenir des valeurs proportionnelles pour u, v, h; l'équation de M_1M_2 est

(5) $$(1 - t_1t_2)x + (t_1 + t_2)\,y - R(1 + t_1t_2) = 0.$$

En remplaçant t_1 et t_2 par t dans l'équation (5), on obtient l'équation de la tangente à C au point $M(t)$:

(6) $$(1 - t^2)\,x + 2\,t\,y - R\,(1 + t^2) = 0.$$

L'équation (6) permet d'obtenir les valeurs t des points de contact des tangentes menées par un point donné $M_0(x_0, y_0)$:

(7) $$t^2(x_0 + R) - 2\,t\,y_0 + R - x_0 = 0.$$

Ces valeurs t sont réelles si, et seulement si,

$$x_0^2 + y_0^2 - R^2 \geqslant 0.$$

On obtient la corde des contacts en remplaçant, dans l'équation (5),

$$t_1 + t_2 \quad \text{par} \quad \frac{2\,y_0}{R + x_0}, \qquad t_1t_2 \quad \text{par} \quad \frac{R - x_0}{R + x_0}.$$

On retrouve ainsi la polaire de M_0 pour C (n° 200).

c) L'emploi du paramètre φ (équations (1)) donne les points communs à C et Δ par l'intermédiaire de l'équation — de type classique —

$$u\cos\varphi + v\sin\varphi + \frac{h}{R} = 0.$$

Le support de la corde $M_1(\varphi_1)$, $M_2(\varphi_2)$ est une droite dont on obtient aisément l'équation sous forme normale :

$$x\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - R\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0.$$

II. PUISSANCE D'UN POINT

195. ***Puissance d'un point pour une sphère. Plan radical de deux sphères.*** — **1° Puissance d'un point pour une sphère (expression analytique).** — Nous allons donner une interprétation géométrique du polynôme $f(x, y, z)$ qui figure au premier membre de l'équation normale d'une sphère S :

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

avec $f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + p.$

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point fixe donné; soit D une droite quelconque passant par M_0 et coupant S aux deux points réels P et P'; soit α, β, γ des cosinus directeurs d'une direction orientée choisie sur D; tout point M de D, défini par $\overline{M_0M} = \rho$ a des coordonnées de la forme

$$x_0 + \alpha\rho, \qquad y_0 + \beta\rho, \qquad z_0 + \gamma\rho.$$

Les valeurs ρ_1 et ρ_2 correspondant aux points P et P' sont racines de l'équation

$$f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho, z_0 + \gamma\rho) = 0. \qquad (2)$$

Le terme constant du premier membre s'obtient en faisant $\rho = 0$; c'est $f(x_0, y_0, z_0)$; le terme du second degré en ρ est $\rho^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ ou ρ^2 puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ par hypothèse. L'équation (2) prend ainsi la forme

$$\rho^2 + L\rho + f(x_0, y_0 z_0) = 0. \qquad (2')$$

Le produit des racines

$$\rho_1\rho_2 = \overline{M_0P}.\overline{M_0P'}$$

est indépendant de la direction de D, et sa valeur est le résultat de la substitution des coordonnées de M_0 dans le premier membre de l'équation normale de la sphère S. Nous énoncerons :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Le produit des mesures algébriques des vecteurs qui ont pour origine un point M_0 et pour extrémités les points communs à une sphère S et à une droite passant par M_0 est indépendant de cette droite; la valeur de ce produit est appelée puissance de M_0 pour la sphère S.**

La puissance est désignée par le symbole $S(M_0)$;

$$S(M_0) = \overline{M_0P}.\overline{M_0P'} \qquad \text{et} \qquad S(M_0) = f(x_0, y_0, z_0).$$

REMARQUE. — Si la sphère S est donnée par une équation non normalisée

$$F(x, y, z) = 0,$$

avec $F(x, y, z) \equiv K(x^2 + y^2 + z^2) + 2Ax + 2By + 2Cz + D,$

il suffit de revenir à l'équation normale pour obtenir

$$S(M_0) = \frac{F(x_0, y_0, z_0)}{K}.$$

2° **Autres expressions de la puissance.** — *a*) La droite D passant par M_0 coupant S en P et P′, soit Q le point diamétralement opposé à P sur S; P′ est la projection orthogonale de Q sur la droite M_0P :

$$\overline{M_0P}.\overline{M_0P'} = \overrightarrow{M_0P}.\overrightarrow{M_0Q}.$$

La puissance d'un point pour une sphère S *est le produit scalaire des vecteurs qui ont pour origine ce point et pour extrémités deux points diamétralement opposés sur* S.

b) Si I est le centre de S, et R son rayon

$$S(M_0) = \left(\overrightarrow{M_0I} + \overrightarrow{IP}\right).\left(\overrightarrow{M_0I} + \overrightarrow{IQ}\right)$$

Or
$$\overrightarrow{IQ} = -\overrightarrow{IP}$$
$$S(M_0) = IM_0^2 - R^2.$$

Si S est une sphère de rayon nul,

$$S(M_0) = IM_0^2.$$

Remarque. — La puissance de l'origine O par rapport à S est le terme constant du premier membre de l'équation normale.

En se reportant au n° 191, 3°, *d*) on constatera que le terme constant de l'équation de la sphère de diamètre M_1M_2, $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, n'est autre que le produit scalaire $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}$.

3° **Régionnement de l'espace relativement à la sphère.** — Reprenons l'équation normale (1) de la sphère S; M (x, y, z) étant un point quelconque

$$S(M) = f(x, y, z) \quad \text{ou} \quad S(M) = IM^2 - R^2$$

$$\left.\begin{array}{l} IM > R \\ IM = R \\ M < R \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \text{M extérieur à S} \\ \text{M sur S} \\ \text{M intérieur à S} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} f(x, y, z) > 0 \\ f(x, y, z) = 0 \\ f(x, y, z) < 0. \end{array}\right.$$

4° **Plan radical de deux sphères.** — On donne deux sphères S et S′, de centres I et I′, par leurs équations normales

$$f(x, y, z) = 0, \quad \text{avec} \quad f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + p$$
$$g(x, y, z) = 0, \quad \text{avec} \quad g(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + p'.$$

Cherchons les points M qui ont même puissance pour S et pour S′ :

$$S(M) = S'(M) \iff f(x, y, z) = g(x, y, z).$$

Si I′ et I sont confondus, sans que les sphères le soient, aucun point M ne répond à la question. Si I′ et I sont distincts, les points M cherchés sont ceux du plan qui a pour équation

$$2(a' - a)x + 2(b' - b)y + 2(c' - c)z + p - p' = 0;$$

le vecteur $\overrightarrow{II'}$ est normal à ce plan.

Nous énoncerons :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **L'ensemble des points ayant même puissance pour deux sphères données non concentriques est un plan perpendiculaire à la droite des centres; ce plan est appelé le plan radical des deux sphères.**

REMARQUE. — L'équation du plan radical est

$$f(x, y, z) = g(x, y, z),$$

étant entendu que f et g sont les premiers membres des équations *normales* des deux sphères. Si S et S′ sont données par des équations non normalisées

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{avec} \quad F(x, y, z) \equiv K(x^2 + y^2 + y^2) + \dots$$
$$G(x, y, z) = 0 \quad \text{avec} \quad G(x, y, z) \equiv K'(x^2 + y^2 + z^2) + \dots$$

l'équation du plan radical s'écrit

$$\frac{F(x, y, z)}{K} = \frac{G(x, y, z)}{K'}.$$

196. ***Puissance d'un point pour un cercle. Axe radical de deux cercles.*** — 1° Les raisonnements et les résultats du n° 195 s'appliquent lorsqu'on se limite, dans le cas du plan rapporté à un repère orthonormé, à l'étude de la puissance d'un point pour un cercle, et à la recherche des points qui ont même puissance pour deux cercles.

Soit C et C′ deux cercles donnés par leurs équations normales, de centres I et I′ :

$$f(x, y) = 0, \quad \text{avec} \quad f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p$$
$$g(x, y) = 0, \quad \text{avec} \quad g(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + p'.$$

Si les cercles ne sont pas concentriques, l'ensemble des points ayant même puissance pour C et C′ est une droite Δ, appelée axe radical de C et C′; son équation est

$$f(x, y) - g(x, y) = 0, \quad \text{ou} \quad 2(a' - a)x + 2(b' - b)y + p - p' = 0.$$

REMARQUES. — I) L'axe radical de deux cercles-points A et B est la médiatrice du segment AB.

II) Si C et C′ ont une tangente commune dont les points de contact sont T et T′, le milieu μ de TT′ est tel que

$$C(\mu) = \mu T^2, \qquad C'(\mu) = \mu T'^2$$

par suite $C(\mu) = C'(\mu)$ et μ appartient à l'axe radical Δ; cela permet de construire l'axe radical de deux cercles extérieurs.

2° **Intersection de deux cercles non concentriques.** — Plaçons-nous dans le plan complexifié du plan métrique $\mathcal{E}_2$.

Les points communs à C et C′ sont obtenus par la résolution du système

$$(1) \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad (2) \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(x, y) - g(x, y) = 0 \end{cases}$$

La seconde équation du système (2) est celle de l'axe radical Δ de C et C'; on obtient donc les points communs à deux cercles en prenant l'intersection de l'un d'eux et de l'axe radical.

La discussion est la suivante.

a) Δ *coupe* C *en deux points réels et distincts.* C et C' ont alors en commun ces deux points, réels et distincts.

b) Δ *coupe* C *en deux points imaginaires conjugués.* C et C' ont alors en commun ces deux points imaginaires conjugués.

c) Δ *est tangente à* C *en un point* A; Δ coupe C en deux points confondus avec A; Δ coupe aussi C' en deux points confondus avec A, c'est donc que Δ est tangente en A à C'; les cercles C et C' sont deux cercles tangents au point A.

Inversement :

I) si C et C' ont en commun deux points distincts A et B (réels ou imaginaires conjugués), leur axe radical est la droite AB;

II) si C et C' sont tangents entre eux au point A, leur axe radical est la tangente commune en A.

Application. — Pour exprimer que deux cercles C et C' sont tangents, il est souvent commode d'exprimer que leur axe radical est tangent à l'un d'entre eux.

197. *Centre radical de trois cercles.* — 1° On donne dans le plan trois cercles C, C', C'', non concentriques deux à deux; soit I, I', I'' leurs centres; leurs équations normales sont

$$f(x, y) = 0, \quad \text{avec} \quad f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p$$
$$g(x, y) = 0, \quad \text{avec} \quad g(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + p'$$
$$h(x, y) = 0, \quad \text{avec} \quad h(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2a''x - 2b''y + p''.$$

Les axes radicaux Δ, Δ', Δ'' des couples (C', C''), (C'', C), (C, C') ont respectivement pour équation

$$\Delta \quad D(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad D(x, y) \equiv g(x, y) - h(x, y)$$
$$\Delta' \quad D'(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad D'(x, y) \equiv h(x, y) - f(x, y)$$
$$\Delta'' \quad D''(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad D''(x, y) \equiv f(x, y) - g(x, y)$$

L'égalité entre polynômes

$$D(x, y) + D'(x, y) + D''(x, y) \equiv (0)$$

montre que tout point situé sur deux des droites Δ, Δ', Δ'' est aussi situé sur la troisième.

2° Dans le cas général où I, I', I'' ne sont pas alignés, les droites Δ et Δ' perpendiculaires à des droites sécantes I'I'' et I''I se coupent en un point Ω qui appartient à Δ''.

On montre ainsi l'existence d'un point unique Ω ayant même puissance pour les trois cercles; ce point est appelé leur *centre radical.*

3° Supposons I, I′, I″ alignés; les droites Δ, Δ′, Δ″ ont la même direction. Deux cas seulement peuvent se présenter :

a) Δ, Δ′, Δ″ sont des droites deux à deux strictement parallèles; il n'existe aucun point ayant même puissance pour les trois cercles;

b) Δ, Δ′, Δ″ sont confondues; il existe alors une droite dont chaque point a même puissance pour les trois cercles.

REMARQUE. — Partons de l'équivalence logique

$$\Delta' \text{ et } \Delta'' \text{ sont confondues} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un nombre } k \text{ tel que} \\ D''(x, y) \equiv k\, D'(x, y) \end{array} \right.$$

En remplaçant D′ et D″ par leurs valeurs, on obtient

$$h(x, y) \equiv (1 + k)\, f(x, y) - kg(x, y);$$

nous exprimerons ce fait, plus loin (n° 201) en disant que les trois cercles appartiennent à un même faisceau linéaire.

4° *Application.* — Pour construire l'axe radical de deux cercles C et C′ qui n'ont aucun point commun réel, on les coupe par un cercle auxiliaire Γ dont le centre ne se trouve pas sur la droite des centre II′; Γ coupe C en deux points A et B, C′ en deux points A′ et B′; le point Ω commun à AB et A′B′ est le centre radical de C, C′ et Γ; l'axe radical cherché est la perpendiculaire à II′ menée par Ω.

III. ORTHOGONALITÉ. ÉLÉMENTS CONJUGUÉS

198. *Cercles orthogonaux.* — 1° **Définition.** — Lorsque deux cercles C et C′, de centres I et I′, de rayons R et R′ sont sécants, les angles arithmétiques des tangentes aux deux points communs A et A′ sont égaux.

On dit que les cercles C et C′ sont orthogonaux s'ils sont sécants et si en chacun de leurs points communs leurs tangentes sont perpendiculaires.

Cette condition est réalisée si, et seulement si le cercle de diamètre II′ passe par A et A′.

2° **Diverses formes de la condition d'orthogonalité.** — *a*) Si C et C′ sont orthogonaux, le triangle IAI′ est rectangle en A et le théorème de Pythagore donne (fig. 55).

$$(1) \qquad II'^2 = R^2 + R'^2.$$

Inversement, si la relation (1) est réalisée, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il existe un triangle AIA′, rectangle en A, pour lequel IA = R, I′A = R′, c'est dire que les cercles C et C′ sont sécants et orthogonaux.

En résumé

$$C \text{ et } C' \text{ orthogonaux} \iff II'^2 = R^2 + R'^2$$

b) $II'^2 - R^2$ n'est autre que $C(I')$; par suite

$$C \text{ et } C' \text{ orthogonaux} \iff C(I') = R'^2 \iff C'(I) = R^2.$$

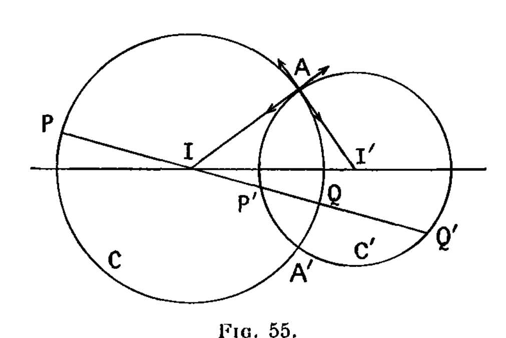


Fig. 55.

La puissance du centre de l'un des cercles pour l'autre cercle est le carré du rayon du premier cercle.

c) La puissance d'un point peut s'exprimer par un produit scalaire; si P et Q sont diamétralement opposés sur C, $C(I') = \overrightarrow{I'P}.\overrightarrow{I'Q}$.

$$\left.\begin{matrix} C' \text{ orthogonal au cercle} \\ \text{de diamètre } PQ \end{matrix}\right\} \iff \overrightarrow{I'P}.\overrightarrow{I'Q} = R'^2$$

d) Si le diamètre PQ du cercle C rencontre le cercle C′ aux points P′ et Q′,

$$C'(I) = \overline{IP'}\,.\,\overline{IQ'}$$

et en comparant avec la forme *b*)

$$\overline{IP'}\,.\,\overline{IQ'} = IP^2 = IQ^2,$$

ce qui exprime que P, Q; P′, Q′ se divisent harmoniquement :

C et C′ orthogonaux $\iff$ un diamètre de C
est divisé harmoniquement par C′.

e) Pour tout point M du cercle de diamètre II′,

$$II'^2 = MI^2 + MI'^2,$$

et

$$II'^2 - R^2 - R'^2 = (MI^2 - R^2) + (MI'^2 - R'^2)$$
$$= C(M) + C'(M)$$

$$C \text{ et } C' \text{ orthogonaux} \iff \left\{\begin{matrix} M \in \text{cercle de diamètre } II' \\ C(M) + C'(M) = 0 \\ \text{en particulier} \\ C(I) + C'(I) = 0. \end{matrix}\right.$$

3° **Forme analytique de la condition d'orthogonalité.** — On donne C et C′ par leurs équations normales

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + p = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2\,a'x - 2\,b'y + p' = 0.$$
$$\begin{aligned} C(I) + C'(I) &= a^2 + b^2 - 2\,a^2 - 2\,b^2 + p + a^2 + b^2 - 2\,aa' - 2\,bb' + p'. \\ &= -2\,aa' - 2\,bb' + p + p'. \end{aligned}$$

Par suite

$$C \text{ et } C' \text{ orthogonaux} \iff 2\,aa' + 2\,bb' - p - p' = 0 \qquad (2)$$

Remarque I. — Le lecteur qui a étudié les formes quadratiques reconnaîtra dans le premier membre de l'égalité (2) la forme polaire du polynôme quadratique

$$2(a^2 + b^2 - p\theta),$$

θ jouant le rôle d'une variable d'homogénéité dans l'expression du carré du rayon de C qui s'écrit $(a^2 + b^2 - p)$.

Remarque II. — La condition (2) est du premier degré par rapport aux coefficients de l'équation de chacun des cercles. Réciproquement, supposons que les coefficients α, β, γ de l'équation d'un cercle

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 - 2\,\alpha x - 2\,\beta x + \gamma = 0$$

soient assujettis à vérifier une relation du premier degré

$$(3) \qquad L\alpha + M\beta + N\gamma + P = 0.$$

Comparons cette relation à celle qui exprime que le cercle (Γ) est orthogonal au cercle (C) représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + p = 0,$$

relation qui est

$$(4) \qquad 2\,a\alpha + 2\,b\beta - \gamma - p = 0.$$

Les relations (3) et (4) seront équivalentes si, quels que soient α, β, elles donnent la même valeur pour γ, c'est-à-dire si N est différent de zéro et

$$2\,a = -\frac{L}{N}, \qquad 2\,b = -\frac{M}{N}, \qquad p = \frac{P}{N}.$$

Les cercles (Γ) considérés sont alors les cercles orthogonaux au cercle qui a pour équation

$$(5) \qquad N(x^2 + y^2) + Lx + My + P = 0.$$

Dans le cas particulier où $N = 0$, la condition (3) exprime que le centre de (Γ) reste sur la droite représentée par l'équation (5), c'est-à-dire que le cercle L reste orthogonal à cette droite.

199. ***Angle de deux cercles.*** — 1° On appelle *angle de deux cercles sécants* C et C′ l'un quelconque des angles que font leurs tangentes en l'un des points communs, A.

Soit V l'angle aigu des tangentes en A; l'angle IAI′ fait par les rayons qui aboutissent en A est V ou $\pi - V$. Dans le triangle IAI′, on peut écrire, R et R′ étant les rayons des deux cercles,

$$II'^2 = R^2 + R'^2 - 2\,RR' \cos\widehat{IAI'}$$

d'où l'on déduit, ε désignant $+1$ ou -1,

$$2\,\varepsilon\,RR' \cos V = R^2 + R'^2 - II'^2.$$

Si l'on connaît C et C' par leurs équations normales, comme au n° **198**, 3°,

$$R^2 + R'^2 - II'^2 = 2\,aa' + 2\,bb' - p - p'$$

et V est donné par

(1) $$2\,\varepsilon RR' \cos V = 2\,aa' + 2\,bb' - p - p'.$$

On observera que la condition $|\cos V| \leqslant 1$ revient à exprimer que les deux cercles ont au moins un point commun.

2° **Contact de deux cercles.** — *a*) Les cercles C et C' sont tangents si, et seulement si, la formule (1) donne $V = 0$, c'est-à-dire

$$2\,\varepsilon RR' = 2\,aa' + 2\,bb' - p - p'.$$

200. ***Polaire d'un point par rapport à un cercle.*** — 1° **Points conjugués.** — **Deux points M et M' sont dits conjugués par rapport à un cercle C si le cercle Γ de diamètre MM' est orthogonal au cercle C** (voir une définition plus générale au n° **218**).

Si I et R sont respectivement le centre et le rayon de C, la condition d'orthogonalité

$$\Gamma(I) = R^2$$

se traduit par

(1) $$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IM'} = R^2.$$

La condition (1) est la condition de conjugaison des points M et M' par rapport à C.

Si H est la projection orthogonale de M' sur la droite IM, la condition (1) se traduit par

(2) $$\overline{IM}.\overline{IH} = R^2;$$

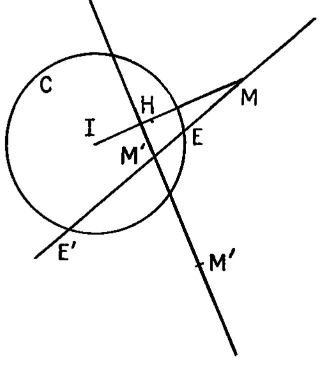


Fig. 56.

on montre ainsi que l'ensemble des conjugués de M est la perpendiculaire en H à IM; cette droite est appelée la polaire de M pour C (fig. 56).

Remarque. — A la forme quadratique $\overrightarrow{OM}^2$ est associée l'équation du cercle de centre O

$$\overrightarrow{OM}^2 = R^2;$$

à la forme bilinéaire associée $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$ est associée la condition de conjugaison des points M et M' :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = R^2.$$

2° **Relation avec la division harmonique.** — Si la droite MM' qui joint deux points conjugués pour C rencontre C aux points E et E', la division

(M, M'; E, E') est harmonique; inversement, si une droite L coupe C en E et E', tout couple M, M' de points conjugués harmoniques par rapport à E et E' est un couple de points conjugués pour C.

3° **Forme analytique de la condition de conjugaison.** — Supposons C donné par son équation normale

(3) $$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + p = 0.$$

Soit $M(x_1, y_1)$ et $M'(x_2, y_2)$ deux points donnés.

La condition (1) de conjugaison se traduit par

$$(x_1 - a)(x_2 - a) + (y_1 - b)(y_2 - b) = a^2 + b^2 - p$$

ou encore

(4) $$x_1x_2 + y_1y_2 - a(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2) + p = 0.$$

4° **Polaire d'un point** $M_1(x_1, y_1)$. — L'ensemble des points conjugués d'un point donné M_1 est la droite qui a pour équation

(5) $$x_1x + y_1y - a(x + x_1) - b(y + y_1) + p = 0$$

c'est la polaire de M_1 par rapport à C.

On vérifie que la polaire d'un point M_1 de C n'est autre que la tangente en M_1 à C, ce qui résulte d'ailleurs de la définition même de la conjugaison de deux points.

Dans le cas particulier où C est centré à l'origine, l'équation de C est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

polaire de M_1 a pour équation

(6) $$xx_1 + yy_1 - R^2 = 0.$$

5° **Pôle d'une droite.** — Donnons-nous la droite Δ par son équation

(7) $$ux + vy + h = 0.$$

Bornons-nous au cas du cercle C(O, R), et cherchons s'il existe un point M_1 (x_1, y_1) ayant Δ pour polaire par rapport à C.

Il faut et il suffit pour cela que les équations (6) et (7) représentent la même droite, c'est-à-dire qu'il existe un nombre k tel que

$$x_1 = ku, \qquad y_1 = kv, \qquad -R^2 = kh;$$

en supposant que Δ ne passe pas par le centre O, $h \neq 0$, et on obtient le point

$$x_1 = -\frac{R^2u}{h}, \qquad y_1 = -\frac{R^2v}{h}.$$

Ce point est appelé pôle de la droite Δ par rapport à C.

6° **Droites conjuguées.** — Exprimons que la droite Δ'

$$u'x + v'y + h' = 0$$

passe par le pôle de la droite Δ; nous obtenons

$$u'\left(-\mathrm{R}^2\frac{u}{h}\right) + v'\left(-\mathrm{R}^2\frac{v}{h}\right) + h' = 0$$

ce qui se met sous la forme symétrique

$$\mathrm{R}^2(uu' + vv') - hh' = 0 \tag{8}$$

et montre qu'inversement Δ contient le pôle de Δ'.

Δ' contient le pôle de Δ $\Longleftrightarrow$ Δ contient le pôle de Δ'.

On dit alors que les droites Δ *et* Δ' *sont conjuguées pour le cercle* C.

On rapprochera la condition (8) de l'équation tangentielle du cercle C

$$\mathrm{R}^2(u^2 + v^2) - h^2 = 0.$$

7° **Triangle autopolaire par rapport à un cercle.** — On dit qu'un triangle est autopolaire par rapport à un cercle si chacun des côtés est sur la polaire du sommet opposé.

Pour construire un triangle autopolaire par rapport à un cercle, on peut prendre arbitrairement un point A non situé sur le cercle et construire sa polaire D. Soit B un point de D non situé sur le cercle, sa polaire passe par A et coupe D en un point C distinct de B. La polaire de C passe par A et B, c'est la droite AB (fig. 57). *Le triangle est autopolaire par rapport au cercle.*

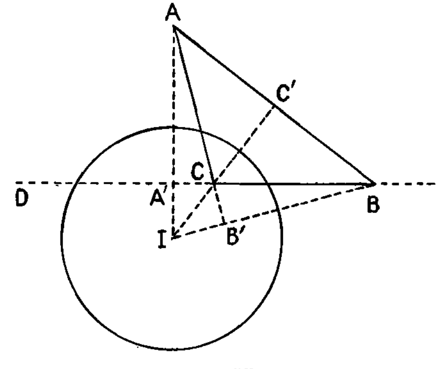


Fig. 57.

Deux quelconques des sommets sont conjugués par rapport au cercle, il en est de même de deux quelconques des côtés.

Exercice. — *Cercle par rapport auquel un triangle donné est autopolaire.*

Un triangle ABC étant donné, cherchons s'il existe un cercle par rapport auquel le triangle soit autopolaire. Pour exprimer que le triangle est autopolaire par rapport à un cercle, il suffit d'écrire que deux quelconques des sommets sont conjugués, ce qui donne trois relations pour déterminer les trois paramètres α, β, γ qui figurent dans l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

d'un cercle Γ.

Rapportons le triangle à un repère orthonormé tel que la droite BC porte l'axe $x'x$ et la perpendiculaire menée de A à BC porte l'axe $y'y$. Appelons b et c les abscisses respectives de B et de C et a l'ordonnée de A.

Écrivons successivement pour les trois couples de points B, C; C, A; A, B, la relation

$$x_0x_1 + y_0y_1 - \alpha(x_0 + x_1) - \beta(y_0 + y_1) + \gamma = 0$$

qui exprime que les points M_0 et M_1 sont conjugués. Nous trouvons ainsi pour déterminer α, β γ, les équations

$$bc - \alpha(b + c) + \gamma = 0, \qquad -\alpha c - \beta a + \gamma = 0, \qquad -\alpha b - \beta a + \gamma = 0.$$

Les deux dernières exigent que $\alpha = 0$, la première donne ensuite $\gamma = -bc$, enfin $\beta = -\frac{bc}{a}$. Il existe donc un cercle (réel ou non) répondant à la question. Ce cercle, dit conjugué par rapport au triangle, a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2\frac{bc}{a}y - bc = 0.$$

Son centre est sur $y'y$, c'est-à-dire sur la hauteur issue de A, il est de même sur les deux autres hauteurs, c'est l'orthocentre du triangle.

Géométriquement, s'il existe un cercle conjugué par rapport au triangle ABC, chacune des droites BC, CA, AB est perpendiculaire au diamètre qui passe par le sommet opposé, le centre est le point H orthocentre du triangle. Le carré du rayon doit être égal aux produits $\overline{HA} \times \overline{HA'}$, $\overline{HB} \times \overline{HB'}$, $\overline{HC} \times \overline{HC'}$, A′ B′, C′ étant les pieds des hauteurs. Or, dans tout triangle ces produits sont égaux. Le cercle qui a H pour centre et dont le rayon R est tel que $R^2 = \overline{HA} \times \overline{HA'}$ n'est réel que si le produit est positif, ce qui exige que l'orthocentre soit extérieur au triangle, c'est-à-dire que le triangle ait un angle obtus.

IV. FAISCEAUX LINÉAIRES DE CERCLES

201. *Définition d'un faisceau linéaire de cercles.* — 1° **Données du problème.** — On donne les deux polynômes à coefficients réels

$$f(x, y) \equiv K(x^2 + y^2) + 2Ax + 2By + H$$
$$g(x, y) \equiv K'(x^2 + y^2) + 2A'x + 2B'y + H',$$

on suppose que les coefficients de $f(x, y)$ d'une part, et ceux de $g(x, y)$ d'autre part, ne sont pas simultanément nuls.

En associant au couple x, y le point M de coordonnées x, y, dans le repère orthonormé choisi dans le plan métrique $\mathcal{E}_2$ (éventuellement dans le plan métrique complexifié), nous noterons aussi $f(M)$ et $g(M)$ les polynômes donnés.

Nous nous proposons d'étudier la courbe Γ que peut représenter l'équation

$$(1) \qquad \alpha f(M) + \beta g(M) = 0$$

où α et β sont deux nombres réels quelconques, non simultanément nuls.

Si $\beta \neq 0$, on peut poser $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ et remplacer l'équation (1) par

$$(2) \qquad \lambda f(M) + g(M) = 0.$$

Si $\beta = 0$, l'équation (1) est équivalente à $f(M) = 0$.

Nous appellerons C et C′ les courbes que représentent les équations

$$f(M) = 0 \qquad g(M) = 0.$$

Dans le premier membre de l'équation (1), les termes en x^2 et y^2 ont le même coefficient $\alpha K + \beta K'$, et le terme rectangle a un coefficient nul.

Avant d'étudier le cas général, nous écarterons certains cas particuliers.

2° **Cas particuliers.** — *a*) Nous écarterons le cas où simultanément $K = 0$, $K' = 0$; nous supposerons donc que l'une au moins des courbes C et C′ est un cercle; dans la suite nous supposerons $K \neq 0$.

b) Nous écarterons aussi le cas où les coefficients de $f(M)$ et de $g(M)$ sont proportionnels, c'est-à-dire où il existe un nombre réel ρ tel que

$$\forall M, \qquad g(M) = \rho f(M);$$

l'équation (1) devient alors

$$(\alpha + \beta\rho) f(M) = 0,$$

elle représente, quels que soient α et β vérifiant $\alpha + \beta\rho \neq 0$, le cercle C; si $\alpha + \beta\rho = 0$, l'équation (1) représente tout le plan.

c) Nous écarterons enfin le cas où il existe un nombre ρ tel que

$$K' = \rho K, \qquad A' = \rho A, \qquad B' = \rho B, \qquad H' \neq \rho H;$$

les courbes C et C′ sont alors deux cercles concentriques, et l'équation (1) devient

$$(\alpha + \beta\rho)\,[K(x^2 + y^2) + 2\,Ax + 2\,By] + \alpha H + \beta H' = 0;$$

si $\alpha + \beta\rho \neq 0$, elle représente un cercle concentrique à C et C′; si $\alpha + \beta\rho = 0$, elle ne représente rien.

3° **Cas général.** — Nous n'envisagerons dans la suite que les deux hypothèses suivantes :

a) $K \neq 0$; $K' = 0$, A′ et B′ non nuls tous deux. C *est un cercle*, C′ *est une droite.*

L'équation (1) représente, pour $\alpha \neq 0$, un cercle; pour $\alpha = 0$, la droite C′.

b) $K \neq 0$; $K' \neq 0$; C *et* C′ *sont deux cercles non concentriques.*

L'équation (1) est celle d'un cercle dans le cas général où $\alpha K + \beta K'$ n'est pas nul; si $\alpha K + \beta K' = 0$, c'est-à-dire si α et β sont proportionnels à K' et $-K$, l'équation (1) est celle d'une droite.

Dans les cas *a*) et *b*) précédents, nous dirons que *les cercles* Γ *que peut représenter l'équation* (1) *sont ceux d'un faisceau linéaire ayant pour bases les courbes* C *et* C′.

Nous désignerons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des courbes que peut représenter l'équation (1).

Dans la suite, pour simplifier, nous supprimerons l'adjectif linéaire, étant entendu que « faisceau » ne sera utilisé qu'avec la signification précédente de « faisceau linéaire ».

202. ***Propriétés générales d'un faisceau de cercles.*** — 1° **Points communs à deux courbes du faisceau.** — Considérons, avec les notations du n° **201**, deux courbes Γ et Γ' du faisceau $\mathcal{F}$:

$$\left.\begin{array}{ll}\Gamma) & \alpha f(M) + \beta g(M) = 0 \\ \Gamma') & \alpha' f(M) + \beta' g(M) = 0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

α et β d'une part, α' et β' d'autre part ne sont pas simultanément nuls.

Chercher les points communs à Γ et Γ', c'est résoudre le système (1) où $M(x, y)$ est inconnu.

a) Supposons $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix} \neq 0.$

Le système (1), linéaire et homogène par rapport aux inconnues $f(M)$ et $g(M)$, n'admet que la solution banale

$$\left.\begin{array}{l}f(M) = 0 \\ g(M) = 0\end{array}\right\} \qquad (2)$$

En d'autres termes, (1) $\Longleftrightarrow$ (2).

Les points communs à Γ et Γ' sont les points communs aux bases C et C' (cf. n° **196**) :

ou bien on trouve deux points distincts (réels ou imaginaires conjugués);

ou bien on trouve deux points confondus, et alors C et C' sont tangents, ainsi que Γ et Γ'.

Les points communs aux bases, qui sont ainsi communs à deux courbes quelconques du faisceau $\mathcal{F}$ sont appelés *points fixes* du faisceau $\mathcal{F}$.

b) Supposons $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix} = 0.$

Les quatre coefficients α, β, α', β' n'étant pas nuls simultanément, supposons par exemple $\alpha \neq 0$; alors $\beta' = \beta\frac{\alpha'}{\alpha}$ et $\alpha' \neq 0$ (sinon β' serait nul aussi).

Γ' peut se représenter par les équations

$$\alpha' f(M) + \beta\frac{\alpha'}{\alpha} g(M) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha f(M) + \beta g(M) = 0;$$

la courbe Γ' coïncide alors avec la courbe Γ.

c) Les hypothèses contradictoires *a*) et *b*) conduisant à des conclusions contradictoires, on peut conclure aux réciproques.

Les courbes Γ *et* Γ' *du faisceau* $\mathcal{F}$ *associées aux couples* (α, β) *et* (α', β') *sont distinctes si, et seulement si,* $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$.

Les courbes Γ *et* Γ' *sont confondues si, et seulement si,*

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0.$$

2° **Courbe du faisceau $\mathcal{F}$ passant par un point donné.** — Soit M_0 un point du plan. La courbe Γ de $\mathcal{F}$ contient M_0 si et seulement si α et β vérifient

$$\alpha f(M_0) + \beta g(M_0) = 0. \tag{2}$$

Si M_0 n'est pas un point fixe de $\mathcal{F}$, on peut choisir

$$\alpha = g(M_0), \qquad \beta = -f(M_0)$$

α et β ne sont pas nuls tous les deux.

Il existe une courbe de $\mathcal{F}$, et une seule, passant par un point donné M_0, *non confondu avec un point fixe de $\mathcal{F}$*; cette courbe a pour équation

$$g(M_0)f(M) - f(M_0)g(M) = 0.$$

3° **On peut prendre pour bases de $\mathcal{F}$ deux courbes distinctes de $\mathcal{F}$.** — Choisissons deux courbes distinctes du faisceau $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_1) & f_1(M) = 0 & f_1(M) = \alpha f(M) + \beta g(M) \\ \Gamma'_1) & g_1(M) = 0 & g_1(M) = \alpha' f(M) + \beta' g(M). \\ & & \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0. \end{array}$$

Soit $\mathcal{F}_1$ le faisceau de cercles ayant pour bases Γ_1 et Γ'_1, c'est-à-dire l'ensemble des courbes représentées par

$$\lambda f_1(M) + \mu g_1(M) = 0 \tag{3}$$

quand les paramètres λ et μ prennent toutes les valeurs réelles.

a) L'équation (3) s'écrit

$$(\lambda\alpha + \mu\alpha')f(M) + (\lambda\beta + \mu\beta')g(M) = 0;$$

toute courbe de $\mathcal{F}_1$ appartient à $\mathcal{F}$.

b) Inversement, donnons-nous *a priori* une courbe de $\mathcal{F}$

$$lf(M) + mg(M) = 0, \quad l \text{ et } m \text{ non nuls tous les deux.}$$

On peut l'obtenir dans le faisceau $\mathcal{F}_1$ si, et seulement si, on peut trouver λ et μ tels que

$$\begin{cases} \lambda\alpha' + \mu\alpha' = l \\ \lambda\beta + \mu\beta' = m \end{cases}$$

ce qui est possible puisque $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$.

Il en résulte qu'*on peut écrire l'équation générale des courbes du faisceau $\mathcal{F}$ en choisissant pour bases deux courbes distinctes de $\mathcal{F}$.*

Remarque. — Les propriétés précédentes, 1°, 2°, 3° sont des conséquences de la linéarité par rapport à α et β du polynôme

$$\alpha f(M) + \beta g(M)$$

dont l'annulation donne l'équation d'un cercle quelconque du faisceau $\mathcal{F}$. Le lecteur retrouvera les mêmes propriétés, généralisées en géométrie projective, lorsqu'il étudiera (programme A 2 et A'2) les faisceaux de coniques (n° 235).

4° **Axe radical d'un faisceau de cercles.** — Nous avons vu au n° 201, 3° que parmi les courbes d'un faisceau de cercles $\mathcal{F}$ figurait une droite Δ, et une seule.

D'après le 3°, on peut prendre cette droite pour l'une des bases de $\mathcal{F}$.

Finalement, tout faisceau de cercles $\mathcal{F}$ peut se représenter par une équation de la forme

$$(\Gamma) \qquad f(\mathrm{M}) + \lambda g(\mathrm{M}) = 0, \qquad \lambda \text{ paramètre réel.}$$
$$f(\mathrm{M}) \equiv \mathrm{K}(x^2 + y^2) + 2\,\mathrm{A}x + 2\,\mathrm{B}y + \mathrm{H} \qquad (\mathrm{K} \neq 0)$$
$$g(\mathrm{M}) \equiv 2\,\mathrm{A}'x + 2\,\mathrm{B}'y + \mathrm{H}'.$$

Soit M_0 un point de Δ : $g(\mathrm{M}_0) = 0$;
la puissance de M_0 pour le cercle Γ est donnée par

$$\Gamma(\mathrm{M}_0) = \frac{f(\mathrm{M}_0)}{\mathrm{K}}$$

cette puissance est indépendante de λ.

Le point M_0 a même puissance par rapport à deux cercles quelconques de $\mathcal{F}$:
la droite Δ qui fait partie de $\mathcal{F}$ est l'axe radical de deux cercles quelconques de $\mathcal{F}$; on dit alors que Δ est l'axe radical du faisceau $\mathcal{F}$.

Droite des centres. — Si I est le centre d'un cercle C du faisceau $\mathcal{F}$, tout autre cercle de $\mathcal{F}$ a son centre sur la perpendiculaire menée de I à Δ; cette droite est dite *droite des centres du faisceau $\mathcal{F}$.*

203. ***Étude descriptive d'un faisceau de cercles.*** — 1° **Équation réduite d'un faisceau.** — Donnons-nous le faisceau $\mathcal{F}$ par son axe radical Δ et un cercle particulier C_0.

Prenons un repère orthonormé tel que Δ porte l'axe $y'y$, et la perpendiculaire à Δ menée par le centre I_0 de C_0 porte l'axe $x'x$; $x'x$ est alors la droite des centres de $\mathcal{F}$.

L'origine O, appartenant à Δ, a une puissance fixe, soit p, par rapport à tout cercle C de $\mathcal{F}$.

L'équation d'un cercle quelconque C est ainsi

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x + p = 0,$$

λ est l'abscisse du centre I de C.

En écrivant cette équation sous la forme

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - p$$

on met en évidence le rayon R de C

$$\mathrm{R}^2 = \lambda^2 - p.$$

Les points fixes de $\mathcal{F}$ vérifient

$$x = 0 \qquad y^2 = -p.$$

Nous distinguerons donc trois cas suivant que p est négatif, nul, positif.

2° Description des cercles d'un faisceau.

I) *Les points fixes du faisceau sont réels et distincts.* — Si $p < 0$, on peut poser $p = -k^2$; l'axe radical Oy coupe tous les cercles de $\mathcal{F}$ aux points A et B tels que (fig. 58)

$$OA = OB = k \qquad (k > 0).$$

Tout point de Ox d'abscisse λ est centre d'un cercle réel de $\mathcal{F}$, dont le rayon R est donné par $$R^2 = \lambda^2 + k^2.$$

Un tel cercle est le lieu des points M tels que l'angle de droites (MA, MB) ait une détermination donnée.

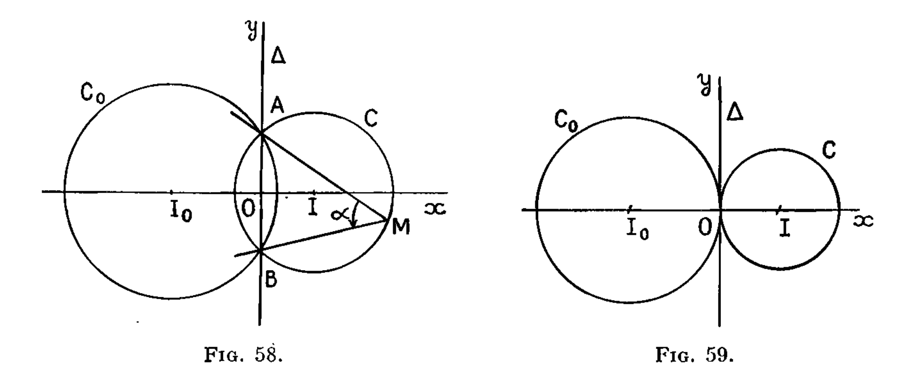


Fig. 58. Fig. 59.

II) *Les points fixes du faisceau sont confondus.* — Si $p = 0$, tout point I de Ox est centre d'un cercle du faisceau, tangent en O à l'axe Oy. Le faisceau $\mathcal{F}$ contient un cercle de rayon nul, celui qui est centré en O (fig. 59).

III) *Les points fixes du faisceau sont imaginaires.* — Si $p > 0$, on peut poser $p = a^2$. L'axe radical Oy coupe les cercles de $\mathcal{F}$ aux points imaginaires conjugués d'ordonnées $\pm ai$.

Un point $I(\overline{OI} = \lambda)$ de Ox n'est centre d'un cercle réel de $\mathcal{F}$ que si $R^2 = \lambda^2 - a^2$ est positif ou nul. Marquons alors sur Ox les points U et V tels que

$$OU = OV = a.$$

Les cercles réels du faisceau ont leurs centres sur l'une des demi-droites Ux' et Vx (fig. 60). Les cercles de $\mathcal{F}$ dont les centres sont les points U et V ont leur rayon nul : les points U et V, centres de cercles de rayon nul du faisceau $\mathcal{F}$, sont appelés *points limites* ou *points de Poncelet* du faisceau.

Si γ est le cercle de diamètre UV, de rayon a, $C(O) = a^2$, ce qui montre que les cercles C et γ sont orthogonaux; l'axe Ox coupe γ en U et V, C en α et β : la division U, V; α, β est harmonique. On en déduit

$$I\alpha^2 = I\beta^2 = \overline{IU} \cdot \overline{IV}.$$

Observons aussi que a est la longueur d'une tangente menée de O à un cercle quelconque réel du faisceau : si l'on s'est donné le cercle C_0, en menant la tangente OT_0, on détermine le cercle γ et par suite les points limites U et V.

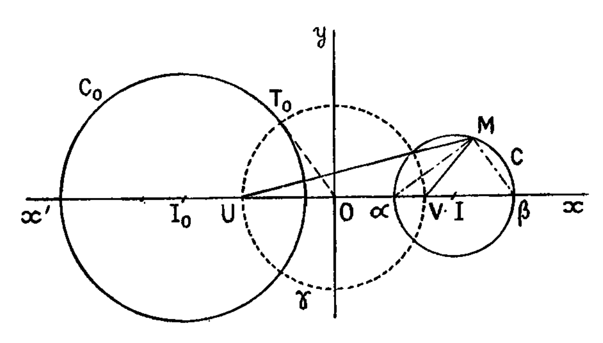


Fig. 60.

Soit M un point du cercle C. Le faisceau M(U, V; α, β) étant harmonique et les droites Mα, Mβ étant perpendiculaires, MU et MV admettent Mα et Mβ pour bissectrices, et par suite

$$\frac{MU}{MV} = \frac{\alpha U}{\alpha V} = \frac{\beta U}{\beta V}.$$

On en déduit qu'un cercle réel du faisceau dont les points limites sont U et V est le lieu des points M tels que $\frac{MU}{MV} = k$.

3° **Polaire d'un point fixe par rapport aux cercles d'un faisceau linéaire.** — L'équation de la polaire du point $M_0(x_0, y_0)$ par rapport au cercle C d'équation (1) est

$$xx_0 + yy_0 - \lambda(x + x_0) + p = 0.$$

Cette équation dépend du paramètre λ au premier degré.

a) Les équations

$$xx_0 + yy_0 + p = 0 \qquad \text{et} \qquad x + x_0 = 0$$

représentent la même droite si, et seulement si

$$y_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_0^2 = p.$$

Dans le cas d'un faisceau $\mathcal{F}$ à points limites, chaque point limite a une polaire fixe par rapport à tout cercle de $\mathcal{F}$: la polaire de U (fig. 60) par rapport à C est la perpendiculaire en V à la droite des centres.

b) Si $y_0 = 0$, la polaire de M_0 reste parallèle à l'axe radical.

c) Si $y_0 \neq 0$, la polaire de M_0 passe par un point fixe M_1

$$x = -x_0, \qquad y = \frac{x_0^2 - p}{y_0}.$$

M_1 est situé sur la tangente en M_0 au cercle de $\mathcal{F}$ qui passe en M_0.

Si $\mathcal{F}$ admet des points limites U et V, la polaire de M_0 par rapport au cercle de rayon nul U est la perpendiculaire en U à UM_0, ce qui donne alors une construction rapide du point M_1.

4° **Propriétés diverses.** — *a*) *Différence des puissances d'un point pour deux cercles.* — On peut toujours supposer que les deux cercles donnés C et C_1 définissent un faisceau de cercles $\mathcal{F}$; soit (1) l'équation réduite de $\mathcal{F}$; soit I et I_1 les centres de C et C_1, λ et λ_1 leurs abscisses ($\lambda_1 \neq \lambda$). $M(x, y)$ étant un point quelconque du plan

$$C(M) = x^2 + y^2 - 2\lambda x + p$$
$$C_1(M) = x^2 + y^2 - 2\lambda_1 x + p$$
$$C(M) - C_1(M) = 2(\lambda_1 - \lambda)x.$$

$\lambda_1 - \lambda = \overline{II_1}$; $x = \overline{HM}$, H étant la projection orthogonale de M sur l'axe radical Δ; on obtient ainsi la formule

$$C(M) - C_1(M) = 2\,\overline{II_1}\,.\,\overline{HM}$$

qui généralise l'étude de l'axe radical.

b) *On donne un cercle* C *et une droite* Δ : *étude des cercles* Γ *admettant* Δ *pour axe radical avec* C.

Prenons pour supports des axes d'un repère orthonormé :

α) la perpendiculaire à Δ menée par le centre I de C;

β) la droite Δ.

C a ainsi pour équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x + p = 0$.

Soit Γ un cercle quelconque

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y + \nu = 0.$$

L'axe radical de Γ et C a pour équation

$$2(\alpha - \lambda)x - 2\mu y - p + \nu = 0.$$

Cet axe radical coïncide avec Δ ($x = 0$) si, et seulement si,

$$\lambda \neq \alpha, \qquad \mu = 0 \qquad \nu = p,$$

Γ a alors pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + p = 0.$$

Énonçons :

Les cercles d'un faisceau $\mathcal{F}$ *constituent l'ensemble des cercles qui ont pour axe radical avec un cercle fixe* C *de* $\mathcal{F}$ *l'axe radical* Δ *du faisceau.*

On convient de compter C dans l'ensemble précédent, quoique C n'ait pas d'axe radical avec lui-même.

Application. — *a*) *Cercles passant par deux points donnés* (*réels ou imaginaires conjugués*). — Soit Δ la droite réelle contenant les deux points donnés E et E'; soit C_0 un cercle particulier contenant E et E', par exemple le cercle de diamètre EE'. Tout autre cercle Γ contenant E et E' admet Δ pour axe radical avec C_0, donc appartient au faisceau $\mathcal{F}$ ayant pour bases C_0 et la droite Δ; réciproquement tout cercle de $\mathcal{F}$ contient E et E'.

b) Cercles tangents en un point donné E *à une droite donnée* Δ. — Si C_0 est un cercle particulier tangent à E à Δ, tout autre cercle Γ tangent en E à Δ admet Δ pour axe radical avec C_0, donc appartient au faisceau $\mathcal{F}$ ayant pour bases C_0 et la droite Δ; réciproquement tout cercle de $\mathcal{F}$ est tangent en E à Δ.

EXEMPLE I. — *Équation du cercle* Γ *contenant les points* A(2, 1); B(3, 2); C(1, — 1). Le cercle de diamètre AB a pour équation

$$(x-2)(x-3)+(y-1)(y-2)=0,$$

ou

$$x^2+y^2-5x-3y+8=0.$$

La droite AB a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad -x+y+1=0.$$

L'équation générale des cercles contenant les points A et B est ainsi :

$$x^2+y^2-5x-3y+8+\lambda(-x+y+1)=0.$$

On détermine λ pour la condition que le cercle précédent passe par C; on obtient ainsi $\lambda = 8$. Finalement Γ a pour équation

$$x^2+y^2-13x+5y+16=0.$$

EXEMPLE II. — *Équation générale des cercles tangents en* A(0, 1) *à la droite*

$$\Delta(y=2x+1).$$

Ces cercles sont ceux d'un faisceau $\mathcal{F}$ ayant pour bases la droite Δ et le cercle-point A; d'où l'équation cherchée

$$x^2+(y-1)^2+\lambda(2x-y+1)=0.$$

V. FAMILLES DE CERCLES ORTHOGONAUX

204. *Cercles orthogonaux à un cercle donné.* — 1° On donne un cercle réel C(I, R); un cercle Γ est orthogonal à C si, et seulement si, $\Gamma(I) = R^2$. Il y a identité entre l'ensemble des cercles orthogonaux à C et l'ensemble des cercles pour lesquels le point I a pour puissance R^2.

2° **Cercle Γ ayant un centre donné.** — Si ρ est le rayon de Γ, et Ω son centre,

$$C(\Omega) = \rho^2.$$

Tout point Ω extérieur à C est centre d'un cercle Γ orthogonal à C.

3° **Cercle Γ passant par un point donné** A. — Nous supposons A réel, non situé sur C.

a) Si un cercle Γ passe par A, la droite IA le recoupe en A′ tel que $\Gamma(I) = \overline{IA}\cdot\overline{IA'}$, donc tel que

$$\overline{IA}\cdot\overline{IA'} = R^2.$$

b) Inversement, à tout point A du plan (A $\neq$ I), associons le point A′ aligné avec I et A, tel que

$$\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = R^2;$$

les points A et A′ sont dits *inverses* par rapport à C.

Tout cercle contenant A et A′ est orthogonal à C.

En résumé *les cercles orthogonaux à* C, *passant par* A, *forment un faisceau ayant pour points fixes le point* A *et son inverse* A′ *par rapport à* C.

Remarque. — Les cercles Γ pour lesquels un point donné I a une puissance donnée négative — R^2 sont ceux qui coupent en deux points diamétralement opposés le cercle (I, R).

205. *Cercles orthogonaux à deux cercles donnés.* — 1° On donne deux cercles C et C′ non concentriques; prenons pour axe $x'x$ la droite des centres II′, pour axe $y'y$ leur axe radical Δ; leur équation est ainsi

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2\,ax + p = 0$$
$$(C') \qquad x^2 + y^2 - 2\,a'x + p = 0.$$

Soit un cercle quelconque Γ :

$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha x - 2\,\beta y + \gamma = 0.$$

Le cercle Γ est orthogonal à C et C′ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 2\,a\alpha - p - \gamma = 0 \\ 2\,a'\alpha - p - \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -p. \end{cases}$$

L'ensemble des cercles Γ orthogonaux à C et C′ est l'ensemble des cercles que peut représenter l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\,\mu x - p = 0$$

où μ est un paramètre. Ces cercles constituent un faisceau Φ.

Les cercles Γ ainsi obtenus sont orthogonaux non seulement aux cercles C et C′ mais aussi à tous les cercles du faisceau $\mathcal{F}$ ayant pour bases C et C′, et pour équation générale

$$x^2 + y^2 - 2\,\lambda x + p = 0.$$

Les deux faisceaux $\mathcal{F}$ et Φ tels que chaque cercle de l'un soit orthogonal à chaque cercle de l'autre sont dits *faisceaux conjugués* (fig. 61).

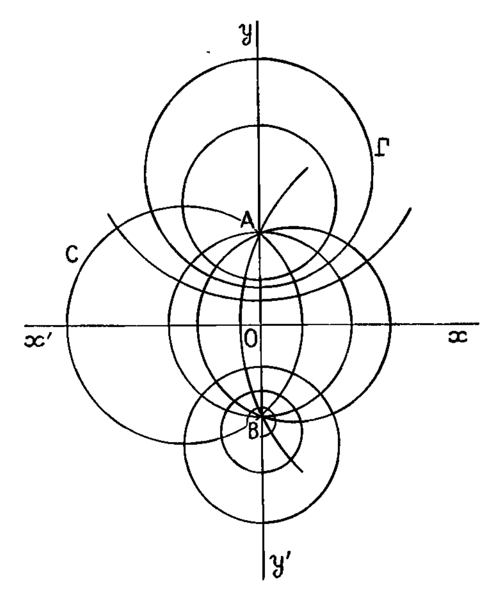


Fig. 61.

Quel que soit le signe de p, les points limites de l'un sont les points fixes de l'autre.

CAS PARTICULIER. — Si $p = 0$, C et C' sont tangents en O à Oy (fig. 62); les cercles Γ qui leur sont orthogonaux sont ceux qui sont tangents en O à Ox.

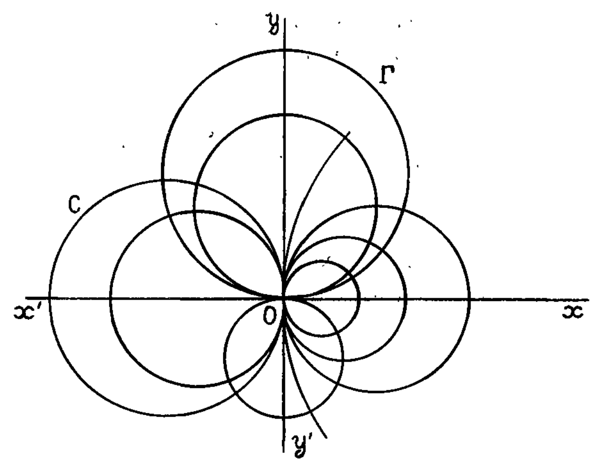


FIG. 62.

Les deux faisceaux conjugués sont

$(\mathcal{F}) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0; \qquad (\Phi) \qquad x^2 + y^2 - 2\mu y = 0.$

2° **Étude géométrique.**

a) $\Gamma(\Omega, \rho)$ orthogonal à C et C' $\Longrightarrow$ $\{ C(\Omega) = \rho^2, C'(\Omega) = \rho^2 \}$ $\Longrightarrow$ $\Omega \in \Delta$

b) Soit Ω un point de Δ, k sa puissance pour C et C'; si $k > 0$, le cercle $(\Omega, \sqrt{k})$ est orthogonal à C et C'.

c) O est sur le cercle de diamètre IΩ; donc

$$C(O) + \Gamma(O) = 0,$$

on en déduit l'échange des points fixes et des points limites dans les deux faisceaux.

3° **Applications.** — Par un point M non situé sur II' il passe un cercle Γ du faisceau Φ et seul; soit M' le point diamétralement opposé à M sur Γ : M et M' sont deux points conjugués pour tout cercle C du faisceau $\mathcal{F}$; on retrouve ainsi que les polaires du point M par rapport aux cercles d'un faisceau linéaire passent par un point M'.

VI. QUADRANGLE HARMONIQUE

206. ***Définitions diverses du quadrangle harmonique.*** **1° Définition I à partir de deux droites conjuguées sécantes à un cercle.** — On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre K, une sécante AA' à $\mathcal{C}$ (fig. 63); soit J le pôle de AA'; une sécante passant par J coupe $\mathcal{C}$ en B et B'; les droites AA' et BB' sont conjuguées pour $\mathcal{C}$ (n° 200, 6°).

On dit que la figure AA′, BB′ est un quadrangle harmonique ayant A, A′ et B, B′ pour sommets opposés; les segments AA′ et BB′ sont appelés les diagonales du quadrangle.

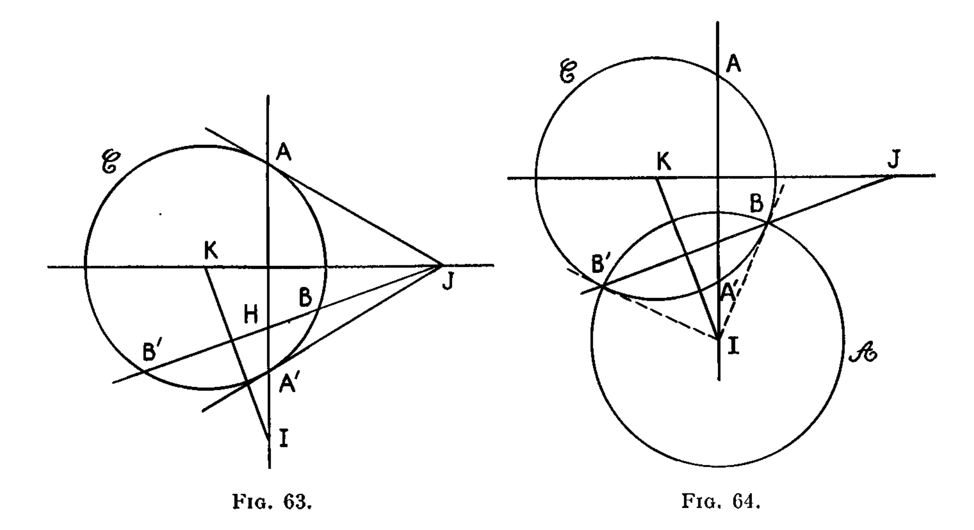


Fig. 63. Fig. 64.

2° **Définition II à partir de cercles orthogonaux.** — On reprend le cercle 𝒞 et les deux points A et A′ de ce cercle (fig. 64). Soit 𝒜 un cercle du faisceau ayant A et A′ pour points limites. Les cercles 𝒜 et 𝒞 sont orthogonaux; 𝒜 coupe 𝒞 en deux points B et B′.

On dit que la figure AA′, BB′ est un quadrangle harmonique.

3° **Les définitions précédentes sont équivalentes.** — Si l'on part de la première définition, le pôle I de la droite BB′ est situé sur la droite AA′; le cercle 𝒜 de centre I, de rayon IB = IB′ est orthogonal en B et B′ à 𝒞, et par suite le diamètre de 𝒜 porté par AA′ est divisé harmoniquement par les points A et A′; 𝒜 fait partie du faisceau ayant A et A′ pour points limites.

Si l'on part de la deuxième définition, BB′ est la polaire de I pour le cercle 𝒞; cette droite passe donc par le pôle J de la droite AA′.

4° **Définition III à partir d'une gerbe harmonique.** — *a*) Coupons une gerbe harmonique de sommet M par un cercle 𝒞 contenant M; on obtient ainsi quatre points A, et A′, B et B′ sur chacun des couples de rayons homologues (fig. 65).

Montrons que la figure AA′, BB′ est un quadrangle harmonique.

Si P est un point quelconque de 𝒞, la gerbe P(AA′, BB′), homologue de la gerbe donnée dans un déplacement, est aussi harmonique.

En particulier, si P = A, on trouve ainsi que la tangente AT en A à 𝒞 est conjuguée harmonique de AA′ par rapport à AB et AB′. En coupant par la sécante BB′ le faisceau précédent, AT et AA′ sont coupées respectivement en J et H : la division HJ, BB′ est harmonique.

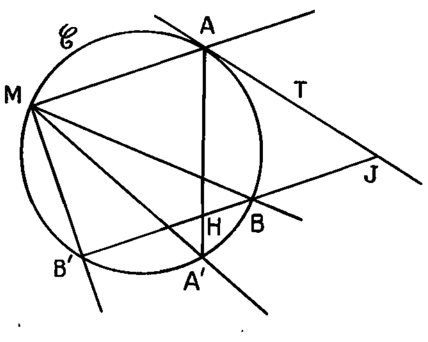


Fig. 65.

Il en résulte que la polaire de J pour $\mathcal{C}$ passe par H; comme elle passe aussi par A, J est le pôle de AA', et la droite BB' est conjuguée de AA'; on est ramené à la définition I.

b) Inversement, en partant de la définition I (fig. 63) HJ, BB' se divisent harmoniquement, la gerbe (AJ, AA'; AB, AB') est harmonique, et par suite aussi la gerbe M(AA', BB'), quel que soit M sur $\mathcal{C}$.

Les définitions I et III sont donc équivalentes.

5° **Cas particulier de quadrangle harmonique.** — Dans tout ce qui précède nous avons supposé que A et A' ne sont pas diamétralement opposés.

Supposons maintenant (fig. 66) A et A' diamétralement opposés; le pôle de la droite AA' est alors le point J à l'infini dans la direction perpendiculaire; toute droite conjuguée de AA' est perpendiculaire à AA'.

La figure formée par A, A' et par deux points symétriques par rapport au diamètre AA' est un quadrangle harmonique particulier.

Un carré est un quadrangle harmonique.

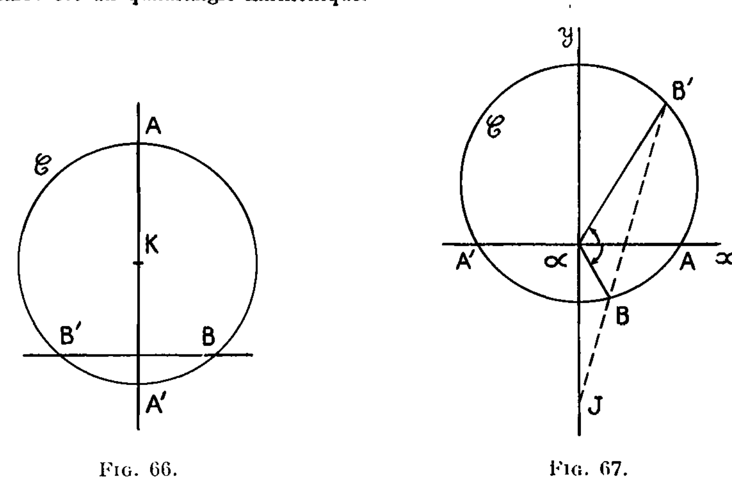


Fig. 66. Fig. 67.

6° **Définition IV à partir du birapport.** — *a*) Donnons-nous quatre points distincts A, B, C, D du plan complexe par leurs affixes *a*, *b*, *c*, *d*.

Soit ρ le birapport (a, b, c, d)

$$\rho = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

$$\begin{cases} |\rho| = \dfrac{\text{CA}}{\text{CB}} : \dfrac{\text{DA}}{\text{DB}} \\ \arg\rho = (\overrightarrow{\text{BC}}, \overrightarrow{\text{AC}}) - (\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{AD}}) \qquad [2\pi] \end{cases}$$

Il en résulte que le birapport ρ est indépendant du repère orthonormé choisi dans le plan complexe, à condition que le repère conserve la même orientation.

On peut donc définir le birapport ρ comme étant celui des quatre points A, B, C, D du plan orienté.

b) Supposons alors $\rho = -1$:

(1) $\dfrac{\text{CA}}{\text{CB}} = \dfrac{\text{DA}}{\text{DB}}$; (2) $(\overrightarrow{\text{BC}}, \overrightarrow{\text{AC}}) = (\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{AD}}) + \pi \quad [2\pi]$.

Si l'un des angles (2) est nul, l'autre est π, et les points sont quatre points alignés formant une division harmonique.

Si les angles (2) sont distincts de 0 ou π, les quatre points sont cocycliques, C et D de part et d'autre de la sécante AB, et la relation (1) montre que C et D sont sur un cercle du faisceau ayant A et B pour points limites : on retrouve la définition II du quadrangle harmonique.

REMARQUE. — Lorsque le birapport ρ est réel, les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques.

c) Soit AA', BB' un quadrangle harmonique (fig. 67); rapportons-le à un repère orthonormé dont les axes αx et αy sont portés par AA' et sa médiatrice; soient a, $a' = -a$, b, b' les affixes des quatre points; la relation d'harmonie prend la forme

$$bb' = a^2 \quad (a^2 \text{ réel positif}).$$

Il en résulte (cf. I, n° 83, 2° *b*) que AA' est la bissectrice de $\overrightarrow{\alpha B}$, $\overrightarrow{\alpha B'}$, et que

$$\alpha B . \alpha B' = \alpha A^2.$$

EXERCICES

GÉOMÉTRIE PLANE
(*repère orthonormé*)

1. — On donne la droite D($y =$ R), le cercle (Γ)(O, R). D'un point P (d'abscisse Rλ) situé sur D, on mène à (Γ) une tangente PA non parallèle à Ox.

a) Trouver les coordonnées de A en fonction de λ; équation du cercle (S) tangent en P à la droite D et passant par A.

b) Lieu du centre de (S), enveloppe de la corde commune à (S) et (Γ); lieu du pôle de cette corde par rapport à (Γ).

c) Montrer que (S) reste orthogonal à un cercle fixe et tangent à un autre cercle fixe.

2. — On donne deux faisceaux de cercles qui ont un point limite commun. Trouver le lieu géométrique des points communs à deux cercles orthogonaux appartenant respectivement aux deux faisceaux.

3. — Existe-t-il un cercle orthogonal à trois cercles donnés? Le cas échéant, donner son équation, connaissant les équations normales des trois cercles.

Application : Lieu des points dont les polaires par rapport à trois cercles donnés sont concourantes.

4. — On donne les points

$$A(a, 0), \quad A'(-a, 0), \quad B(0, 2b). \quad (a > 0, b > 0).$$

D'un point M de Ox, d'abscisse variable λ, on mène la parallèle à BA' qui coupe BA en C, la parallèle à BA qui coupe BA' en C'.

a) Équation du cercle Γ de diamètre CC'.

b) Par un point P donné il passe en général deux cercles Γ; la discussion de leur réalité conduit à une courbe séparatrice Σ que l'on caractérisera et que l'on construira.

c) Lieu des points par où passent deux cercles Γ orthogonaux.

5. — On donne l'ellipse E : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

a) Équation générale des cercles Γ ayant pour diamètre une corde quelconque de E, perpendiculaire à Ox.

b) Trouver les cercles Γ passant par un point (x_0, y_0) du plan; trouver les cercles Γ tangents à une droite donnée ($ux + vy + h = 0$) du plan.

La discussion de ces deux problèmes conduit à considérer une même courbe séparatrice Σ.

c) Soit N (x_1, y_1) un point quelconque de Σ; montrer que la longueur de la tangente issue de N à un cercle Γ particulier est une fonction de x_1 qui est un polynôme du premier degré.

Relation entre les longueurs des tangentes issues de N à deux cercles Γ et Γ' donnés.

d) Lieu géométrique des points de contact des tangentes aux cercles Γ dont la direction est donnée.

e) Lieu géométrique des points du plan où passent deux cercles Γ orthogonaux.

6. — On donne la droite Δ $(x = d)$. On considère un cercle (C) passant par O, dont le centre est C (α, β), et qui coupe Δ en deux points M_1 et M_2 tels que l'un des angles des droites OM_1 et OM_2 soit constant et égal à $V\left(0 < V < \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Lieu du point C, et enveloppe du cercle (C).

b) Il existe des cercles (S) tels que l'un d'eux coupe sous le même angle tous les cercles (C); trouver l'équation générale des cercles (S) en prenant pour paramètre l'abscisse du centre; peut-on choisir un cercle (S) de façon que l'angle sous lequel il coupe tous les cercles (C) ait une valeur donnée θ ?

7. — On donne un triangle par les équations normales de ses trois côtés; d'un point M quelconque on abaisse les perpendiculaires MP, MQ, MR sur les côtés BC, CA, AB. Lieu des points M pour lesquels :

a) P, Q, R sont alignés;

b) le triangle PQR a une aire donnée.

8. — Soit O un point pris sur un cercle donné C et soient A, B les intersections de la tangente en O au cercle C et des tangentes menées à ce cercle par un point P. Trouver le lieu géométrique des points P pour lesquels $\overline{OA} + \overline{OB} = l$ ou $\overline{AB} = l$ ou $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = k$, l ou k étant donné.

9. — Soient deux cercles C et C′ de rayons R et R′. On rapporte le plan à un repère orthonormé dont l'un des axes passe par les centres des cercles. Former les relations qui expriment : *a*) que les tangentes menées de M (x, y) au cercle C sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées de M au cercle C′; *b*) que les intersections de la droite D $(u, v, 1)$ avec le cercle C sont conjuguées harmoniques par rapport aux intersections de la même droite avec le cercle C′ et vérifier que cette dernière relation exprime aussi que les distances des centres à la droite D ont un produit que l'on évaluera au moyen des rayons et de la distance des centres des cercles. Lieu géométrique de M et enveloppe de D.

10. — On donne un cercle Γ et trois points A, B, C.

a) Soient α, β, γ les centres des cercles qui passent par le centre O de Γ et respectivement par les points d'intersection de Γ et des droites BC, CA, AB. Montrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes.

b) On désigne par A′, B′, C′ les pôles des droites BC, CA, AB par rapport à Γ. Montrer que les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes.

11. — On donne un triangle ABC; soit O le centre du cercle circonscrit. On désigne par α, β, γ les centres des cercles respectivement circonscrits aux triangles OBC, OCA, OAB. Montrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes.

12. — Démontrer, par une interprétation géométrique, que les relations

$$x_1y_2 + x_2y_1 = x_2y_3 + x_3y_2 = x_3y_1 + x_1y_3$$

entraînent la relation
$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

13. — *a*) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ désignant trois cercles d'un même faisceau, de centres respectifs A, B, C, démontrer la formule

$$\forall M, \quad \mathcal{A}(M).\overline{BC} + \mathcal{B}(M).\overline{CA} + \mathcal{C}(M).\overline{AB} = 0.$$

b) Un cercle de centre M, quelconque, coupe les cercles précédents, de rayons R_A, R_B R_C sous des angles désignés par V_A, V_B, V_C; démontrer la formule

$$\overline{BC}.R_A \cos V_A + \overline{CA}.R_B \cos V_B + \overline{AB}.R_C \cos V_C = 0.$$

14. — On donne trois cercles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; soit $\mathcal{A}_1$ le cercle du faisceau déterminé par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, qui est orthogonal à $\mathcal{A}$; soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{C}_1$ les cercles analogues obtenus par permutation circulaire; démontrer que les cercles $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ appartiennent à un même faisceau.

15. — Lieu géométrique des points dont les puissances par rapport à deux cercles sont proportionnelles aux carrés des rayons.

16. — Étant donnés un point A et une droite D, lieu géométrique des points M tels que $MA^2 = k.MH$, MH étant la distance de M à D et k une constante donnée.

17. — On donne deux cercles C_1 et C_2; trouver le lieu des points M tels que

$$\sqrt{C_1(M)} \pm \sqrt{C_2(M)} = k,$$

k étant une constante donnée.

18. $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$ sont les équations normales de deux cercles C_1 et C_2 de rayons R_1 et R_2. Montrer que les cercles d'équations

$$\frac{1}{R_1} f_1(x, y) \pm \frac{1}{R_2} f_2(x, y) = 0$$

coupent C_1 et C_2 sous des angles égaux. Étudier la réciproque.

19. — On donne le cercle C par la représentation paramétrique : $x = R \cos\theta$, $y = a + R \sin\theta$.

a) Exprimer, en fonction de θ, l'équation du cercle Γ centré sur Ox et tangent à C au point M de paramètre θ.

b) Γ coupe Ox aux points U et V d'abscisses u et v. Démontrer qu'il existe entre u et v une relation indépendante de θ; vérifier que cette relation se décompose en deux relations homographiques.

c) Étant donné un cercle Γ, il existe deux cercles Γ' et Γ'' de la même famille qui lui sont tangents. a étant donné, comment faut-il choisir R pour que Γ' et Γ'' soient eux-mêmes tangents?

20. — Enveloppe des cercles qui ont pour diamètre MM', M et M' étant en correspondance homographique h sur une droite Δ.

Étude géométrique au moyen d'une inversion de pôle P, si les points doubles P et Q de h sont réels, d'une inversion de pôle S, tel que (SM, SM') = V, si les points invariants de h sont imaginaires.

21. — Si M et M' se correspondent homographiquement sur deux droites Δ et Δ', le cercle de diamètre MM' reste orthogonal à un cercle fixe ou à une droite fixe.

22. — Les deux droites représentées par l'équation

$$(a + \lambda a')x^2 + 2(b + \lambda b')xy + (c + \lambda c')y^2 = 0$$

coupent en A et B la droite qui a pour équation $ux + vy + h = 0$. O étant l'origine des coordonnées, on demande de trouver, quand λ varie, le lieu géométrique du point diamétralement opposé à O sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

23. — On donne, sur une droite Δ, trois points A, B, C d'abscisses a, b, c.

a) Soit A' le conjugué harmonique de A par rapport à B et C; on désigne par B' et C' les points analogues. Démontrer que les cercles de diamètres AA', BB', CC' appartiennent à un même faisceau dont les points fixes P et Q sont réels. Sous quels angles se coupent ces cercles?

b) Soit U et U′ les points du cercle de diamètre BC situés sur la perpendiculaire en A′ à Δ; soit V, V′ et W, W′ les points analogues. Démontrer que les points U, U′, V, V′, W, W′ sont sur un même cercle Γ, lieu des points M tels que

$$2\,\Sigma\,MA^2 = \Sigma\,BC^2.$$

c) En désignant par α, β, γ les milieux de AA′, BB′, CC′, démontrer que les cercles de diamètres Aα, Bβ, Cγ sont orthogonaux au cercle Γ.

24. — Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. 𝒜, ℬ, 𝒞 sont les cercles circonscrits aux triangles OBC, OCA, OAB. Une droite Δ passant par O recoupe ces cercles en A′, B′, C′; les tangentes en ces points à ces cercles forment un triangle A″B″C″.

a) Démontrer que $\overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'} = 0$, que les segments B′C′, C′A′, A′B′ sont vus de A, B, C respectivement sous des angles constants, et que le triangle A″B″C″ est équilatéral.

b) Démontrer que les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un point P et que les droites AA″, BB″, CC″ concourent en un point Q. Construire les lieux des points P et Q lorsque Δ varie.

c) Démontrer que les perpendiculaires en A′, B′, C′ aux côtés correspondants du triangle A″B″C″ concourent en un point I; construire le lieu de ce point lorsque Δ varie.

d) Construire le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle A″B″C″.

25. — Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Un point M (x_0, y_0) se projette en P, P′, Q sur les droites d'équations $y = x$, $y = -x$, $x = a$ respectivement.

a) Former l'équation du cercle Γ circonscrit au triangle PP′Q.

b) Comment doit-on choisir M pour que Γ ait son centre sur Oy? Les cercles Γ se répartissent alors en deux familles : l'une est un faisceau, les cercles de l'autre famille ont un rayon constant.

c) Étudier de même les cercles Γ centrés sur Ox : montrer que, parmi eux, se trouvent des cercles bitangents à une parabole.

d) Démontrer que si M décrit une parallèle à Oy, il existe un point fixe qui a une puissance constante par rapport à tous les cercles Γ.

26. — Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit k un nombre positif différent de 1. A tout point U du plan, non situé sur Ox, on associe le cercle Γ(U) lieu des points M tels que MU = kMU′, U′ étant le symétrique de U par rapport à Ox.

a) Démontrer que l'axe radical des cercles Γ(U) et Γ(V) passe par le centre du cercle qui contient les points U, V, U′, V′.

b) Quel est le lieu du point U quand Γ(U) passe par un point donné A?

c) Démontrer que la condition d'orthogonalité de Γ(U) et Γ(V) s'écrit :

$$\frac{UV}{UV'} = \frac{VU}{VU'} = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^4}}.$$

27. — Dans un plan, on donne deux cercles :

Γ, de centre O, de rayon R, et γ de centre ω $(d, 0)$ de rayon r.

On adopte pour Γ la représentation paramétrique

$$x = R\frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad y = R\frac{2u}{1+u^2}.$$

a) Trouver, entre les paramètres t_1, t_2 de deux points M_1 et M_2 de Γ, une relation nécessaire et suffisante pour que la droite M_1M_2 soit tangente à γ. (*On pourra poser* $d + R = \alpha r$ *et* $d - R = \beta r$).

b) D'un point μ de Γ, de paramètre θ, extérieur à γ on mène à γ les deux tangentes qui recoupent Γ en U_1 et U_2. Former, en fonction de θ, l'équation de la droite U_1U_2.

c) Démontrer que, lorsque u varie, la droite U_1U_2 reste tangente à un cercle C appartenant au faisceau déterminé par Γ et γ. Examiner le cas où C et γ sont confondus.

28. — Dans un repère orthonormé (Ox, Oy), on désigne par Π l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y \geqslant 0$.

On appelle *f-droite* (fausse droite) de Π l'ensemble D des points $M(x, y)$ de Π tels que $K(x^2 + y^2) - 2ax + p = 0$, K, a, p étant des nombres réels, donnés (K et a n'étant pas simultanément nuls), tels que $a^2 - pK > 0$. Deux points quelconques M, M' de Π déterminent une et une seule f-droite qu'on notera (MM').

On détermine un point M de D comme intersection de D avec l'une quelconque des f-droites passant par M.

A la f-droite D, on associe d'autre part la droite projective de coordonnées (K, a, p) dans un espace projectif $\mathcal{E}^*$ de dimension 2 sur R. Utiliser cette correspondance pour résoudre les questions suivantes :

a) On donne deux f-droites D et D', un point M sur D et un point M' sur D'. Déterminer la f-droite (MM').

b) On donne trois points M_1, M_2, M_3 sur D, et trois points M'_1, M'_2, M'_3 sur D'. Démontrer que les points d'intersection des couples de f-droites :

$$((M_2M'_3),\ (M_3M'_2)),\quad ((M_3M'_1),\ (M_1M'_3)),\quad ((M_1M'_2),\ (M_2M'_1))$$

lorsqu'ils existent, sont sur une même f-droite.

(*Les f-droites considérées sont les images, données par H. Poincaré, des « droites » de la Géométrie non-euclidienne de Lobatchefsky : l'exercice précédent montre que le théorème de Pappus* (Cf. n° 102) *est encore vrai dans cette Géométrie.*)

29. — I. — On donne l'équation du troisième degré :

$$(1)\qquad t^3 - 3\lambda t^2 - 3(\lambda + 1)t - 1 = 0.$$

a) Calculer les racines de cette équation pour $\lambda = j$ ou $\lambda = j^2$.

b) Démontrer que si λ est réel les trois racines sont réelles.

c) Déterminer λ pour que l'une des racines soit un nombre donné α. Vérifier que les deux autres racines β et γ sont des fonctions rationnelles de α, soit $\beta = \varphi(\alpha)$, $\gamma = \psi(\alpha)$. Que peut-on dire des suites $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ déterminées par les relations de récurrence :

$$u_n = \varphi(u_{n-1}),\quad v_n = \psi(v_{n-1}).$$

II. — Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on donne le cercle C déterminé paramétriquement par les équations :

$$x = R\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = R\frac{2t}{1 + t^2}.$$

a) Former l'équation aux t des points d'intersection du cercle C et du cercle Γ de centre $\Omega(x_0, y_0)$ orthogonal à C.

b) Les notations étant celles du § I, *c*), déterminer x_0 et y_0 en fonction de α de manière que le cercle Γ coupe le cercle C aux points de paramètres β et γ. Démontrer que, lorsque α varie, le lieu des centres des cercles Γ est une parabole P, et que ces cercles restent tangents à une même droite D.

c) Démontrer qu'il existe une infinité de systèmes de trois cercles tangents deux à deux, orthogonaux à C, et tangents à D.

30. — On dit que quatre points d'une droite projective complexe forment une *division équiharmonique* lorsque l'un de leurs birapports est une racine cubique imaginaire de 1. Quels sont alors leurs autres birapports?

a) Démontrer que quatre points d'abscisses projectives a, b, c, d forment une division équiharmonique si, et seulement si :

$$(d - a)^2(b - c)^2 + (d - b)^2(c - a)^2 + (d - c)^2(a - b)^2 = 0. \qquad (1)$$

b) Soit l'équation à coefficients complexes : (E) $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$. On suppose que ses racines a, b, c sont distinctes et on appelle A, B, C leurs images dans le plan complexe. Démontrer que l'équation (1), considérée comme équation en d, a, *en général*, deux

racines distinctes u et v (d'images U et V). Exprimer les coefficients de cette équation en fonction de p, q, r. Quel est le cas d'exception?

Démontrer que les points U et V sont inverses par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC et que les *arcs* de cercle UAV, UBV, UCV se coupent en U et V sous des angles de $\frac{2\pi}{3}$.

Démontrer que si u et v sont distincts, l'équation (1) peut se mettre sous la forme :

$$(z - u)^3 - k(z - v)^3 = 0.$$

Déduire de là une méthode de résolution de l'équation du troisième degré.

c) a, b, c étant trois nombres complexes donnés, deux à deux distincts, démontrer que les deux équations :

$$(z - a)^3(b - c)^3 = (z - b)^3(c - a)^3 = (z - c)^3(a - b)^3$$

ont deux racines communes.

d) Trouver une relation entre A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 nécessaire et suffisante pour que les racines de l'équation

$$A_0z^4 + 4A_1z^3 + 6A_2z^2 + 4A_3z + A_4 = 0$$

soient les abscisses projectives de quatre points formant une division équiharmonique.

31. — Toute inversion transforme un quadrangle harmonique en un quadrangle harmonique, — ou en une division harmonique; peut-on, par inversion, transformer un quadrangle harmonique en un carré?

32. — Dans le plan complexe, on donne trois points distincts A, B, C. A tout point M du plan on fait correspondre le point M′ tel que les birapports (A, B, C, M) et (A, B, C, M′) soient deux nombres complexes conjugués. Étudier la transformation ponctuelle ainsi définie.

33. — Dans le plan de la variable complexe, on considère la transformation ponctuelle T qui, au point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M′ d'affixe z' liée à z par la relation $zz' = a^2$, a étant un nombre réel donné. Soient A et A′ les points invariants de T.

Démontrer que T transforme un cercle Γ en un cercle Γ′ (exceptionnellement en une droite). Déterminer les cercles invariants par T.

Démontrer qu'il existe, dans le faisceau déterminé par Γ et Γ′, un cercle passant par A et A′, et qu'il existe, dans le faisceau ayant pour points limites A et A′, un cercle orthogonal à Γ et Γ′.

(*Une solution analytique est demandée, qu'on pourra compléter par une solution géométrique*).

34. — Construire un triangle A, B, C connaissant les points d'intersection A′, B′, C′ des médianes et du cercle circonscrit. On se placera dans le plan de la variable complexe, et on montrera que les affixes α, β, γ de A′, B′, C′ sont liées à l'affixe Z du centre de gravité du triangle ABC par la relation

$$\frac{1}{Z - \alpha} + \frac{1}{Z - \beta} + \frac{1}{Z - \gamma} = 0.$$

35. — On donne quatre nombres complexes distincts a, b, c, d. On désigne par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les trois involutions caractérisées par le tableau ci-contre :

	couples homologues	éléments invariants
$\mathcal{A}$	(a, d) (b, c)	u, u'
$\mathcal{B}$	(b, d) (c, a)	v, v'
$\mathcal{C}$	(c, d) (a, b)	w, w'

α) Démontrer que

$$(v, v', w, w') = (w, w', u, u') = (u, u', v, v') = -1.$$

β) Étudier les applications

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \circ \mathcal{C}, \quad \mathcal{B} \circ \mathcal{A};$$

γ) Étudier la figure déterminée dans le plan complexe par les images qui nombres qui interviennent dans l'étude précédente.

Géométrie dans l'espace.

(repère orthonormé)

36. — Condition pour que le plan $ux + vy + wz + h = 0$ coupe suivant deux cercles orthogonaux les sphères représentées par

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,ax - b^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2\,ax - b^2 = 0.$$

37. — Deux points M et M′ décrivent des divisions homographiques sur deux droites données Δ et Δ'; soit S la sphère de diamètre MM′.

Étudier et discuter l'existence éventuelle de points fixes ayant une puissance fixe par rapport à S.

38. — Équation générale et lieu des centres des sphères tangentes aux axes Ox, Oy et au cercle d'équations

$$z = a, \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

39. — Lieu d'un point M tel que les projections A, B, C de M sur les plans de coordonnés déterminent un triangle dont le cercle circonscrit a un rayon donné.

40. — On désigne par a, b, c les racines (supposées réelles) de l'équation :

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

et on porte, sur les axes d'un repère orthonormé : $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$. Calculer en fonction de p, q, r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

41. — Déterminer le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations :

$$x + y + z = 5; \qquad x + y - z = 4; \qquad x - y + z = 6; \qquad -x + y + z = -1.$$

42. — On rapporte l'espace à un repère orthonormé $Oxyz$. On donne : sur Ox deux points A et A′ d'abscisses a et a'; sur Oy, deux points B et B′ d'ordonnées b et b'; sur Oz, deux points C et C′ d'ordonnées c et c'.

a) Démontrer que les orthocentres des huit triangles ABC, AB′C′, A′BC, etc... sont situés sur une même sphère S.

b) Soit R le rayon de S, p la puissance de O par rapport à S.

Démontrer que : $\dfrac{1}{p} = \Sigma \dfrac{1}{aa'}$ et $\dfrac{4\,R^2}{p^2} = \Sigma \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a'}\right)^2$.

c) Démontrer que, pour que les centres de gravité des huit triangles soient sur la sphère S, il faut et il suffit que les six points donnés soient cosphériques.

43. — Par chacune des droites

$$D_1 \begin{cases} z = 0 \\ x = a \end{cases} \qquad D_2 \left| \begin{array}{l} z = 0 \\ y = b \end{array} \right. \qquad D_3 \left| \begin{array}{c} z = 0 \\ x + y = c \end{array} \right.$$

on peut mener à la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,\lambda z = 0$ un plan tangent distinct de xOy. Lieu, quand λ varie, du point commun à ces trois plans tangents (solutions analytique et géométrique).

CHAPITRE XVI

LES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

I. MÉTHODES DE RECHERCHE D'UN LIEU GÉOMÉTRIQUE

207. ***Le problème des lieux géométriques.*** — 1° **Position du problème.** — Nous désignerons par $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ respectivement le plan et l'espace de la géométrie élémentaire, éventuellement munis d'une structure euclidienne si la question comporte des longueurs et des angles. Sauf avis contraire, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ ne seront pas complexifiés et on n'en considérera pas les complétions projectives.

Nous avons signalé au n° 136 certains sous-ensembles de $\mathcal{L}$ [resp. $\mathcal{E}$], définis dans un repère donné $\mathcal{R} = \{ O, \vec{i}, \vec{j} \}$ [resp. $\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$], par des conditions analytiques, c'est-à-dire portant sur les coordonnées des points de ces sous-ensembles; nous les avons appelés courbes [resp. courbes ou surfaces] paramétrées ou implicites.

Posons maintenant la définition suivante :

DÉFINITION. — **On donne le nom de lieu géométrique à l'ensemble des points de $\mathcal{L}$ ou de $\mathcal{E}$ qui ont une propriété géométrique commune donnée P.**

En abrégé, on peut dire *lieu* à la place de *lieu géométrique.*

Le seul problème que nous nous proposons de traiter ici est le suivant (1).

Étant donné un lieu géométrique L, peut-on en obtenir une représentation analytique

— soit paramétrique (ou explicite);

— soit implicite?

En d'autres termes, peut-on caractériser analytiquement les points de L en identifiant L à une courbe de $\mathcal{L}$ (ou bien soit à une courbe, soit à une surface de $\mathcal{E}$)?

---

(1) Les propriétés infinitésimales des courbes et des surfaces (tangentes et plans tangents) seront étudiées au tome IV.

Remarque. — Ce qui précède suppose que la propriété P se traduit analytiquement par une ou plusieurs relations d'égalité entre les coordonnées d'un point du lieu géométrique; si la traduction analytique de P comporte des inégalités entre les coordonnées d'un point, on pourra identifier le lieu géométrique soit à une région de $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{E}$, soit à une nappe d'une surface de $\mathcal{E}$, soit à un arc d'une courbe de $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{E}$.

2° **Observation générale.** — L'étude analytique d'un lieu géométrique comporte habituellement les phases suivantes :

a) Énoncé du problème. — On donne une figure F, composée d'éléments fixes (points, droites, cercles, ...); on lui adjoint un point M, initialement quelconque. Comment choisir M pour que l'ensemble formé par F et M jouisse d'une propriété géométrique donnée P?

b) Choix du repère. — Si l'énoncé ne fixe pas complètement les données nécessaires à la détermination de la figure F, s'il ne précise pas non plus à quel système de coordonnées on doit la rapporter, il convient de choisir ces divers éléments de façon à simplifier les calculs ultérieurs.

Si la question posée est d'origine métrique — c'est-à-dire s'il y intervient des longueurs et des angles — on choisit un repère orthonormé ou un repère polaire.

Si la question posée est d'origine affine, — c'est-à-dire s'il n'y intervient que des questions de parallélisme, de points alignés, de droites concourantes, on choisit un repère affine.

En géométrie projective, on choisit, bien entendu, un repère projectif.

On place la figure donnée F par rapport au repère, c'est-à-dire on choisit des paramètres qui, lorsque leurs valeurs numériques sont connues, permettent la construction de F lorsque le repère est fixé.

Le choix de ces nombres peut être important : par exemple, si F est un triangle, il peut être plus avantageux de déterminer ce triangle par les coordonnées de ses sommets que par les équations de ses côtés.

c) Caractérisation analytique du lieu géométrique L. — C'est cette caractérisation qui va essentiellement nous occuper dans ce chapitre.

d) Construction de L. — Les généralités sur la construction des courbes seront vues au tome IV. Nous signalerons ici des cas simples où le lecteur pourra construire L — et placer L par rapport à la figure primitive F — lorsque L est une courbe ou une surface déjà connue (droite, plan, cercle, sphère, ...).

Remarque. — La recherche des lieux géométriques nous offre l'occasion de rappeler au lecteur que *tout calcul doit être dirigé et, non seulement vérifié, mais encore contrôlé.* Constamment la pensée doit diriger le calcul et aucune transformation ne doit être faite sans raison. En géométrie métrique, l'homo-

généité donne un premier moyen de contrôle, d'autres peuvent être tirés soit de considérations de symétrie, soit de cas particuliers dans lesquels les résultats apparaissent *a priori*.

208. ***La « méthode directe ».*** — **1° Emploi immédiat de la propriété donnée** P. — Il arrive, dans les cas simples, que la propriété géométrique P qui caractérise les points M du lieu géométrique L se traduise immédiatement, sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante,

— soit par une ou plusieurs relations d'égalité entre les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$ choisi,

— soit par la possibilité d'exprimer les coordonnées de M au moyen d'un ou de plusieurs paramètres.

La question est ainsi résolue.

On a déjà vu aux nos 139 et 140 les exemples de la droite, du cercle, des coniques.

On étudiera ultérieurement au tome IV les exemples suivants :

— Conchoïdes (IV, n° 49).
— Cissoïdes et strophoïdes (IV, n° 51).
— Podaires (IV, n° 52).
— Cycloïde (IV, n° 80).
— Epicycloïdes et hypocycloïdes (IV, n° 81).

Donnons d'autres exemples.

Exemple I. — *Famille des droites joignant un point donné* O *aux points d'intersection de deux courbes données* C *et* C' *du plan* $\mathcal{P}$.

Nous choisissons naturellement dans le plan $\mathcal{P}$ un repère affine d'origine O; soient

$$(1)\quad f(x, y) = 0 \qquad (2)\quad g(x, y) = 0$$

des équations de C et C' dans ce repère.

Pour que $M(x, y)$ appartienne à l'une des droites joignant O aux points communs à C et C', il faut et il suffit qu'il existe sur la droite OM un point Q commun à C et C'.

Or tout point de la droite OM a des coordonnées de la forme ρx, ρy; en définitive, il faut et il suffit qu'il existe un nombre ρ tel que, simultanément, on ait

$$(3)\qquad f(\rho x, \rho y) = 0 \qquad g(\rho x, \rho y) = 0.$$

En éliminant ρ entre les équations (3), on obtient directement l'équation cartésienne de la famille des droites cherchées $\mathcal{F}$.

On peut aussi, dans la pratique, poser $\rho = \frac{1}{t}$, et éliminer t entre les équations

$$(4)\qquad f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 0, \qquad g\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 0;$$

cela revient à rendre homogènes les équations de C et C', et à éliminer entre ces équations la troisième coordonnée d'homogénéité.

Exemple II. — *Étant données deux droites* D, D' *non coplanaires, trouver le lieu géométrique des points équidistants de* D *et* D'.

Rapportons l'espace euclidien à un repère orthonormé. Pour une raison de symétrie, nous prendrons comme axe $z'z$ la perpendiculaire commune aux droites D et D'; soient A et A' les pieds de cette perpendiculaire commune sur ces deux droites. Choisissons comme origine le point O milieu de AA' et comme axes $x'x$ et $y'y$ les bissectrices des angles formés par les parallèles d et d' à D et à D' menées par O. Observons en passant qu'un

retournement autour d'un de ces axes échange les droites D et D'; $x'x$ et $y'y$ sont des axes de symétrie pour l'ensemble des droites D et D' (fig. 68). On peut représenter la droite D par les équations

(D) $z = a, \quad x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0$

et la droite D' par les équations

(D') $z = -a, \quad x \sin\alpha + y \cos\alpha = 0.$

Les deux plans qui par leur intersection déterminent D étant rectangulaires, la distance MH de M à D est donnée par la formule

$$MH^2 = (z - a)^2 + (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2.$$

Une formule analogue donne la distance MH' de M à D'.

Les points M cherchés sont caractérisés par

$$MH^2 = MH'^2 \quad \text{ou} \quad az + xy \sin\alpha \cos\alpha = 0.$$

L'équation obtenue est de la forme

$$xy = bz;$$

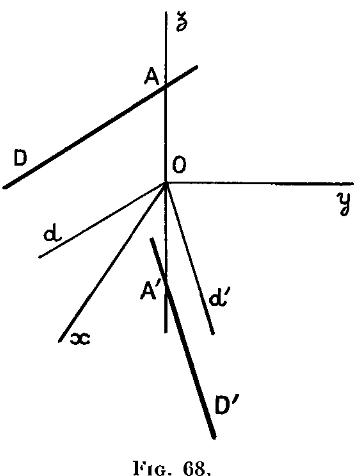


Fig. 68.

la surface S correspondante sera étudiée plus loin (nº 214) sous le nom de paraboloïde hyperbolique.

Exemple III. — *Étant donnés une droite* D *et un point* F *hors de cette droite, trouver le lieu géométrique des points* M *tels que* $\frac{MF}{MH} = e$, *e étant un nombre donné, et* MH *la distance de* M *à* D.

Des raisons de symétrie nous conduisent à prendre F pour origine, pour axe Fz la parallèle à D menée par F, pour axe Fy la perpendiculaire menée de F à D et pour axe Fx la perpendiculaire en F au plan FD; soient

$$y = d, \qquad x = 0$$

les équations de D. La relation MF $= e$MH s'exprime par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^2[x^2 + (y - d)^2]$$

x, y, z étant les coordonnées de M. Cette équation caractérise le lieu géométrique demandé, ce lieu est donc une surface du second ordre. Tout plan parallèle au plan xOy la coupe suivant un cercle si e est différent de 1; le centre de ce cercle a pour abscisse 0 et pour ordonnée $\frac{de^2}{e^2 - 1}$, il reste sur une droite Δ parallèle à D : la surface trouvée est donc de révolution autour de Δ; il est clair que sa trace sur le plan yOz est le lieu des points de ce plan tels que MF $= e$MH, ellipse ou hyperbole suivant que e est inférieur ou supérieur à 1. Dans le premier cas, le lieu est la surface engendrée par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe (ellipsoïde de révolution aplati, cf nº 215); dans le second, c'est la surface engendrée par la révolution d'une hyperbole autour de son axe non transverse, (hyperboloïde de révolution à une nappe; cf nº 215).

Dans le cas particulier où $e = 1$, le lieu a pour équation

$$y^2 + z^2 = (y - d)^2,$$

c'est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Ox; ce cylindre a pour section droite la parabole qui a pour foyer F et pour directrice D.

Il est facile de retrouver géométriquement ces résultats en cherchant quels sont les points du lieu dans un plan perpendiculaire à D.

2° Emploi d'une propriété P′ équivalente à la propriété donnée P. — Si la propriété donnée P ne peut se traduire immédiatement sous forme analytique, on peut passer par l'intermédiaire d'une propriété P′ équivalente logiquement à P, et qui peut, elle, se traduire immédiatement sous forme analytique.

C'est ainsi que, la figure F étant donnée, on peut partir d'un point M quelconque de $\mathfrak{L}$ (ou de $\mathcal{E}$); on réalise une suite de constructions propres à vérifier si M possède, ou non, la propriété P; on arrive en général à une dernière construction mettant en jeu une propriété P′ équivalente logiquement à P.

On traduit analytiquement les constructions précédentes; en écrivant que la dernière réussit — ou que P′ est réalisée —, on obtient une représentation analytique du lieu L.

Exemple I. — *On donne une conique* Γ, *un point* O *sur un axe de* Γ. *On demande le lieu* L *des projections orthogonales de* O *sur les cordes de* Γ *qui sont vues de* O *sous un angle droit.*

La propriété P donnée dans l'énoncé amène à considérer successivement :

α) une corde Q′Q″ de Γ, vue de O sous un angle droit;

β) la projection orthogonale M de O sur Q′Q″.

Nous procéderons dans l'ordre inverse : nous partons d'un point M quelconque, distinct de O, et nous effectuons les constructions propres à vérifier si M possède la propriété P;

α) nous menons la perpendiculaire Δ en M à la droite OM;

β) nous construisons les points Q′ et Q″ communs à Δ et à Γ, et le couple $\mathcal{F}$ des droites OQ′ et OQ″.

M appartient à L si, et seulement si le couple $\mathcal{F}$ est formé de droites perpendiculaires.

L'orthogonalité des droites du couple $\mathcal{F}$ est ici une propriété P′ équivalente logiquement à la propriété P.

Pour appliquer pratiquement la méthode précédente, nous choisissons un repère orthonormé d'origine O, l'axe Ox coïncidant avec l'axe de Γ qui contient O :

$$(\Gamma) \qquad y^2 = ax^2 + bx + c. \qquad (1)$$

Soit $M(x_0, y_0)$ un point quelconque du plan, la perpendiculaire Δ en M à OM a pour équation

$$xx_0 + yy_0 - (x_0^2 + y_0^2) = 0 \qquad (2)$$

Nous obtenons l'équation du couple $\mathcal{F}$ en éliminant t entre les équations

$$y^2 = ax^2 + bxt + ct^2, \qquad xx_0 + yy_0 - (x_0^2 + y_0^2)t = 0,$$

ce qui donne

$$y^2 = ax^2 + bx\frac{xx_0 + yy_0}{x_0^2 + y_0^2} + c\left(\frac{xx_0 + yy_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)^2 = 0.$$

En utilisant l'équivalence

$$\left.\begin{array}{l}\text{les droites}\\ Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 = 0\\ \text{sont perpendiculaires}\end{array}\right\} \iff A + C = 0$$

l'équation de L s'obtient alors immédiatement

$$(a - 1) + \frac{bx_0}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{c}{x_0^2 + y_0^2} = 0,$$

et enfin, puisque $x_0^2 + y_0^2$ n'est pas nul,

$$(a - 1)(x_0^2 + y_0^2) + bx_0 + c = 0 \iff M(x_0, y_0) \in L.$$

Autrement dit, le lieu est la courbe L d'équation

$$(a-1)(x^2+y^2)+bx+c=0$$

Si $a \neq 1$, L est un cercle (on pourra discuter sa réalité).
Si $a = 1$, L est une hyperbole équilatère et L est une perpendiculaire à Ox.

CAS PARTICULIER. — Si $a = -1$, Γ est un cercle, et L a pour équation

$$2(x^2+y^2)-bx-c=0.$$

L'équivalence

$$\widehat{Q'OQ''}=\frac{\pi}{2} \iff MO^2=-\overline{MQ'}\cdot\overline{MQ''}$$

montre alors que L est le lieu des points M tels que

$$MO_1+\Gamma(M)=0.$$

L est un cercle du faisceau ayant pour bases le cercle point O et le cercle Γ; si I est le centre de Γ et R son rayon, on obtient, élémentairement

$$MO^2+MI^2=R^2.$$

EXEMPLE II. — *On donne la droite* D *limitant le demi-plan* $\mathcal{E}_1$; *soit* Γ *un cercle quelconque tangent à* D *en un point donné* O *de cette droite, et situé dans* $\mathcal{E}_1$; *soit* γ *un cercle quelconque de rayon donné* a, *tangent à* D, *et situé dans* $\mathcal{E}_1$; *on demande le lieu* L *des points de contact des cercles* Γ *avec les cercles* γ.

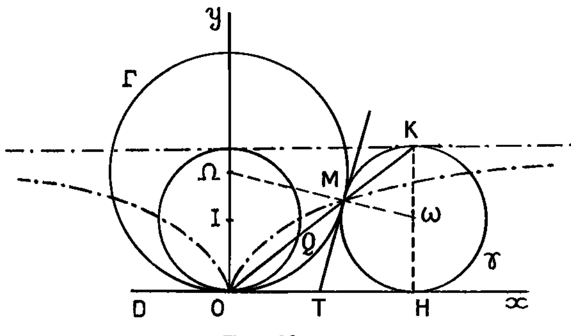


FIG. 69.

Partons d'un point M quelconque de $\mathcal{E}_1$; pour reconnaître s'il appartient à L, nous pouvons envisager les constructions suivantes (fig. 69) :

α) nous construisons le cercle Γ tangent en O à D, passant par M; soit Ω son centre;

β) la tangente en M à Γ croise D en un point T;

γ) il existe un second cercle tangent en M à TM, et tangent à D; on obtient son point de contact H avec D en portant $\overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OT}$; son centre ω est l'intersection de ΩM et de la perpendiculaire en H à D.

$$M \in L \iff \omega H = a$$

ou encore

M ∈ L ⟺ le point d'ordonnée a sur la perpendiculaire en H à D appartient à la droite ΩM.

Pour appliquer pratiquement la méthode précédente, nous prendrons un repère orthonormé d'origine O, Ox étant porté par D, la demi-droite Oy appartenant à $\mathcal{E}_1$.

Tout cercle tangent en O à D a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\rho y = 0 \qquad \overline{O\Omega} = \rho;$$

en exprimant que cette équation est vérifiée par le point $M(x_0, y_0)$ donné, on obtient l'ordonnée

$$\rho = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}$$

du centre Ω du cercle Γ passant par M.

La tangente MT en M à Γ a pour équation

$$xx_0 + yy_0 - \rho(y + y_0) = 0;$$

le point T a pour abscisse $\rho\frac{y_0}{x_0}$, et le point H a pour abscisse $2\rho\frac{y_0}{x_0}$.

Finalement M appartient à L si les points $\Omega(0, \rho)$, $M(x_0, y_0)$, $\omega\left(2\rho\frac{y_0}{x_0}, a\right)$ sont alignés ce qui se traduit par

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 & \dfrac{2\rho y_0}{x_0} \\ y_0 & \rho & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

On peut remplacer la première colonne par $\begin{cases} x_0 \\ y_0 - \rho \\ 0 \end{cases}$ ou $\dfrac{y_0^2 - x_0^2}{2y_0}$

et l'on obtient $\quad \rho_0 y_0^2 - ax_0^2 = 0 \quad$ ou $\quad (x_0^2 + y_0^2)y_0 - 2ax_0^2 = 0.$

L est la cissoïde droite d'équation $\quad (x^2 + y^2)y - 2ax^2 = 0.$

Géométriquement, la droite OM recoupe γ au point K diamétralement opposé à H sur γ; OM coupe le cercle de centre $I(\overline{OI} = a)$, de rayon a, en Q;

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{MK} \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} \quad \text{(cf. IV, n° 51).}$$

209. ***La méthode « indirecte » en géométrie plane : lieu engendré par les points communs à deux courbes variables.*** — **1° Emploi d'un seul paramètre.** — On donne une figure du plan $\mathcal{L}$ comportant des éléments fixes et des éléments variables, parmi lesquels un point M, ayant une propriété P, et dont on demande le lieu L.

On fixe la position des éléments variables au moyen d'un paramètre λ; M peut alors apparaître comme appartenant à l'intersection de deux courbes variables, F_λ et G_λ, qui dépendent du même paramètre λ, assujetti à parcourir un intervalle réel donné $\mathcal{C}$.

$$M \in L \iff \text{Il existe } \lambda \in \mathcal{C} \text{ tel que } M \in F_\lambda \cap G_\lambda.$$

Dans ce cas, la propriété P (ou une propriété équivalente P′) ne peut être exprimée directement; les courbes auxiliaires introduites constituent une façon indirecte de traduire P.

Soient alors :

(1) $\quad f(x, y, \lambda) = 0, \qquad$ (2) $\quad g(x, y, \lambda) = 0$

des équations de F_λ et G_λ dans un repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{L}$.

I. Si l'on sait résoudre le système (1), (2), par rapport à λ, on obtient une représentation paramétrique de $L(\lambda \in \mathcal{C})$.

II. Le point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{L}$ appartient à L si, et seulement si, les deux équations à l'inconnue réelle λ

$$(3) \qquad f(x_0, y_0, \lambda) = 0, \qquad (4) \quad g(x_0, y_0, \lambda) = 0$$

ont une racine commune, *appartenant à l'intervalle* $\mathcal{C}$.

L'existence d'une racine commune s'exprime en éliminant λ entre les équations (3) et (4), ce qui fournit une relation de la forme

$$(5) \qquad \Phi(x_0, y_0) = 0.$$

Le lieu L est ainsi *une partie* de la courbe $\mathcal{L}$ d'équation $\Phi(x, y) = 0$.

Sous forme condensée, on peut dire :

On obtient le lieu géométrique des points communs aux courbes F_λ et G_λ en éliminant λ entre les équations

$$f(x, y, \lambda) = 0 \qquad g(x, y, \lambda) = 0.$$

Remarque I. — L coïncide avec $\mathcal{L}$ seulement si, pour tout point de $\mathcal{L}$, la solution commune en λ des équations (1) et (2) appartient à l'intervalle $\mathcal{C}$.

Remarque II. — Il peut se faire que pour une valeur particulière λ_0 de $\mathcal{C}$, les courbes F_{λ_0} et G_{λ_0} aient en commun un arc γ, d'équation $h(x, y) = 0$. *Stricto sensu*, l'arc γ fait partie du lieu L.

En tout cas γ est une partie de la courbe $\mathcal{L}$ et $\Phi(x, y)$ est le produit de $h(x, y)$ par une autre fonction, qu'il y a intérêt à mettre en évidence.

Remarque III. — Supposons que la courbe F_λ passe par un point fixe $A(a, b)$, quel que soit $\lambda \in \mathcal{C}$.

Par hypothèse, on a $f(a, b, \lambda) = 0$, pour tout $\lambda \in \mathcal{C}$.

Considérons alors l'équation en λ :

$$g(a, b, \lambda) = 0;$$

si elle admet une racine $\lambda_1 \in \mathcal{C}$, les courbes associées

$$(F_{\lambda_1}) \quad f(x, y, \lambda_1) = 0, \qquad (G_\lambda) \quad g(x, y, \lambda_1) = 0$$

contiennent toutes deux le point A; A appartient au lieu L.

2° Exemple I. — *Lieu L des milieux des cordes réelles d'une parabole Γ dont le support passe par un point fixe A.*

Cet exercice ne fait intervenir que des propriétés affines.

Le diamètre de Γ passant par A rencontre Γ en O; prenons un repère affine d'origine O, l'axe Ox sur le diamètre précédent, l'axe Oy sur la tangente en O à Γ; Γ a alors pour équation

$$y^2 - 2\,px = 0;$$

on oriente Ox de façon que p soit positif. Le point A a pour coordonnées $(a, 0)$.

Soit
$$x - a = \lambda y \qquad (1)$$
l'équation d'une droite issue de A; elle coupe Γ aux points Q′ et Q″ dont les ordonnées sont racines de
$$y^2 - 2p(\lambda y + a) = 0. \qquad (2)$$

Le milieu M de Q′Q″ a pour ordonnée
$$y = p\lambda. \qquad (3)$$

Finalement L appartient à la courbe $\mathcal{L}$ obtenue en éliminant λ entre (1) et (3), soit
$$y^2 = p(x - a). \qquad (4)$$

Mais un point M de $\mathcal{L}$ ne sera un point de L que s'il est milieu d'une corde réelle, c'est-à-dire si l'équation (2) a des racines réelles en λ, c'est-à-dire enfin si
$$\lambda^2 p + 2a \geqslant 0.$$

Si $a > 0$, cette condition est réalisée, et L coïncide avec $\mathcal{L}$.

Si $a < 0$, $\lambda^2 \geqslant \frac{-2a}{p}$; les arcs de $\mathcal{L}$ qui appartiennent à L sont les arcs pour lesquels
$$y^2 \geqslant -2ap:$$

$\mathcal{L}$ est une parabole passant par A et par les points de contact des tangentes menées de A à Γ; L ne comporte que les arcs de $\mathcal{L}$ qui sont intérieurs à Γ.

Exemple II. — Considérons, le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormé Ox, Oy, les cercles (C) et (C′) qui ont pour équations
$$\text{(C)} \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0, \qquad \text{(C')} \quad x^2 + y^2 + 2ax = 0.$$
et les deux points $A(ha, ha)$ et $A'(ka, ka)$ situés sur la première bissectrice des axes, h et k étant deux constantes données. Une droite variable passant par O rencontre (C) en P, et (C′) en P′. *Cherchons le lieu géométrique du point* M *commun aux droites* AP *et* A′P′

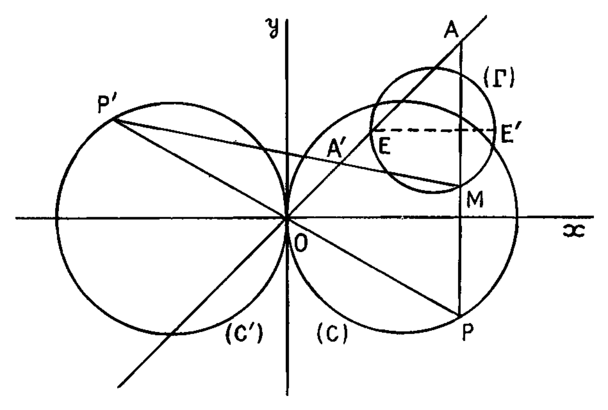


Fig. 70.

Nous nous bornerons au cas général où A n'est pas situé sur (C) (par suite $h \neq 1$), où A′ n'est pas situé sur (C′) (par suite $k \neq -1$) et où les points A et A′ ne sont pas symétriques par rapport à O ($h + k \neq 0$) (fig. 70).

Si la droite variable vient se confondre avec la tangente commune Oy aux deux cercles, les droites AP et A′P′ viennent se confondre avec la droite OAA′, le point M est indéterminé sur cette droite; la première bissectrice fait partie du lieu cherché.

Soit $y - \lambda x = 0$ l'équation de la sécante variable; les coordonnées de P sont

$$x = \frac{2a}{1+\lambda^2}, \qquad y = \frac{2a\lambda}{1+\lambda^2},$$

et l'équation de la droite AP

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ ha & ha & 1 \\ 2a & 2a\lambda & 1+\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

ordonnée par rapport au paramètre λ s'écrit

(AP) $\qquad h(x-y)\lambda^2 - 2(x-ha)\lambda + h(x-y) + 2(y-ha) = 0.$

L'équation de la droite A'P' s'obtient de même :

(A'P') $\qquad k(x-y)\lambda^2 + 2(x-ka)\lambda + k(x-y) - 2(y-ka) = 0;$

on passe d'ailleurs de la première de ces équations à l'autre en changeant a en $-a$ et h en $-k$.

En nous reportant à la formation du résultant de deux équations du second degré

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0, \qquad \alpha'\lambda^2 + \beta'\lambda + \gamma' = 0,$$

nous calculons

$$\begin{aligned} \alpha\gamma' - \alpha'\gamma &= 2(x-y)[-(h+k)y + 2hka] \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta &= 2(x-y)[(h+k)x - 2hka] \\ \beta\gamma' - \beta'\gamma &= 2(x-y)[-(h+k)x + 2hka + 2(h-k)a]. \end{aligned}$$

Le résultant contient le facteur $4(x-y)^2$ que nous nous attendions à trouver; débarrassée de ce facteur l'équation du lieu cherché devient

$$[(h+k)y - 2hka]^2 + [(h+k)x - 2hka][(h+k)x - 2hka - 2(h-k)a] = 0,$$

ou encore, en posant

$$\frac{2hka}{h+k} = l, \qquad \frac{2hk + 2(h-k)}{h+k}a = m,$$

$$(y-l)^2 + (x-l)(x-m) = 0;$$

elle représente le cercle (Γ) qui admet pour points diamétralement opposés $E(l, l)$ et $E'(m, l)$.

3° **Emploi de deux paramètres liés.** — Nous supposons maintenant qu'à chaque point (λ, μ) d'un champ donné, $\mathcal{C} \subset R^2$, correspond un couple de courbes, $F_{\lambda,\mu}$ et $G_{\lambda,\mu}$, d'équations

(6) $\qquad f(x, y, \lambda, \mu) = 0, \qquad$ (7) $\quad g(x, y, \lambda, \mu) = 0$

et nous nous proposons d'étudier le lieu L des points communs aux deux courbes quand (λ, μ) varie, dans $\mathcal{C}$, de telle sorte que λ et μ sont liés par

(8) $\qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0.$

Le point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{P}$ appartient à L si, et seulement si, les trois équations aux inconnues λ et μ

$$f(x_0, y_0, \lambda, \mu) = 0, \qquad g(x_0, y_0, \lambda, \mu) = 0, \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

sont vérifiées par un couple (λ, μ) tel que $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}$.

L'existence d'une racine commune s'obtient en éliminant λ et μ entre les trois équations précédentes, ce qui fournit $\Phi(x_0, y_0) = 0$.

Le lieu L est une *partie* de la courbe $\mathcal{L}$ d'équation $\Phi(x, y) = 0$.

Sous forme condensée, on peut dire :

On obtient le lieu géométrique des points communs aux courbes $F_{\lambda,\mu}$ et $G_{\lambda,\mu}$ en éliminant λ et μ entre les équations

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0 \qquad g(x, y, \lambda, \mu) = 0 \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

REMARQUE. — Exceptionnellement, il peut arriver que l'élimination des paramètres soit possible sans qu'il existe de relation liant les paramètres, dans ce cas l'élimination donne encore l'équation du lieu des points communs aux lignes considérées. Cette circonstance se présente par exemple quand, étant donnés dans un plan deux droites D, D' et un point A, on mène par ce point deux sécantes variables qui rencontrent D et D' l'une en P et P', l'autre en Q et Q'. Les deux paramètres qui fixent ces sécantes ne sont liés par aucune relation et cependant, quand ils varient indépendamment l'un de l'autre, le point M commun aux droites PQ' et P'Q décrit, comme on sait, la polaire de A par rapport aux droites D, D'.

EXEMPLE. — *Deux cercles* (C), (C') *tangents à une même droite en des points donnés* A, A' *varient sans cesser de se couper sous un angle donné. Trouver le lieu géométrique des points communs à ces cercles.*

D'après une étude faite au n° 199, pour que les cercles (C, R) et (C', R') se coupent sous l'angle α, il faut et il suffit que

$$(1) \qquad CC'^2 = R^2 + R'^2 \pm 2\,RR' \cos\alpha.$$

Pour d'évidentes raisons de symétrie nous prendrons la droite AA' comme axe xx' et la médiatrice du segment AA' comme axe $y'y$ d'un repère orthonormé. En désignant par a et $-a$ les abscisses des points A, A', les équations des cercles sont

$$(C) \quad (x-a)^2 + y^2 - 2\lambda y = 0, \qquad (C') \quad (x+a)^2 + y^2 - 2\mu y = 0,$$

λ et μ étant les ordonnées des centres C et C'; $CC'^2 = 4a^2 + (\lambda - \mu)^2$, d'autre part $R^2 = \lambda^2$ et $R'^2 = \mu^2$ et la relation (1) devient

$$2a^2 = \lambda\mu\,(1 \pm \cos\alpha),$$

elle se décompose en deux

$$(2) \quad a^2 = \lambda\mu \cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (3) \quad a^2 = \lambda\mu \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

L'élimination de λ et μ entre les équations des cercles et la relation (2) donne l'équation

$$4a^2y^2 = [(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2] \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

que nous écrirons

$$4a^2y^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = [(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2)] \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

ou

$$4a^2y^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = (x^2 + y^2 - a^2)^2 \cos^2\frac{\alpha}{2};$$

cette équation se décompose en deux qui peuvent s'écrire

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - a^2 = 2\varepsilon a y \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

De même le lieu géométrique des points communs aux cercles (C) et (C') pour lesquels les paramètres sont liés par la relation (3) est formé des courbes dont les équations

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - a^2 = 2\varepsilon a y \cot\frac{\alpha}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

se déduisent des équations (4) en y remplaçant α par $\pi - \alpha$.

Les équations (4) et (5) représentent quatre cercles passant par A et A' et deux à deux symétriques par rapport à la droite AA'

Dans le cas particulier où l'angle donné est droit, c'est-à-dire où les cercles (C) et (C') sont orthogonaux, les relations (2) et (3) se réduisent à une : $2\,a^2 = \lambda\,\mu$ et le lieu se compose des deux cercles qui ont pour équation

$$x^2 + y^2 - a^2 = 2\,\varepsilon a y.$$

REMARQUE. — Le lecteur pourra retrouver les résultats précédents en utilisant l'inversion $\mathfrak{I}(A,\ 4\,a^2)$.

210. ***La méthode « indirecte » en géométrie de l'espace : lieu engendré par les points communs à des surfaces variables.*** — Nous allons généraliser l'étude qui a fait l'objet du n° **209.**

1° **Surface engendrée par une courbe variable.** — *a*) On connaît deux surfaces variables, dépendant d'un même paramètre λ

$$(1) \quad (F_\lambda) \quad f(x,\ y,\ z,\ \lambda) = 0; \qquad (2) \quad (G_\lambda) \quad g(x,\ y,\ z,\ \lambda) = 0;$$

elles se coupent suivant une courbe C_λ.

Lorsque λ varie, C_λ engendre une surface S, dont on obtient une équation cartésienne en éliminant λ entre les équations (1) et (2)

$$(S) \quad \Phi(x,\ y,\ z) = 0;$$

ce calcul est soumis aux mêmes réserves que celui du n° **209.**

b) On connaît deux surfaces variables, dépendant de deux paramètres λ, μ liés par une relation :

$$(F_{\lambda,\mu}) \quad f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \qquad (G_{\lambda,\mu}) \quad g(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$
$$\varphi(\lambda,\ \mu) = 0.$$

Ces deux surfaces se coupent suivant une courbe $C_{\lambda,\mu}$ qui engendre une surface S; une équation cartésienne de S est obtenue en éliminant λ et μ entre les trois équations précédentes.

c) Si l'on connaît une représentation paramétrique de la courbe variable C_λ qui engendre la surface S, soit

$$x = f(u,\ \lambda) \qquad y = g(u,\ \lambda) \qquad z = h(u,\ \lambda),$$

les équations précédentes constituent une représentation paramétrique de S.

2° **Lieu géométrique des points communs à trois surfaces dépendant d'un paramètre.** — On connaît trois surfaces F_λ, G_λ, H_λ dépendant du même paramètre λ et dont les points communs font partie du lieu cherché L :

$$\left.\begin{array}{ll} (F_\lambda) & f(x,\ y,\ z,\ \lambda) = 0 \\ (G_\lambda) & g(x,\ y,\ z,\ \lambda) = 0 \\ (H_\lambda) & h(x,\ y,\ z,\ \lambda) = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

a) Si l'on peut résoudre les équations (4) en x, y, z on obtient des formules

$$x = \varphi(\lambda) \qquad y = \psi(\lambda), \qquad z = \theta(\lambda)$$

qui constituent une représentation paramétrique de L.

b) Si l'on veut exprimer la compatibilité en λ des équations (4), on peut, théoriquement, procéder ainsi : on élimine λ entre les deux premières, ce qui donne

$$(5) \qquad \Phi(x, y, z) = 0;$$

si alors $\lambda = \theta(x, y, z)$ est solution commune aux deux premières équations, on écrit que cette valeur λ vérifie la troisième :

$$(6) \qquad h[x, y, z, \theta(x, y, z)] = 0$$

L'ensemble (5), (6) est une représentation cartésienne de L.

3° **Lieu géométrique des points communs à trois surfaces dépendant de deux paramètres.** — On connaît trois surfaces

$$\left.\begin{array}{ll} (F_{\lambda, \mu}) & f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ (G_{\lambda, \mu}) & g(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ (H_{\lambda, \mu}) & h(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

dépendant des deux paramètres λ et μ, et dont les points communs appartiennent au lieu S étudié.

a) Si l'on peut résoudre les équations (7) par rapport à x, y, z, on trouve des formules

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \qquad y = \psi(\lambda, \mu) \qquad z = \theta(\lambda, \mu)$$

qui constituent une représentation paramétrique de S.

b) En éliminant λ et μ entre les équations (7), on obtient une équation

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

qui, sous certaines réserves, est une représentation cartésienne de S.

4° Exemple I. — *Trois points alignés* P, Q, R *dont les distances mutuelles sont invariables se meuvent respectivement dans trois plans deux à deux rectangulaires. Trouver le lieu géométrique* S *d'un point* M *aligné avec* P, Q, R, *et situé à des distances fixes de ces points.*

Orientons la droite PQR et posons $\overline{MP} = a$, $\overline{MQ} = b$, $\overline{MR} = c$. Pour que $M(x, y, z)$ soit un point de S, il faut et il suffit que l'on puisse trouver trois nombres α, β, γ, cosinus directeurs d'un certain axe passant par M et tels que les points P, Q, R extrémités des vecteurs $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MR}$ de valeurs algébriques a, b, c portés par cet axe soient respectivement dans les trois plans donnés. Si nous prenons pour plans de coordonnées yOz, zOx, xOy les plans donnés, le premier étant celui dans lequel reste P, le deuxième celui dans lequel reste Q et le troisième celui dans lequel reste R, les paramètres α, β, γ sont liés à x, y, z par les équations

$$x + \alpha a = 0, \qquad y + \beta b = 0, \qquad z + \gamma c = 0$$

et en outre sont assujettis à vérifier la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

L'équation du lieu S s'obtient en éliminant α, β, γ entre ces équations, c'est donc

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Cette surface est un ellipsoïde (cf. n° **216**).

Exemple II. — *Trouver le lieu* S *de l'intersection de deux plans perpendiculaires passant, l'un par une droite donnée* D, *l'autre par une droite donnée* D'. (Nous supposons que D et D' ne sont pas coplanaires.)

Nous rapportons l'espace au même repère que celui qui a été utilisé au n° **208** (fig. 68). Soit

$$\text{(D)}\quad z=a,\qquad x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$$
$$\text{(D')}\quad z=-a,\qquad x\sin\alpha+y\cos\alpha=0$$

les équations des droites données.

En éliminant les paramètres λ et μ entre les équations

$$\lambda(z-a)+x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$$
$$\mu(z+a)+x\sin\alpha+y\cos\alpha=0$$

des plans passant respectivement par D et D' et la condition d'orthogonalité de ces plans

$$\lambda\mu-\cos 2\alpha=0,$$

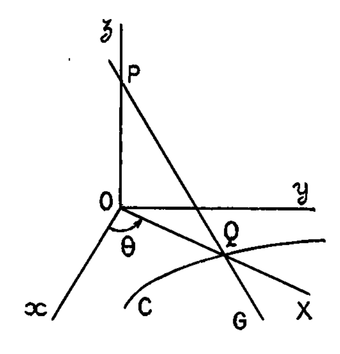
on trouve pour représenter le lieu S l'équation

$$(z^2-a^2)\cos 2\alpha+y^2\cos^2\alpha-x^2\sin^2\alpha=0.$$

Les plans de coordonnées sont des plans de symétrie.

On peut supposer $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$; la section de S par le plan yOz est une ellipse; la section de S par le plan xOy est une hyperbole ayant d et d' pour asymptotes. La surface S est un hyperboloïde à une nappe (cf. n° **216**).

Exemple III. — *Etudier la surface* S *engendrée par une droite* G *rencontrant la droite* Oz *sous un angle* α *donné, et s'appuyant sur une courbe donnée* C *du plan* xOy *perpendiculaire en* O *à* Oz.



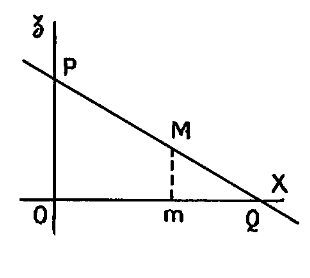


Fig. 71.

Un axe polaire Ox étant choisi, soit $r=f(\theta)$ l'équation polaire de C; $(\overline{OQ})=r$ (fig. 71). Un point P de Oz est défini par sa cote : $\overline{OP}=h$. Par hypothèse

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{r}{h}\right|.$$

Soit M un point arbitraire de la génératrice G de la surface, G joignant P et Q. Sur l'axe OX orienté par θ, soit $\overline{Om}=\rho$; soit $\overline{mM}=z$ la cote de M.

Dans le plan Oz, OX, l'équation de la droite PQ donne

$$\frac{z}{\overline{OP}} + \frac{\rho}{\overline{OQ}} = 1; \qquad \overline{OP} = \varepsilon r \operatorname{cotg}\alpha \quad (\varepsilon = \pm 1);$$

l'équation en coordonnées cylindrique de S est ainsi

$$\frac{z}{\varepsilon r \operatorname{cotg}\alpha} + \frac{\rho}{r} = 1 \qquad \text{avec} \qquad r = f(\theta),$$

et finalement

$$f(\theta) = \varepsilon z \operatorname{tg}\alpha + \rho.$$

Cas particulier. — C est un cercle tangent en O à Oy :

$$r = a \cos\theta.$$

l'équation de S est

$$a \cos\theta = \varepsilon z \operatorname{tg}\alpha + \rho.$$

La substitution

$$\frac{\theta}{\theta + \pi} \left| \frac{\rho}{-\rho} \right| \frac{\varepsilon}{-\varepsilon} \left| \frac{z}{z} \right.$$

permet de passer de l'une des deux équations à l'autre, tout en conservant le même point.

La seule équation

$$z \operatorname{tg}\alpha = \rho - a \cos\theta$$

représente la surface S. Cette équation montre que les sections de S par les plans parallèles au plan xOy sont des limaçons de Pascal (tome IV, n° 49 3°).

Une représentation cartésienne de S s'obtient en multipliant les deux membres de l'équation précédente par ρ :

$$\rho z \operatorname{tg}\alpha = x^2 + y^2 - ax,$$

et finalement

$$z^2(x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2\alpha = (x^2 + y^2 - ax)^2.$$

II. GÉNÉRATION DES SURFACES

Nous allons, dans ce sous-chapitre, passer en revue des cas usuels de génération de surfaces par une courbe variable et apprendre à reconnaître certaines classes de surfaces d'après la forme d'une équation cartésienne.

211. *Conditions imposées à une courbe variable.* — 1° Soit une courbe G, dépendant de certains paramètres λ, μ, ... On dit qu'on impose à G une *condition simple* lorsqu'on assujettit G à une condition géométrique qui s'exprime par une seule relation entre les paramètres λ, μ, ...

Si la condition géométrique imposée s'exprime par p relations distinctes entre les paramètres λ, μ, ..., on dira qu'elle est d'ordre p, ou qu'elle équivaut à p conditions simples.

2° **Condition de rencontre de deux courbes.** — Le plus souvent, une courbe variable G (dite *génératrice*), dépendant de certains paramètres λ, μ, ..., engendre une surface S lorsqu'on l'assujettit à rencontrer une courbe fixe $\mathcal{D}$ (dite *directrice*).

Indiquons dans les différents cas comment on exprime que deux courbes se rencontrent :

a) Les deux courbes sont données par une représentation paramétrique

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad z = h(u)$$

pour la première et

$$x = f_1(v), \qquad y = g_1(v), \qquad z = h_1(v)$$

pour la seconde. Pour que les deux courbes aient un point commun, il faut et il suffit que l'on puisse trouver deux nombres u et v tels que

$$f(u) = f_1(v), \qquad g(u) = g_1(v), \qquad h(u) = h_1(v);$$

on formera la condition cherchée en éliminant u et v entre ces trois équations.

b) L'une des courbes est définie par une représentation paramétrique et l'autre comme intersection de deux surfaces.

Soient

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad z = h(u)$$

une représentation paramétrique de l'une des courbes et

$$F(x, y, z) = 0 \qquad G(x, y, z) = 0$$

deux équations représentant l'autre. Pour que les deux courbes aient un point commun, il faut et il suffit que pour une certaine valeur du paramètre u,

$$F[f(u), g(u), h(u)] = 0 \qquad \text{et} \qquad G[f(u), g(u), h(u)] = 0.$$

La condition s'obtiendra en éliminant u entre ces deux équations.

c) Chacune des courbes est définie comme intersection de deux surfaces. — Soient

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0$$

deux équations représentant une courbe C et

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad G_1(x, y, z) = 0$$

deux équations représentant une courbe C_1. Pour que ces courbes aient un point commun, il faut et il suffit qu'il existe un point (x, y, z) satisfaisant à ces quatre équations. On formera la condition en éliminant les coordonnées x, y, z entre les équations des deux courbes.

3° **Condition de contact d'une courbe variable avec une surface fixe Ω.** — On montre, au tome IV, n° 94, 5°, que la courbe C d'équations

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad z = h(u)$$

est tangente à la surface Ω donnée par une équation cartésienne

$$F(x, y, z) = 0$$

si l'équation

$$\mathcal{F}(u) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{F}(u) = F[f(u), g(u), h(u)]$$

a une racine multiple.

212. ***Surfaces cylindriques.*** — 1° Définition. — **On appelle surface cylindrique ou cylindre, toute une surface qui peut être engendrée par une droite assujettie à conserver une direction fixe et à une autre condition.**

Les différentes positions de la droite sont les *génératrices* du cylindre.

Si les génératrices sont assujetties à rencontrer une courbe fixe $\mathfrak{D}$, cette courbe est dite *directrice* du cylindre.

2° **Équation générale des surfaces cylindriques.** Théorème. — **L'équation générale des surfaces cylindriques est $f(P, Q) = 0$, $P = 0$, $Q = 0$ étant des équations de deux plans sécants.**

Cet énoncé signifie que : 1° toute surface cylindrique peut être représentée par une équation de la forme donnée; 2° toute équation de cette forme représente une surface cylindrique.

I) Soient $P = 0$, $Q = 0$ des équations de deux plans sécants dont l'intersection Δ est parallèle aux génératrices d'un cylindre donné. Toute droite ayant même direction que Δ peut être représentée par les équations

$$(1) \qquad P = \lambda, \qquad Q = \mu.$$

La condition imposée à cette droite pour qu'elle soit génératrice du cylindre s'exprime par une relation

$$(2) \qquad f(\lambda, \mu) = 0$$

entre les paramètres λ, μ. Le cylindre pouvant être engendré par la droite définie par les équations (1), λ et μ étant liés par la relation (2), son équation s'obtient en éliminant λ et μ entre les équations (1) et (2), c'est

$$(3) \qquad f(P, Q) = 0.$$

II) Considérons maintenant une surface Σ représentée par une équation de la forme (3), $P = 0$, $Q = 0$ étant des équations de deux plans sécants. L'équation (3) peut être regardée comme résultant de l'élimination des paramètres λ, μ entre les équations (1) et (2). Or, les équations (1) représentent

une droite dont la direction reste celle de l'intersection des plans représentés par P = 0, Q = 0; cette droite est en outre assujettie à la condition exprimée par la relation (2). Par définition même, la surface Σ qu'elle engendre (et qui n'est pas nécessairement réelle) est un cylindre.

Remarque. — Si $f(P, Q)$ est homogène en P et Q, l'équation

$$f(P, Q) = 0 \qquad \text{équivaut à} \qquad f\left(\frac{P}{Q}, 1\right) = 0;$$

elle est vérifiée pour les points qui satisfont à $P = tQ$, t étant solution de $f(t, 1) = 0$.

L'équation proposée représente alors une famille de plans sécants contenant la droite Δ commune aux plans P = 0, Q = 0.

3° **Recherche pratique de l'équation d'un cylindre.** — *a) Cylindre déterminé par une directrice et la direction des génératrices.* — Une surface cylindrique Σ est déterminée par une courbe directrice 𝔇 et par un vecteur $\vec{l}$ parallèle aux génératrices.

I. *La directrice est donnée par une représentation paramétrique.* — Si P (*u*) est le point générique de 𝔇, le point générique M de Σ est donné par

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \rho\,\vec{l}.$$

Soit	$f(u)$, $g(u)$, $h(u)$	les coordonnées de P,
	a, b, c	les composantes de $\vec{l}$,

une représentation paramétrique de Σ est ainsi

$$x = f(u) + a\rho, \qquad y = g(u) + b\rho, \qquad z = h(u) + c\rho.$$

Les courbes *u constant* sont les génératrices; les courbes ρ *constant* se déduisent de la directrice 𝔇 par des translations parallèles à $\vec{l}$.

Une équation cartésienne de Σ peut s'obtenir en éliminant *u* et ρ entre les équations précédentes.

Pour cela on écrit les deux équations

$$\frac{x - f(u)}{a} = \frac{y - g(u)}{b} = \frac{z - h(u)}{c},$$

qui représentent la génératrice passant par P, et on élimine *u* entre ces deux équations.

Exemple. — *Equation du cylindre Σ dont les génératrices ont la direction du vecteur* $\vec{l}(1, 1, 1)$ *et dont la directrice est la courbe*

$$(\mathfrak{D}) \qquad x = \frac{u}{u-1}, \qquad y = \frac{u^2}{u-1}, \qquad z = \frac{u^3}{u-1}.$$

La génératrice générique admet les équations

$$x - \frac{u}{u-1} = y - \frac{u^2}{u-1}, \qquad y - \frac{u^2}{u-1} = z - \frac{u^3}{u-1}$$

qui s'écrivent

$$x - y = -u, \qquad y - z = -u^2.$$

L'élimination de u donne l'équation cartésienne de Σ.

$$(x - y)^2 + (y - z) = 0.$$

On obtient un cylindre du second ordre, alors que $\mathcal{D}$ est une cubique; cela tient au fait que $\vec{l}$ est une direction asymptotique de $\mathcal{D}$ (tome IV, n° 36). Ce cylindre est parabolique, puisque sa section par le plan xOy a pour équation : $(x - y)^2 + y = 0$.

II. *La directrice est donnée comme intersection de deux surfaces représentées par des équations cartésiennes*

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

M (x, y, z) appartient à cette surface, si, et seulement si, la parallèle aux génératrices menée par M s'appuie sur la directrice. Or, les coordonnées d'un point quelconque de cette parallèle peuvent s'écrire $x + a\rho$, $y + b\rho$, $z + c\rho$. La condition est donc qu'il existe un nombre ρ tel que l'on ait simultanément

$$f(x + a\rho, y + b\rho, z + c\rho) = 0, \qquad g(x + a\rho, y + b\rho, z + c\rho) = 0;$$

elle s'obtiendra en éliminant ρ entre ces équations. L'équation ainsi formée représente le cylindre.

b) Cylindre déterminé par une surface inscrite et la direction des génératrices. — Nous cherchons une équation cartésienne du cylindre Σ engendré par une droite, parallèle au vecteur donné $\vec{l}(a, b, c)$, assujettie à être tangente à la surface donnée Ω d'équation $f(x, y, z) = 0$.

M (x, y, z) appartient à Σ si, et seulement si, la parallèle menée de M à $\vec{l}$, dont le point générique a pour coordonnées

$$x + a\rho, \qquad y + b\rho, \qquad z + c\rho,$$

est tangente à Ω, c'est-à-dire (211, 3°) si l'équation à l'inconnue ρ

$$f(x + a\rho, \quad y + b\rho, \quad z + c\rho) = 0 \tag{4}$$

admet une racine double.

La relation entre x, y, z obtenue en écrivant que (4) a une racine double est une équation cartésienne du cylindre Σ.

213. *Surfaces coniques.* — 1° Définition. — **On appelle surface conique ou cône toute surface qui peut être engendrée par une droite assujettie à passer par un point fixe et à une autre condition.**

Les diverses positions de la droite sont les *génératrices* du cône, le point fixe par lequel elles passent est le *sommet* du cône.

Si les génératrices sont assujetties à rencontrer une courbe fixe $\mathcal{D}$, cette courbe est dite *directrice* du cône.

2° **Équation générale des surfaces coniques.** — THÉORÈME. — **L'équation générale des surfaces coniques est**

$$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0,$$

$P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ **étant des équations de trois plans qui ont en commun un point et un seul.**

I. *Toute surface conique peut être représentée par une équation de la forme* (1).
Soit $$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0$$

des équations de trois plans passant par le sommet S et n'ayant pas d'autre point commun. Toute droite G menée par S (sauf les droites du plan $R = 0$) peut être représentée par les équations

(1) $$P - \lambda R = 0 \qquad Q - \mu R = 0.$$

La condition supplémentaire imposée à G se traduit par une relation entre λ et μ

(2) $$f(\lambda, \mu) = 0.$$

L'élimination de λ et μ entre les équations (1) et (2) donne une équation de Σ

(3) $$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

II. *Toute équation* (3) *de la forme indiquée dans l'énoncé représente un cône.* — Soit Σ la surface représentée par une telle équation et soit S le point commun aux plans qui ont pour équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

L'équation (3) peut être regardée comme provenant de l'élimination des paramètres λ et μ entre les équations (1) et (2). Les équations (1) représentant une droite G passant par S, l'équation (2) exprime que cette droite est assujettie à une autre condition, la surface Σ engendrée par G (et qui n'est pas nécessairement réelle) est une surface conique.

AUTRE FORME DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE D'UN CONE. — L'équation (3) est homogène, de degré 0, par rapport aux variables P, Q, R.

On peut aussi dire (tome II, n° 149) que l'équation générale d'une surface conique est

(4) $$F(P, Q, R) = 0$$

où F est une fonction homogène des variables P, Q, R, $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ étant les équations de trois plans ayant un seul point commun.

CAS PARTICULIER. — Si le sommet S a pour coordonnées x_0, y_0, z_0, on peut prendre pour P, Q, R les binômes $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; tout cône de sommet S peut être représenté par une équation homogène en $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; tout cône de sommet O peut être représenté par une équation homogène en x, y, z.

3° **Recherche pratique de l'équation d'un cône.** — *a) Le sommet du cône est à l'origine.* — I. *La directrice $\mathcal{D}$ est donnée par une représentation paramétrique.* — Si P (u) est le point générique de $\mathcal{D}$, le point générique M du cône Σ est donné par

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{OP}.$$

Soit $\qquad f(u), \quad g(u), \quad h(u)$

les coordonnées de P, une représentation paramétrique de Σ est ainsi

$$x = \rho\, f(u), \quad y = \rho\, g(u), \quad z = \rho\, h(u).$$

Les courbes « *u constant* » sont les génératrices, les courbes « ρ *constant* » sont les homothétiques de $\mathcal{D}$ dans les homothéties $[O, \rho]$.

Les équations

(5) $$\frac{x}{f(u)} = \frac{y}{g(u)} = \frac{z}{h(u)}$$

représentent la génératrice OP; en éliminant u entre les deux équations (5), on obtient une équation cartésienne du cône Σ.

II. *La directrice $\mathcal{D}$ est donnée comme intersection de deux surfaces représentées par des équations cartésiennes*

(6) $$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0.$$

Le point M (x, y, z) appartient au cône Σ si, et seulement si, la droite OM s'appuie sur la directrice, c'est-à-dire s'il existe une valeur réelle ρ telle que, simultanément,

(7) $$f(\rho x, \rho y, \rho z) = 0, \quad g(\rho x, \rho y, \rho z) = 0.$$

En éliminant ρ entre les deux équations (7), on obtient une équation cartésienne de Σ.

Dans la pratique, on pose $\rho = \frac{1}{t}$, et l'on élimine t entre les équations

$$f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0, \quad g\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0$$

ce qui revient à rendre homogènes les équations des deux surfaces, et à éliminer la variable d'homogénéité entre les équations homogènes des deux surfaces.

III. *Cône déterminé par une surface inscrite.* — Nous cherchons une équation cartésienne du cône Σ engendré par une droite qui passe par l'origine O et qui est assujettie à rester tangente à la surface donnée Ω d'équation

(8) $$f(x, y, z) = 0.$$

Le point M(x, y, z) appartient à Σ si, et seulement si, la droite OM est tangente à Ω. Or le point générique de OM a pour coordonnées

$$\rho x, \quad \rho y, \quad \rho z.$$

La condition est donc que l'équation à l'inconnue ρ

$$f(\rho x, \rho y, \rho z) = 0$$

admette une racine multiple; dans la pratique, on pose $\rho = \frac{1}{t}$, et l'on écrit que l'équation

$$f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0,$$

c'est-à-dire l'équation rendue homogène de la surface Ω, admet une racine double en t, variable d'homogénéité.

Observation générale. — Dans chacun des cas I, II, III qui viennent d'être envisagés, l'équation obtenue pour le cône Σ doit être homogène.

b) Le sommet du cône est un point $S(x_0, y_0, z_0)$. — On se ramène au cas précédent *a*) par la translation du repère affine déterminée par le vecteur $\overrightarrow{OS}$.

Si x, y, z et X, Y, Z désignent respectivement les coordonnées anciennes et nouvelles d'un même point, dans le nouveau repère Σ a une équation de la forme

$$\varphi(X, Y, Z) = 0,$$

φ étant homogène;
l'équation de Σ dans le repère initial d'origine O est

$$\varphi(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

On peut aussi utiliser la représentation paramétrique de la droite qui joint S au point $M(x, y, z)$

$$\frac{x + \lambda x_0}{1 + \lambda}, \quad \frac{y + \lambda y_0}{1 + \lambda}, \quad \frac{z + \lambda z_0}{1 + \lambda}.$$

En substituant dans les deux équations (6) de la directrice $\mathcal{D}$ (cas *a*) II), et en écrivant qu'il existe une racine commune en λ, on obtient directement une équation cartésienne de Σ.

En substituant dans l'équation (8) de la surface inscrite Ω (cas *a*) III), et en écrivant qu'il existe une racine multiple en λ, on obtient directement une équation cartésienne de Σ.

Exemple I. — *Equation du cône Σ de sommet $S(x_0, y_0, z_0)$, ayant pour base la courbe Γ représentée par les équations*

$$z = 0, \qquad x^2 - y^2 - 2ay = 0.$$

Écrivons qu'un point de la droite SM appartient à Γ : les deux équations

$$\frac{z + \lambda z_0}{1 + \lambda} = 0, \qquad \left(\frac{x + \lambda x_0}{1 + \lambda}\right)^2 - \left(\frac{y + \lambda y_0}{1 + \lambda}\right)^2 - 2a\frac{y + \lambda y_0}{1 + \lambda} = 0$$

équivalentes aux suivantes

$$z + \lambda z_0 = 0, \qquad (x + \lambda x_0)^2 - (y + \lambda y_0) - 2a(y + \lambda y_0)(1 + \lambda) = 0$$

n'ont de racine commune en λ que si

$$(z_0 x - x_0 z)^2 - (z_0 y - y_0 z)^2 + 2a(z - z_0)\cdot(z_0 y - y_0 z) = 0.$$

EXEMPLE II. — *Equation du cône Σ, de sommet* $S(x_0, y_0, z_0)$, *circonscrit à la sphère* $\Omega(O,R)$.
$M(x, y, z)$ est un point de Σ si, et seulement si, la droite SM coupe la sphère Ω en deux points confondus, c'est-à-dire si l'équation

$$(x + \lambda x_0)^2 + (y + \lambda y_0)^2 + (z + \lambda z_0)^2 - R^2(1 + \lambda)^2 = 0$$

admet une racine double en λ, ce qui donne

$$(xx_0 + yy_0 + zz_0 - R^2)^2 - (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0.$$

214. *Surfaces conoïdes.* — 1° DÉFINITION. — **On appelle surface conoïde toute surface qui peut être engendrée par une droite G assujettie à s'appuyer sur une droite A, à rester parallèle à un plan P qui coupe A, et à une autre condition.**

On dit que A est l'*axe* de la surface conoïde et que P en est le *plan directeur*. Les différentes positions de la droite G sont les *génératrices* de la surface.

2° **Équation générale des surfaces conoïdes.** — THÉORÈME. — **L'équation générale des surfaces conoïdes est** $f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ **étant les équations de trois plans qui ont en commun un point et un seul.**

I. *Toute surface conoïde peut être représentée par une équation de cette forme.* — Soit $P = 0$ une équation du plan directeur et soient $Q = 0$, $R = 0$ des équations de l'axe. Une droite quelconque parallèle au plan directeur et rencontrant l'axe peut être regardée comme l'intersection d'un plan parallèle au plan directeur et d'un plan passant par l'axe, plans qui peuvent être représentés par les équations

$$(1) \qquad P = \lambda, \qquad Q = \mu R.$$

(Seules échappent à cette représentation les droites du plan $R = 0$).

Pour qu'une telle droite soit une génératrice de la surface, il faut qu'elle satisfasse à une autre condition, cette condition s'exprime par une relation

$$(2) \qquad f(\lambda, \mu) = 0$$

entre les paramètres λ et μ. L'équation de la surface engendrée s'obtient en éliminant λ et μ entre les équations de la droite et l'équation de condition, c'est donc

$$(3) \qquad f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

II. *Toute équation de la forme* (3) *dans laquelle* P, Q, R *ont la signification donnée dans l'énoncé représente une surface conoïde.* — En effet, cette équation peut être regardée comme résultant de l'élimination des paramètres λ, μ entre les équations (1) et (2). Elle représente la surface (réelle ou non) engendrée par une droite assujettie à rester parallèle au plan qui a pour équation $P = 0$, à rencontrer la droite qui a pour équations $Q = 0$, $R = 0$ et à une autre condition, surface qui est, par définition, une surface conoïde.

REMARQUE. — Si on prend l'axe du conoïde pour axe $z'z$ et le plan directeur pour plan xOy, l'équation de la surface peut s'écrire $f\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0$.

Si l'espace est euclidien et si l'axe est orthogonal au plan directeur, le conoïde est dit *droit*; on peut choisir alors un repère orthonormé $Oxyz$, Oz coïncidant avec l'axe du conoïde. Une droite G rencontrant orthogonalement Oz est déterminée par la cote z et l'angle polaire θ de tous ses points, en coordonnées cylindriques; une condition imposée à G se traduit par une relation entre z et θ, soit

$$z = f(\theta),$$

qui donne ainsi l'équation cylindrique d'un conoïde droit d'axe Oz.

3° EXEMPLE I. — Étudier la surface Σ définie dans un repère orthonormé par l'équation

(1) $$xy = az \qquad (a > 0).$$

a) L'équation (1) peut s'écrire

soit sous la forme (2) $$x = a\frac{z}{y}$$

soit sous la forme (3) $$y = a\frac{z}{x}.$$

Σ est donc une surface conoïde de deux façons différentes :

I) sous la forme (2), Σ est engendrée par une droite G

$$x = \lambda, \qquad \lambda y = az$$

parallèle au plan yOz (plan directeur) et s'appuyant sur Ox (axe du conoïde).

II) sous la forme (3), Σ est engendrée par une droite H

$$y = \mu, \qquad \mu x = az$$

parallèle au plan xOz (plan directeur) et s'appuyant sur l'axe Oy (axe du conoïde).

La droite G et la droite H se rencontrent au point M (fig. 72).

$$x = \lambda, \qquad y = \mu, \qquad z = \frac{\lambda\mu}{a}.$$

Σ est engendrée par une droite variable G assujettie à rencontrer orthogonalement Ox et à s'appuyer sur une droite H arbitraire (par exemple la droite

$$y = a, \qquad x = z)$$

Σ est aussi engendrée par une droite variable H assujettie à rencontrer orthogonalement Oy et à s'appuyer sur une droite G arbitraire (par exemple la droite

$$x = a, \qquad y = z).$$

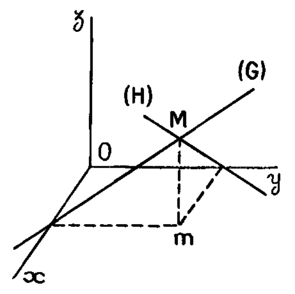


FIG. 72.

b) Les sections de Σ par les plans parallèles à xOy ($z = h$) sont les hyperboles équilatères $xy = ah$ dont les asymptotes sont situées dans les plans xOz et yOz.

c) Faisons tourner le repère de $\frac{\pi}{4}$ autour de Oz, et soit OX et OY les nouvelles positions des axes Ox et Oy; les formules de changement de coordonnées sont (fig. 73)

$$x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}.$$

Dans le système OXYZ dont l'axe OZ coïncide avec Oz, la surface Σ a pour équation

$$X^2 - Y^2 = 2\,aZ.$$

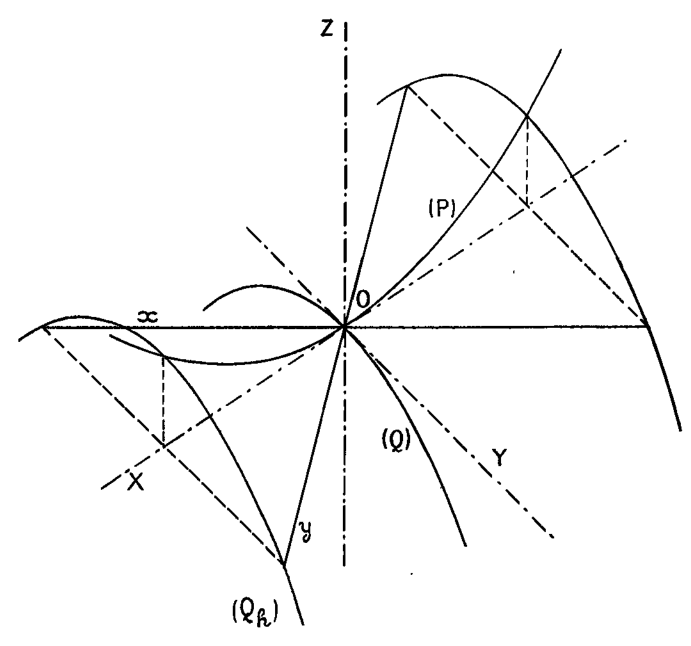


Fig. 73.

A l'aide de cette équation on vérifie aisément : 1° que la section de Σ par le plan XOZ est la parabole P formée des point de ce plan pour lesquels $X^2 = 2\,aZ$; 2° que la section par le plan YOZ est une parabole $Q(Y^2 = -2\,aZ)$. Plus généralement, la section de la surface par le plan parallèle à YOZ dont tous les points ont pour abscisse h est formée des points de ce plan pour lesquels $Y^2 = -2\,a\left(Z - \frac{h^2}{2\,a}\right)$; ces points sont ceux d'une parabole Q_h déduite de Q par la translation $\left(h,\ 0,\ \frac{h^2}{2\,a}\right)$. Quand h varie, Q_h engendre la surface en se déplaçant de façon que son sommet décrive la parabole P, son axe reste parallèle à Oz et son plan parallèle au plan XOZ.

Remarque. — En géométrie affine, la surface Σ représentée par l'équation (1) jouit de propriétés analogues à celles que nous venons de signaler en géométrie euclidienne.

Toute surface d'équation (1) porte le nom de *paraboloïde hyperbolique.*

Exemple II. — La surface engendrée par une droite G assujettie à rencontrer orthogonalement l'axe d'un cylindre de révolution et à s'appuyer sur une hélice tracée sur ce cylindre est une surface conoïde Σ appelée *hélicoïde à plan directeur* (escalier des tours de cathédrales).

L'hélice directrice ayant pour représentation paramétrique

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = b\theta,$$

Σ est représentée, en coordonnées semi-polaires par

$$z = b\,\theta.$$

Une représentation cartésienne de Σ est

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{b}.$$

Exemple III. — *Conoïde de Plücker.* — On donne le nom de conoïde de Plücker à la surface engendrée par la perpendiculaire commune à une droite fixe A et à une droite Δ qui varie en restant dans un plan Q oblique à A et en passant constamment par un point fixe L.

Soient B et M les intersections des droites A et Δ et de leur perpendiculaire commune G. L'angle droit BML se projette orthogonalement sur tout plan P perpendiculaire à A suivant un angle droit. Il en résulte que le point M décrit dans le plan Q une courbe E dont la projection orthogonale sur le plan P est un cercle C admettant pour points diamétralement opposés le pied de l'axe sur ce plan et la projection de L. La courbe E est une ellipse et la surface engendrée par G est une surface conoïde qui admet A pour axe, P pour plan directeur et E pour courbe directrice.

Formons l'équation de la surface en prenant A pour axe $z'z$, la trace de A sur le plan Q pour origine, un plan passant par L pour plan yOz, les axes étant deux à deux rectangulaires. Écrivons l'équation du plan Q

$$z = lx + my \qquad (1)$$

et celle du cercle C

$$x^2 + y^2 - 2\,ay = 0; \qquad (2)$$

l'ensemble de ces équations représente l'ellipse E. Pour que la droite G représentée par

$$z = \lambda, \qquad y = \mu x, \qquad (3)$$

rencontre l'ellipse, il faut et il suffit que λ et μ soient liés par la relation

$$\lambda(1 + \mu^2) - 2\,a\mu(l + m\mu) = 0 \qquad (4)$$

formée en éliminant x, y, z entre les équations (1), (2), (3). On formera l'équation du conoïde de Plücker en éliminant λ et μ entre les équations (3) et (4); on trouve ainsi

$$z(x^2 + y^2) - 2\,ay(lx + my) = 0.$$

Observons que si, par une translation des axes, on amène l'origine au point O_1 de cote h sur Oz, l'équation devient

$$Z(x^2 + y^2) + h(x^2 + y^2) - 2\,ay(lx + my) = 0.$$

Le nouveau plan des xy coupe la surface suivant deux droites représentées par l'équation

$$h(x^2 + y^2) - 2\,ay(lx + my) = 0,$$

ces droites H, K sont rectangulaires si $2\,h - 2\,am = 0$; h étant déterminé par cette relation une rotation des axes autour de $Z'Z$ permettra de prendre pour axes O_1X, O_1Y soit les droites H, K, soit les bissectrices des angles qu'elles forment; on pourra ainsi donner à l'équation de tout conoïde de Plücker l'une des formes suivantes

$$(5) \qquad z(x^2 + y^2) = 2\,pxy, \qquad z(x^2 + y^2) = r(x^2 - y^2). \qquad (6)$$

En coordonnées cylindriques, ces équations correspondent respectivement à

$$(5') \qquad z = p\sin 2\,\theta \qquad \text{et} \qquad z = r\cos 2\,\theta. \qquad (6')$$

215. ***Surfaces de révolution.*** — Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans un espace euclidien et nous convenons de n'utiliser que des repères orthonormés.

1° Définition. — **On appelle surface de révolution toute surface qui peut être engendrée par un cercle assujetti à avoir pour axe une droite fixe et à une autre condition.**

Les diverses positions du cercle sont les *parallèles* de la surface, l'axe commun à ces parallèles est l'*axe de révolution* de la surface.

Toute courbe G tracée sur la surface et distincte d'un parallèle engendre en tournant autour de l'axe, soit toute la surface, soit une zone de la surface. Les plans passant par l'axe de révolution sont les *plans méridiens,* ils coupent la surface suivant des courbes dites *méridiennes* ou *méridiens.* Par tout point de la surface passsent un parallèle et un méridien.

2° **Surfaces de révolution d'axe** Oz. — *a*) Étudions d'abord le cas usuel où l'axe de révolution est pris pour axe Oz.

Tout cercle Π admettant Oz pour axe peut être représenté par les équations

(1) $$x^2 + y^2 = \lambda, \qquad z = \mu.$$

Toute condition imposée à ce cercle s'exprime par une équation entre λ et μ :

(2) $$f(\lambda, \ \mu) = 0.$$

La surface de révolution Σ engendrée par le cercle Π dépendant des paramètres λ, μ liés par l'équation (2) a pour équation

(3) $$f(x^2 + y^2, \ z) = 0.$$

Un raisonnement développé à plusieurs reprises permet de reconnaître que, quelle que soit la fonction f, l'équation (3) est celle d'une surface de révolution (réelle ou non) autour de Oz.

Énonçons le résultat que nous venons d'obtenir :

THÉORÈME. — **L'équation générale des surfaces de révolution autour de** Oz **est** $f(x^2 + y^2, \ z) = 0$.

b) CAS PARTICULIER. — *On connaît une méridienne* L. — Dans le plan méridien Q, choisissons l'axe OX perpendiculaire à Oz, et suit $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX})$; un point M de Q est défini (fig. 74) par

$$X = \overline{Om}, \qquad z = \overline{mM}.$$

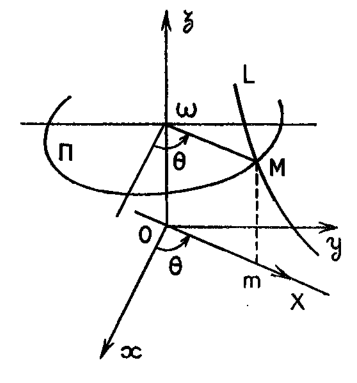


FIG. 74.

I. La méridienne L est donnée paramétriquement.

α) Soit $$z = f(X)$$

l'équation de L dans Q. En coordonnées cylindriques θ, r, z, Σ est représentée par

$$z = f(r).$$

Une représentation paramétrique cartésienne de Σ est donnée par

(4) $$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = f(r).$$

β) Soit $$X = g(u), \qquad z = h(u)$$
une représentation paramétrique de L. Le parallèle Π engendré par le point M (u) précédent a pour représentation paramétrique

(5) $$x = g(u)\cos\theta, \qquad y = g(u)\sin\theta, \qquad z = h(u).$$

Les équations (5) sont une représentation paramétrique de Σ en fonction de u et θ; les courbes « *u constant* » sont les parallèles, les courbes « *θ constant* » sont les méridiennes.

Le parallèle Π a pour représentation cartésienne

(6) $$x^2 + y^2 = g^2(u), \qquad z = h(u);$$

l'élimination de u entre les équations (6) donne une équation cartésienne de Σ.

II. La méridienne L est donnée par une équation cartésienne

(7) $$f(X, z) = 0.$$

On en déduit une représentation cylindrique

(8) $$f(r, z) = 0$$

de la surface Σ.

Comme $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on en déduit une représentation cartésienne de Σ sous la forme

(9) $$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

On passe de l'équation (7) de la méridienne à une équation cartésienne de Σ en remplaçant X par $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

3° **Équation générale des surfaces de révolution.** — Théorème. — **L'équation générale des surfaces de révolution est $f(S, P) = 0$, les équations $S = 0$, $P = 0$ représentant respectivement une sphère et un plan.**

I. *Toute surface de révolution peut être représentée par une équation de cette forme.* — Définissons l'axe de révolution Δ par un point A et par l'équation $P = 0$ d'un plan P perpendiculaire à Δ. Soit $S = 0$ l'équation d'une sphère ayant A pour centre.

Tout cercle Π admettant Δ pour axe peut être regardé comme l'intersection d'une sphère ayant A pour centre et d'un plan parallèle au plan P, sphère et plan que l'on peut représenter par les équations

(1) $$S = \lambda, \qquad P = \mu.$$

Pour que le cercle Π soit l'un des parallèles de la surface, il faut et il suffit qu'il satisfasse à une autre condition qui peut s'exprimer par une équation entre λ et μ

(2) $$f(\lambda, \mu) = 0.$$

Le cercle Π dépend des paramètres λ et μ liés par la relation (2); la surface qu'il engendre est représentée par le résultat de l'élimination de λ et μ entre les équations (1) et (2), soit

(3) $$f(S, P) = 0.$$

II. *Toute équation de la forme* (3), $S = 0$ *et* $P = 0$ *étant les équations respectives d'une sphère et d'un plan, représente une surface de révolution autour de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan.* — L'équation (3) peut être regardée comme résultant de l'élimination des paramètres λ et μ entre les équations (1) et (2), elle représente donc la surface Σ engendrée par le cercle (Π) défini par les équations (1), soumis à la condition exprimée par l'équation (2). Si A est le centre de la sphère qui a pour équation $S = 0$, c'est aussi le centre de la sphère qui a pour équation $S = \lambda$, l'axe du cercle Π est la perpendiculaire Δ abaissée de A sur le plan qui a pour équation $P = \lambda$, plan qui est parallèle à celui qui a pour équation $P = 0$. Tous les cercles Π susceptibles d'être représentés par les équations (1) ont pour axe Δ. Ceux de ces cercles qui satisfont à une autre condition sont les parallèles d'une surface de révolution (réelle ou non), ce qui achève la démonstration.

Remarque. — De l'équation $f(S, P) = 0$, on peut facilement déduire l'équation de la surface de révolution Σ rapportée à un trièdre orthonormé $\{A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$ dont l'axe AZ est porté par Δ.

En effet, pour un point M quelconque de l'espace, dont les coordonnées sont (x, y, z) dans le repère initial et (X, Y, Z) dans le repère auxiliaire, la fonction $S(x, y, z)$ représente, à une constante près, le carré de la distance de M au point A; on a

$$S(x, y, z) \equiv X^2 + Y^2 + Z^2 + \alpha.$$

De même, en exprimant de deux façons la distance de M au plan XAY, dont l'équation, dans le repère initial, est de la forme $P(x, y, z) + k = 0$, on obtient

$$P(x, y, z) \equiv \beta Z + \gamma$$

La surface Σ est représentée, dans le nouveau repère, par l'équation

$$f(X^2 + Y^2 + Z^2 + \alpha, \beta Z + \gamma) = 0.$$

Une méridienne de Σ a pour équations

$$Y = 0, \qquad f(X^2 + Z^2 + \alpha, \beta Z + \gamma) = 0.$$

Exemple. — *Soit à étudier la surface Σ qui a pour équation, dans un repère orthonormé*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz - a^3 = 0.$$

En utilisant les relations :

$$\begin{cases} (x + y + z)^3 = (x^3 + y^3 + z^3) + 3\,(x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2) + 6\,xyz \\ (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + y^3 + z^3) + (x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2) \end{cases}$$

on constate que Σ admet l'équation

$$3\,(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^3 - 2\,a^3 = 0$$

qui s'écrit

$$3\,PS - P^3 - 2\,a^3 = 0$$

quand on pose

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 \qquad P \equiv x + y + z$$

$S = 0$ représente la sphère de rayon nul dont le centre est O.

$P = 0$ représente le plan qui passe par O et est perpendiculaire au vecteur (1, 1, 1) Σ est ainsi une surface de révolution. Dans un repère orthonormé de sommet O tel que OZ est la droite qui avait initialement pour équation $x = y = z$:

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad x + y + z \equiv Z\sqrt{3}.$$

La nouvelle équation de Σ est

$$Z(X^2 + Y^2) - \frac{2a^3}{3\sqrt{3}} = 0.$$

Une méridienne de Σ est donnée par

$$Y = 0, \qquad ZX^2 - \frac{2a^3}{3\sqrt{3}} = 0,$$

courbe qu'il est aisé de construire, ce qui permet d'avoir une idée de la forme de Σ.

4° Exemples et applications. — I. *Quadriques de révolution.* — Considérons la surface de révolution, S, engendrée par une conique réelle Γ en tournant autour d'un de ses axes, Δ.

Si Γ est une ellipse, S est appelée ellipsoïde de révolution : c'est un *ellipsoïde long* (ou allongé) si Δ est l'axe focal de Γ (fig. 75), un *ellipsoïde plat* (ou aplati) si Δ est l'axe non focal de Γ (fig. 76).

Si Γ est une hyperbole, S est appelée hyperboloïde de révolution : c'est un *hyperboloïde à une nappe* si Δ est l'axe non focal de Γ (fig. 77), un *hyperboloïde à deux nappes* si Δ est l'axe focal de Γ (fig. 78).

Enfin si Γ est une parabole, S est appelée *paraboloïde de révolution* (fig. 79).

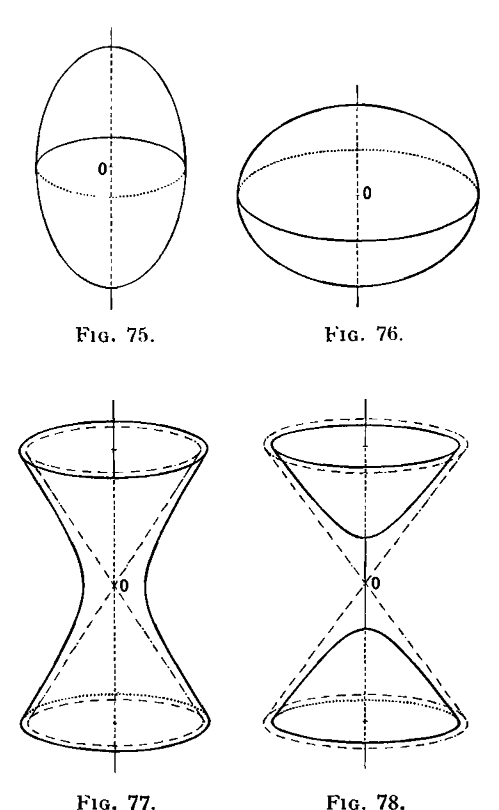


Fig. 75. Fig. 76. Fig. 77. Fig. 78.

Montrons que les surfaces ainsi définies sont des surfaces algébriques du second ordre (ou encore, en abrégé, des *quadriques*).

Rapportons l'espace à un repère orthonormé $Oxyz$, Oz étant confondu avec Δ, le plan yOz étant le plan de Γ.

Supposons que Γ *soit une conique à centre* : l'un de ses axes est Oz, choisissons pour axe Oy l'autre axe de la conique. L'équation de Γ, dans le plan

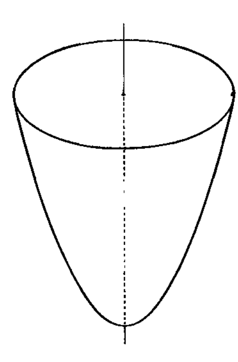


Fig. 79.

yOz est
$$\frac{y^2}{P}+\frac{z^2}{Q}-1=0,$$

et par suite l'équation de S est

$$(1) \qquad \frac{x^2+y^2}{P}+\frac{z^2}{Q}-1=0.$$

Supposons que Γ *soit une parabole* : nous choisirons pour axe Oy la tangente au sommet de Γ. L'équation de Γ dans le plan yOz est

$$y^2-2qz=0$$

d'où l'équation de S

$$(2) \qquad x^2+y^2-2qz=0.$$

Sur chacune des équations (1) ou (2), on constate que la surface S est algébrique et du second ordre.

Remarque. — Le cône de révolution de sommet O, d'axe Oz, de demi-angle au sommet α a pour équation

$$x^2+y^2=z^2\mathrm{tg}^2\alpha$$

Le cylindre de révolution d'axe Oz, de rayon R, a pour équation

$$x^2+y^2=R^2.$$

Ces deux surfaces sont aussi des quadriques de révolution.

II. *Surface gauche de révolution.* — On donne le nom de surface gauche de révolution à toute surface Σ qui peut être engendrée en faisant tourner une droite D autour d'une droite Δ, les droites D et Δ n'étant ni orthogonales ni situées dans un même plan.

Prenons Δ pour axe $z'z$ et la perpendiculaire commune à D et Δ pour axe $x'x$; (fig. 80). Soient

$$(D) \qquad x=a, \qquad z=my$$

des équations de D. L'application de la méthode indiquée au 2° conduit à l'équation de la surface Σ

$$x^2+y^2-\frac{z^2}{m^2}=a^2.$$

La méridienne située dans le plan yOz est l'hyperbole $\mathcal{H}$ représentée par l'équation

$$y^2-\frac{z^2}{m^2}=a^2,$$

ses asymptotes sont les droites du plan yOz définies par les équations

$$z-my=0, \qquad z+my=0$$

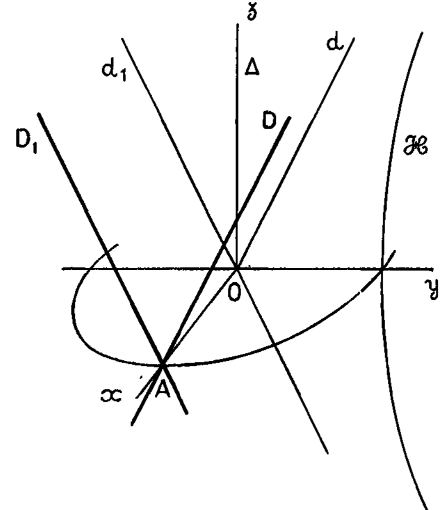


Fig. 80.

la première, d, est la projection orthogonale de D sur le plan yOz et l'autre, d_1, celle de D_1, symétrique de D par rapport au plan xOz. Σ est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Les asymptotes des méridiennes sont les génératrices du cône de révolution qui a pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{m^2} = 0,$$

ce cône est dit *cône asymptote* de la surface.

La surface Σ est symétrique par rapport au plan xOy, le parallèle situé dans ce plan est celui de plus petit rayon, on dit que c'est le *cercle de gorge* de la surface; son centre O est un centre de symétrie pour Σ.

III. **Tore.** — *On appelle tore la surface engendrée par un cercle en tournant autour d'une droite qui est située dans son plan et ne passe pas par son centre.*

Dans un plan méridien Q, rapporté au repère orthonormé OXz, le cercle générateur L est défini par son centre $\Omega\,(\overline{O\Omega} = a)$ et par son rayon R (fig. 81). En déterminant un point M de L par l'angle $t = (\overrightarrow{\Omega X}, \overrightarrow{\Omega M})$, une représentation paramétrique du tore Σ est

$$\begin{cases} x = (a + R\cos t)\cos\theta \\ y = (a + R\cos t)\sin\theta \\ z = R\sin t. \end{cases}$$

Dans le plan méridien Q, L a pour équation

$$(X - a)^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

on obtient une équation cartésienne du tore Σ en remplaçant X par $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$; en isolant le radical et élevant au carré on trouve l'équation sous forme entière

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4\,a^2(x^2 + y^2).$$

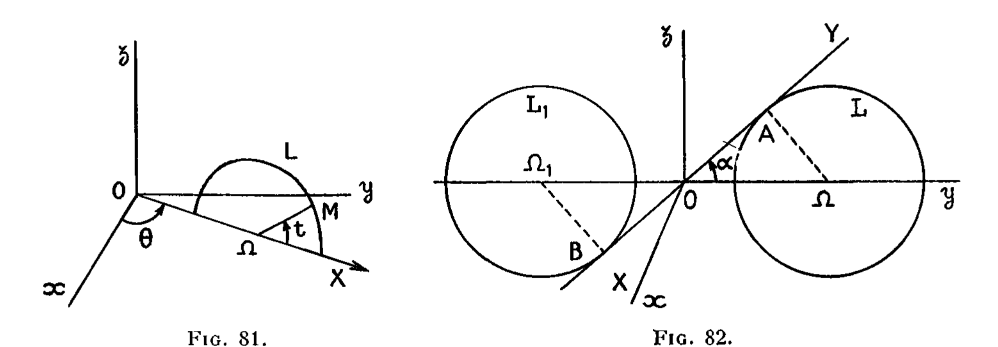


Fig. 81. Fig. 82.

Section par un plan bitangent. — Nous verrons au tome IV, n° 89, 3°, c que le plan tangent en un point M d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien de M.

Supposons $a > R$; les cercles L et L_1 qui composent la méridienne de Σ admettent deux tangentes communes passant par O; soit A et B les points de contact de l'une d'elles (fig. 82). Le plan P défini par les droites Ox et AOB est tangent à Σ en A et B; on dit que c'est un plan bitangent au tore.

Nous allons caractériser, dans son plan, la section $\mathcal{V}$ de Σ par P; soit α l'angle aigu formé par Oy et AB, $R = a \sin\alpha$, et la représentation paramétrique de Σ prend la forme

$$\begin{cases} x = a(1 + \sin\alpha \cos t) \cos\theta \\ y = a(1 + \sin\alpha \cos t) \sin\theta \\ z = a \sin\alpha \sin t \end{cases}$$

La relation entre t et θ qui caractérise $\mathcal{V}$ est donnée en exprimant

$$z \cos\alpha = y \sin\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\sin t \cos\alpha = (1 + \sin\alpha \cos t) \sin\theta.$$

On en déduit immédiatement $y = a \cos\alpha \sin t$.

Pour évaluer x, cherchons $\cos\theta$:

$$\cos^2\theta = \frac{(1 + \sin\alpha \cos t)^2 - \sin^2 t \cos^2\alpha}{(1 + \sin\alpha \cos t)^2}.$$

En remplaçant 1 par $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, on obtient

$$\cos\theta = \varepsilon \frac{\sin\alpha + \cos t}{1 + \sin\alpha \cos t} \qquad (\varepsilon = +1 \quad \text{ou} \quad -1)$$

et par suite

$$x = \varepsilon a (\sin\alpha + \cos t).$$

Si l'on prend pour axes dans le plan P l'axe OX confondu avec Ox, et l'axe OY confondu avec OA,

$$X = x, \qquad Y = \frac{y}{\cos\alpha}$$

et finalement $\mathcal{V}$ est représentée par

$$\begin{cases} X = \varepsilon a (\sin\alpha + \cos t) \\ Y = a \sin t. \end{cases}$$

$\mathcal{V}$ se compose de deux cercles symétriques l'un de l'autre par rapport au plan méridien des points de contact, passant par A et B, et égaux au cercle moyen du tore (cercle engendré par le centre des cercles méridiens). Ce résultat est connu sous le nom de théorème d'Yvon Villarceau.

216. ***Énumération des quadriques d'un espace euclidien données par leurs équations réduites.*** — **1° Transformation par affinité d'une quadrique de révolution.** — Gardons le repère orthonormé utilisé pour l'étude d'une quadrique de révolution S (nº 215, 4°, exemple I), et effectuons sur cette quadrique l'affinité $\mathcal{A}$ déterminée par les formules

$$x' = kx, \qquad y' = y, \qquad z' = z \qquad (k \neq 0;1).$$

Si S est un ellipsoïde ou un hyperboloïde (équation (1) du nº 215, 4°), nous obtenons ainsi la surface S′ d'équation

$$\frac{x^2}{k^2P} + \frac{y^2}{P} + \frac{z^2}{Q} - 1 = 0. \tag{1}$$

Si S est un paraboloïde (équation (2) du nº 215, 4°), nous obtenons ainsi la surface S′ d'équation

$$\frac{x^2}{k^2q} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0. \tag{2}$$

2° **Équations réduites des quadriques.** — Considérons maintenant, a priori, la surface Σ représentée dans un repère orthonormé

soit par l'équation $$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0 \qquad (3)$$

soit par l'équation $$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}-2z=0. \qquad (4)$$

Les réels, non nuls, A, B, C, α, β sont de signes quelconques. (1)

Nous allons chercher à déduire Σ, au moyen d'une affinité $\mathcal{A}$, d'une quadrique de révolution S.

I. — Supposons A, B, C de même signe. — S'ils sont tous les trois négatifs, l'équation (3) représente la surface vide.

Supposons donc A, B, C positifs; l'équation (3) peut prendre la forme

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

On peut l'identifier avec l'équation (1) en prenant $Q=c^2$, $P=b^2$, $k=\frac{a}{b}$: la méridienne Γ de S est alors une ellipse; la surface Σ représentée par l'équation (5) est appelée *ellipsoïde.*

Le plan d'abscisse λ coupe Σ suivant la courbe $\mathcal{L}$ qui a pour équation

$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1-\frac{\lambda^2}{a^2}$$

dans le repère $\left(O_1, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dont l'origine est le point d'abscisse λ sur Ox; $\mathcal{L}$ est une ellipse tant que $|\lambda|<a$, une courbe vide tant que $|\lambda|>a$; pour $\lambda=\pm a$, le plan est tangent à Σ.

L'étude est analogue pour les sections par les plans d'ordonnée μ, ou de cote ν.

II. — Supposons A, B, C non tous de même signe. Si un seul des trois coefficients, C par exemple, est négatif, l'équation (3) prend la forme

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

On peut l'identifier avec l'équation (1) en prenant $Q=-c^2$, $P=b^2$, $k=\frac{a}{b}$.

La méridienne Γ de S est une hyperbole ayant Oz pour axe non transverse; la surface Σ représentée par l'équation (6) est appelée ***hyperboloïde à une nappe.***

Le plan d'abscisse λ coupe Σ suivant la courbe $\mathcal{L}$ qui a pour équation

$$\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1-\frac{\lambda^2}{a^2}$$

(1) Le lecteur verra au chapitre XX que les équations (3) et (4) sont les seules équations réduites auxquelles peut mener l'étude des quadriques les plus générales, sans point double, dans un espace euclidien réel.

dans le repère $(O_1, \vec{j}, \vec{k})$; $\mathcal{L}$ est une hyperbole si $|\lambda| \neq a$, $\mathcal{L}$ est décomposée en deux droites si $\lambda = \pm a$, et le plan est alors tangent à Σ. Les résultats sont analogues pour la section par un plan d'ordonnée μ.

Le plan de cote ν coupe Σ suivant une ellipse $\mathcal{M}$ d'équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 + \frac{\nu^2}{c^2}$$

dans le repère $(O_3, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'origine est le point de cote ν sur Oz.

Si deux des trois coefficients, A et B par exemple, sont négatifs, l'équation (3) prend la forme

$$(7) \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

On peut l'identifier avec l'équation (1) en prenant

$$Q = c^2, \qquad P = -b^2, \qquad k = \frac{a}{b};$$

la méridienne Γ de S est une hyperbole ayant Oz pour axe transverse; la surface Σ représentée par l'équation (7) est appelée *hyperboloïde à deux nappes*.

Les plans d'abscisse λ et d'ordonnée μ coupent Σ suivant des hyperboles; le plan de cote ν coupe Σ suivant la courbe $\mathcal{M}$ d'équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{\nu^2}{c^2} - 1,$$

dans le repère $(O_3, \vec{j}, \vec{k})$; $\mathcal{M}$ est une ellipse tant que $|\nu| > c$, une courbe vide pour $|\nu| < c$; pour $\nu = \pm c$, le plan est tangent à Σ.

III. — Supposons α et β de même signe, positifs par exemple (si α et β sont tous deux négatifs, on se ramène au cas précédent en remplaçant le vecteur $\vec{k}$ par son opposé). L'équation (4) prend alors la forme

$$(8) \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \qquad (p > 0, \quad q > 0);$$

on peut l'identifier avec l'équation (2) en prenant $k = \sqrt{\frac{p}{q}}$; la méridienne Γ de S est une parabole; la surface Σ représentée par l'équation (8) est appelée *paraboloïde elliptique.*

Les sections par les plans $x = \lambda$ ou $y = \mu$ sont des paraboles tournant leur concavité vers les z positifs.

La section par le plan $z = \nu$ est une ellipse tant que ν est positif; le plan xOy est tangent en O à Σ.

IV. — Supposons α et β de signes contraires, par exemple $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ (si $\alpha < 0$ et $\beta > 0$, on se ramène au cas précédent en remplaçant le vecteur $\vec{k}$ par son opposé). L'équation (4) prend alors la forme

$$(9) \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \qquad (p > 0, \quad q > 0);$$

on ne peut pas l'identifier avec l'équation (2); mais la surface Σ que représente l'équation (9) se déduit par l'affinité $\mathcal{A}$ $\left(\text{avec } k = \sqrt{\frac{p}{q}}\right)$ de la surface d'équation

$$(10) \qquad x^2 - y^2 - 2qz = 0$$

qui a été étudiée au n° **214**, 3°, exemple I.

La surface Σ est appelée *paraboloïde hyperbolique.*

Les sections par les plans $x = \lambda$ et $y = \mu$ sont des paraboles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$. $\mathcal{L}$ tourne sa concavité vers les z positifs, $\mathcal{M}$ tourne sa concavité vers les z négatifs.

Les sections $\mathcal{N}$ par les plans $z = \nu$ sont des hyperboles, sauf lorsque $\nu = 0$: le plan xOy coupe Σ suivant deux droites; il est tangent en O à Σ.

EXERCICES

Géométrie plane

1. — On donne deux droites rectangulaires et, sur l'une, un point A. Lieu du point de contact d'une tangente menée de A à un cercle variable tangent aux deux droites.

2. — Par un point A pris sur un cercle donné on mène deux cordes perpendiculaires variables AB et AC. Trouver le lieu géométrique des centres d'homothétie des cercles décrits sur AB et AC comme diamètres et le lieu géométrique des centres d'homothétie de l'un de ces cercles et du cercle donné.

3. — On donne une parabole et on considère une corde variable AB passant par le foyer de la parabole. Soit C le cercle décrit dans le plan de la parabole sur AB comme diamètre. Montrer que le lieu géométrique des points de contact des tangentes au cercle C parallèles à une direction donnée δ se compose de deux paraboles. Construire ces paraboles et calculer les coordonnées des points communs à ces courbes et à la parabole donnée. Examiner le cas particulier où la direction δ est celle de l'axe de la parabole donnée.

4. — On donne deux droites perpendiculaires D et D′ et un point O hors de ces droites; deux points P et Q se déplacent respectivement sur D et D′ de façon que le segment PQ soit vu de O sous un angle droit. Trouver le lieu géométrique de la projection orthogonale de O sur la droite PQ.

5. — On donne un cercle C tangent en un point fixe O à une droite D. Un cercle γ variable est tangent en O à D : trouver le lieu géométrique des points de contact de γ et des tangentes communes à C et à γ.

6. — Le repère étant orthonormé, on donne les points $A(a, 0)$, $B(0, b)$; lieu géométrique du point M tel que OM soit une bissectrice des droites AM et BM.

7. — Dans un repère orthonormé on donne les points $A\ (a, 0)$ et $B\ (-a, 0)$. Lieu du point M tel qu'une bissectrice de l'angle AMB soit tangente au cercle (O, R).

8. — Le repère est orthonormé; un point ω décrit la droite $D(x = a)$ et est le centre d'un cercle Γ tangent à la droite $\Delta(x + y = 0)$; lieu des points communs à Γ et à la droite $O\omega$.

9. — On donne un point O et deux droites Δ_1 et Δ_2; une droite variable $O\lambda$ coupe Δ_1 en M_1 et Δ_2 en M_2; lieu du second point commun au cercle Γ_1 passant par O, tangent en M_1 à Δ_1, et au cercle Γ_2 passant par O, tangent en M_2 à Δ_2.

10. — On donne un faisceau de cercles $\mathcal{F}$; trouver le lieu :

a) des points de contact des cercles de $\mathcal{F}$ et des tangentes de direction donnée;

b) des points de contact des tangentes menées d'un point donné P aux cercles du faisceau $\mathcal{F}$;

c) des intersections des cercles de $\mathcal{F}$ avec ceux de leurs diamètres qui passent par un point donné A.

11. — Un cercle Γ_λ parcourt un faisceau $\mathcal{F}$; Δ_λ désigne l'axe radical de Γ_λ et d'un cercle fixe C. Lieu du pôle de Δ_λ par rapport à C et du pôle de Δ_λ par rapport à Γ_λ.

12. — On donne deux points A et B et un cercle Γ du faisceau dont les points limites sont A et B. Déterminer le lieu des points M du plan tels que les tangentes au cercle Γ issues de M soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites MA et MB.

13. — On donne le point A et les deux droites D et D' qui se coupent en O. Un cercle C, qui passe par O et A, recoupe D et D' respectivement en M et M'. Lieu du pôle P de la droite MM' par rapport au cercle C.

14. — On donne un cercle C et une similitude plane directe $\mathcal{S}$ du plan de C : déterminer le lieu de M tel que les points M et $\mathcal{S}$ (M) soient conjugués pour C.

15. — On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy. Lieu du point de contact de deux cercles tangents entre eux et tangents l'un à Ox en A, l'autre à Oy en B.

16. — On donne, dans un repère orthonormé Ox, Oy, un cercle C tangent en O à Ox. On désigne par Γ et Γ' deux cercles (de centres Ω et Ω') tangents à Ox, à C et tangents entre eux en T.

a) Déterminer le lieu géométrique P des centres Ω et Ω'.

b) Trouver une relation entre les abscisses des points Ω et Ω' *(elle se décompose en deux relations homographiques)*.

c) Déterminer le lieu du point T, et celui du centre radical I des trois cercles C, Γ, Γ'.

d) Montrer que l'enveloppe du cercle orthogonal à C, Γ, Γ' se compose de deux cercles.

17. — Le point Q décrit le cercle : $x^2 + y^2 - 4\,ax + 2\,a^2 = 0$. La droite OQ recoupe en P le cercle : $x^2 + y^2 - 2\,ax = 0$. Lieu du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$

18. — Lieu du centre de gravité du triangle ABC, B et C étant les points de contact des tangentes à un cercle fixe menées par un point A qui décrit une droite fixe.

19. — Étant donnés une droite D, un point O sur D et un point A hors de D, à tout point P de D en fait correspondre sur la droite AP les points M et M' tels que

$$PM = PM' = PO.$$

Trouver le lieu géométrique des points M et M' quand P décrit D.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

20. — Nature de la trace sur xOy du cylindre circonscrit à la surface : $x^2 + y^2 = \sin^2 z$, les génératrices du cylindre étant parallèles au vecteur $\overrightarrow{V}(1, 0, -1)$.

21. — Courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface : $z(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$, parallèlement au vecteur $\overrightarrow{V}(1, 1, 1)$.

22. — Que représente l'équation

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = k?$$

Trouver, en vraie grandeur, la section de la surface précédente par le plan

$$\Pi(x + y + z = 0),$$

(repère orthonormé).

23. — Équation du cylindre parallèle à la direction (1, 1, 0) et ayant pour directrice la courbe $\mathcal{D}(x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = \sin t \cos t)$.

24. — On donne la courbe Γ

$$x = \frac{u}{u-1}, \qquad y = \frac{u^2}{u-1}, \qquad z = \frac{u^3}{u-1}.$$

Trouver les équations de la sécante joignant le point $M_0(u_0)$ au point $M(u)$; en déduire l'équation du cône qui a pour sommet M_0 et pour directrice Γ.

25. — On donne la sphère Ω : $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,ax = 0$ (repère orthonormé).

a) Former l'équation du cône circonscrit à Ω, de sommet S (x_0, y_0, z_0).

b) On suppose $z_0 > 2a > 0$. Montrer que la trace de ce cône sur le plan xOy est une ellipse qui admet un foyer et une longueur de petit axe indépendante de (x_0, y_0).

c) Lieu de S pour que l'ellipse précédente ait une aire donnée.

26. — Trouver l'équation du cône de sommet (1, 1, 1) circonscrit à la surface $S(xyz = 1)$.

27. — Équation du cône de sommet $A(0, 0, a)$ circonscrit à la surface :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - a^3 = 0.$$

28. — Lieu des sommets des cônes qui coupent le plan yOz suivant un cercle et contiennent l'ellipse d'équations : $z = 0$ et $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (repère orthonormé).

29. — Lieu des sommets des cônes qui coupent le plan xOy suivant une hyperbole équilatère et contiennent le cercle d'équations :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x + y + z = 0 \text{ (repère orthonormé).}$$

30. Le repère est orthonormé.

a) Angle des plans dont l'ensemble a pour équation

$$4x^2 + 8y^2 - 6yz + 3zx - 12xy = 0.$$

b) Quel est l'angle des deux droites suivant lesquelles le plan $\Pi(z = ax + by)$ coupe le cône Σ $(2x^2 + y^2 - 3z^2 = 0)$? Peut-on choisir Π pour que ces droites soient perpendiculaires?

Même problème avec le cône Σ_1 $(x^2 + y^2 - z^2 - hxy = 0)$.

c) Trouver les bissectrices des deux droites définies par

$$\begin{cases} z^2 = \lambda\, xy \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

31. — Le repère $Oxyz$ est orthonormé. A toute droite D passant par O on associe les trois plans P_1, P_2, P_3 respectivement symétriques des plans DOx, DOy, DOz par rapport aux plans bissecteurs des dièdres d'arêtes Ox, Oy, Oz du trièdre $Oxyz$.

a) Montrer que P_1, P_2, P_3 ont une droite commune Δ.

b) Trouver tous les cônes K du second ordre, contenant Oy et Oz, tels que, quand la droite D appartient à K, il en est de même pour la droite Δ associée à D.

32. — On donne la courbe $\Gamma(y = x^2, z = x^3)$, le repère étant orthonormé.

a) Former l'équation du conoïde droit Σ_1 d'axe Oz, ayant Γ pour directrice.

b) Former l'équation du conoïde droit Σ_2 d'axe Oy, ayant Γ pour directrice.

c) Intersection de Σ_1 et de Σ_2.

33. — On considère un conoïde de Plücker (cf n° 214); étudier l'intersection de cette surface avec un plan contenant une de ses génératrices.

34. — Le repère étant orthonormé, on considère la sphère U d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,R(x + y) + R^2 = 0.$$

a) Équation du conoïde droit C d'axe Oz, circonscrit à U.

b) Il existe une famille de sphères S tangentes en O à Oz telles que la projection de

l'intersection de C et de S sur xOy soit décomposée en deux cercles passant par O. Déterminer le lieu du point variable commun aux deux cercles et le lieu du centre Ω de S.

c) Trouver l'enveloppe Σ des sphères S et l'inverse de Σ dans l'inversion $\mathfrak{J}[O, 2R^2]$.

35. — Soit Γ la courbe lieu des points de la sphère (O, R) dont la longitude est égale à la latitude (cf nº 134, 3º) (cette courbe est parfois appelée *fenêtre de Viviani*).

a) Étudier les projections de Γ sur les plans du repère orthonormé.

b) Trouver l'équation du conoïde droit, d'axe Oz, contenant Γ.

**c*) Σ est circonscrit à une sphère, et plus généralement à une infinité de quadriques de révolution.

36. — Étudier la surface engendrée par les normales à la parabole

$$\Gamma\,(z = 0,\ y^2 - 2\,px = 0)$$

qui rencontrent la droite $D\,(y = 0,\ z = h)$ (repère orthonormé).

37. — Équation de la surface engendrée par la courbe

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = \sin t + \cos t$$

en tournant autour de Oz (repère orthonormé). Construire une méridienne.

38. — Équation du cylindre de révolution de rayon 1 qui a pour axe la droite d'équations

$$x + y - 2z + 1 = 0, \qquad x - 2y + z + 2 = 0 \text{ (repère orthonormé).}$$

39. — Comment choisir a et b pour que la courbe

$$x = a, \qquad (y^2 + z^2)^2 - b^2(y^2 - z^2) = 0$$

engendre un tore en tournant autour de Oz.

40. — Dans un repère orthonormé, on donne les droites

(D) $\quad x = R\cos\alpha, \quad z = my \quad (R > 0 \quad m > 0)$

D') $\quad x = -R\cos\alpha, \quad z = my \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Le lieu du point M du plan xOy dont la distance MH à D et la distance MH' à D' ont une somme égale à 2 R est une conique; déterminer m en fonction de α pour que ce lieu soit un cercle C.

b) On suppose, dans toute la suite, $m = \operatorname{tg}\alpha$. Soit $M(R\cos\theta, R\sin\theta)$ un point du cercle C. Calculer l'angle $V\left(0 < V < \frac{\pi}{2}\right)$ que fait la tangente en M à C avec le plan P qui passe par D et M.

c) La droite D coupant xOy en A, on fixe un point quelconque N de D par $\overline{AN} = \rho$. Calculer le rayon de la sphère S qui contient C et N; calculer l'angle V' que fait S avec D en N.

d) Équation de la surface engendrée par le cercle d'axe D, de centre A, de rayon R, tournant autour de Oz.

41. — Étudier la surface engendrée par le cercle Γ (repère orthonormé)

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2\,ax = 0$$

en tournant autour de la droite Δ

$$x = 0, \qquad z = my.$$

42. — Dans un repère orthonormé les équations

$$x = z^2 + 2\,z, \qquad y = 2\,z^2 - z$$

représentent une parabole Γ; trouver l'équation de la surface Σ engendrée par Γ en tournant autour de son axe.

43. — En utilisant une interprétation vectorielle, donner la nature des surfaces

$$(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2 - a^4 = 0$$

$$(b^2 + c^2)\,x^2 + (c^2 + a^2)\,y^2 + (a^2 + b^2)\,z^2 - 2abxy - 2bcyz - 2cazx = h.$$

44. — On donne dans l'espace une droite Δ et deux points A et B. Déterminer le lieu des points M tels que les plans médiateurs des segments MA et MB découpent sur Δ un segment de longueur donnée.

45. — On donne un cercle C, et une droite D perpendiculaire au plan du cercle en un point A de ce cercle.
a) Étudier la surface engendrée par une droite G s'appuyant sur C et sur D, et faisant avec D un angle de $\frac{\pi}{4}$.
b) Étudier la surface engendrée par une droite G s'appuyant sur C et sur D en faisant des angles égaux avec C et avec D.

46. — Dans le repère orthonormé $Oxyz$ on donne les droites $D_1(y = 0,\ z = -a)$, $D_2(x = 0,\ z = a)$; soit G une droite rencontrant D_1 en P_1 et D_2 en P_2.
a) Étudier la surface engendrée par G lorsque la distance P_1P_2 est donnée ($P_1P_2 = 2\,l$).
b) Étudier la surface engendrée par G lorsque G reste tangente au cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

47. — Lieu géométrique Σ des milieux des cordes d'une hélice circulaire; on montrera que Σ est à la fois *a*) une surface conoïde; *b*) une surface de translation, c'est-à-dire une surface engendrée par une courbe Γ de grandeur invariable animée d'un mouvement de translation.

48. — Dans un repère orthonormé $Oxyz$ une droite D a pour équations

$$x - a = 0, \qquad y - z = 0.$$

De chaque point M de D on abaisse sur Oz la perpendiculaire MI et on construit dans le plan MOz le cercle C qui a I pour centre et passe par M. Former l'équation de la surface Σ engendrée par le cercle C et étudier la section de cette surface par un plan variable parallèle au plan xOy. Déterminer sur la surface Σ les systèmes de cercles autres que les cercles C et montrer comment on peut pour chacun de ces systèmes donner une définition géométrique des cercles qui le composent.

49. — On donne deux points A et B et un plan P parallèle à la droite AB. Étudier la surface S engendrée par un cercle qui passe par A et B et reste tangent à P. Trouver tous les cercles tracés sur S.

50. — Lieu de la projection de l'origine O sur le plan d'un triangle d'aire constante dont les sommets A, B, C décrivent les axes de coordonnées (repère orthonormé).

51. Lieu Σ des points dont les projections orthogonales sur les quatre faces d'un tétraèdre sont coplanaires. (On représentera les faces par des équations normales; on vérifiera que Σ est une surface algébrique d'ordre 3.)
Cas particulier où le tétraèdre est formé par les plans d'un repère orthonormé et par un plan quelconque.

52. — Étant donnée la surface S représentée dans un repère orthonormé par l'équation

$$xy = az$$

trouver tous les couples de droites D et D' telles que S soit le lieu géométrique des points équidistants des droites D, D'. Quel est le lieu géométrique de ces droites?

53. — On donne la courbe Γ

$$x = at, \qquad y = bt^2, \qquad z = ct^3.$$

a) Par l'origine O on mène les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ équipollents aux divers vecteurs joignant deux points de Γ. Étudier la surface Σ engendrée par les extrémités M.
b) Lieu des supports des cordes de Γ qui rencontrent la droite $\Delta(y = \lambda x;\ z = \mu x)$.
c) Lieu des projections orthogonales de l'origine O sur les supports des cordes de Γ (repère orthonormé).

CHAPITRE XVII

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES CONIQUES

I. DÉFINITION. CLASSIFICATION

217. — *Définition d'une conique du plan projectif complexe.* — I. *Généralités sur le plan projectif complexe.* — 1° **Données.** — Dans tout ce chapitre on suppose que l'on a fait choix, une fois pour toutes, d'un espace vectoriel $\vec{E}$, de dimension 3, sur le corps des complexes. Soient :

$\vec{E}^*$: l'espace vectoriel dual de $\vec{E}$,

$\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$: les espaces projectifs de dimension 2, respectivement issus des espaces vectoriels $\vec{E}$ et $\vec{E}^*$.

Nous dirons que $\mathfrak{L}$ est *le plan projectif* et que $\mathfrak{L}^*$ est *le dual* de $\mathfrak{L}$.

2° **Repères.** — Considérons deux bases duales, $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}^*$, arbitrairement choisies de $\vec{E}$ et $\vec{E}^*$, ou, ce qui revient au même (95, 2°), deux repères duaux $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$. Rappelons que $\mathfrak{R}$ est formé des sommets d'un *triangle de référence* et d'un *point unitaire*, alors que $\mathfrak{R}^*$ est formé des côtés du même triangle et d'une *droite unitaire*.

a) Repérage « ponctuel » d'un point M *et d'une droite* D *de* $\mathfrak{L}$. — Un point M de $\mathfrak{L}$ en est une variété linéaire projective de dimension 0, issue d'un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ de dimension 1, engendré par un vecteur non nul $\vec{M}$, dont les coordonnées (X, Y, T) dans la base $\mathfrak{U}$ de $\vec{E}$ sont dites coordonnées homogènes (ponctuelles) de M. On introduit la matrice unicolonne

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ T \end{bmatrix}$$

Une droite D de $\mathfrak{L}$ en est une variété linéaire projective de dimension 1, issue d'un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ de dimension 2, engendré par un système libre $\{\vec{M}_1, \vec{M}_2\}$. Le point générique M de D admet pour représentant le vecteur de $\vec{E}$

$$\vec{M} = \lambda\vec{M}_1 + \mu\vec{M}_2 \qquad \text{avec} \qquad \text{classe}\,(\lambda, \mu) \in \tilde{C}.$$

Le point générique de D — $\{M_1\}$ est représenté par

$$\vec{M} = \lambda\vec{M}_1 + \vec{M}_2 \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in C.$$

b) Repérage « tangentiel » d'une droite D *et d'un point* M *de* $\mathcal{P}$. — Une droite D de $\mathcal{P}$ en est un hyperplan. Il lui correspond donc biunivoquement (61) une forme linéaire non nulle sur $\vec{E}$, d, définie à un facteur près, non nul, de telle sorte que

$$M \in D \iff d(\vec{M}) = 0.$$

Les coordonnées (u, v, h) de la forme linéaire $d \in \vec{E}^*$ dans la base $\mathcal{U}^*$ de $\vec{E}^*$ sont dites coordonnées homogènes (tangentielles) de D. On introduit la matrice uniligne

$$\mathcal{D} = [u \ \ v \ \ h].$$

On a :

$$M \in D \iff uX + vY + hT = 0 \iff \mathcal{D}\mathcal{M} = [0] \qquad (1)$$

(dans toute cette étude [0] désigne la matrice-élément nulle).

Pour un point M donné, la relation (1) traduit une condition nécessaire et suffisante pour que la droite D de coordonnées tangentielles (u, v, h) passe par M; on dit que (1) est une *équation tangentielle* du point M.

Remarque. — Nous retrouvons ici la bijection δ étudiée aux n°s 93 à 95 de l'ensemble des droites (ou hyperplans) de $\mathcal{P}$ sur le dual $\mathcal{P}^*$ de $\mathcal{P}$: à la droite D de $\mathcal{P}$ dont une équation est $d(\vec{M}) = 0$ est associée l'élément $\delta(D)$ de $\mathcal{P}^*$ dont un représentant homogène est la forme linéaire d de $\vec{E}^*$; à un faisceau de droites $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}$ est associée une variété linéaire projective $\delta(\mathcal{F})$ de $\mathcal{P}^*$, de dimension 1.

II. — *Rappel sur l'écriture d'une forme quadratique.* — Soit une forme quadratique non nulle, Φ, sur l'espace vectoriel $\vec{E}$. Soit φ la forme polaire de Φ et r le rang commun de Φ et φ; on a $r \leqslant 3$.

Dans la base $\mathcal{U}$ de $\vec{E}$, les formes Φ et φ sont représentées par la matrice carrée d'ordre 3, A, symétrique $(\tilde{A} = A)$, dont le rang est r. Explicitons (2 et 3) :

$$A = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{M}) &= \text{dét}(\tilde{\mathcal{M}} A \mathcal{M}) = aX^2 + a'Y^2 + a''T^2 + 2\,bYT + 2\,b'TX + 2\,b''XY \\ &= F\,(X, Y, T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{M}, \vec{M}') &= \text{dét}(\tilde{\mathcal{M}} A \mathcal{M}') = aXX' + a'YY' + a''TT' + b(YT' + Y'T) \\ &\quad + b'(TX' + T'X) + b''(XY' + X'Y) \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{M}} A = \frac{1}{2}[F'_X\,F'_Y\,F'_Z]\,; \qquad \varphi(\vec{M}, \vec{M}') = \frac{1}{2}(X'F'_X + Y'F'_Y + T'F'_T)$$

Rappelons enfin que, la forme φ étant symétrique, $\varphi(\vec{M}', \vec{M}) = \varphi(\vec{M}, \vec{M}')$.

Repères privilégiés. — Nous savons (8 et 9) qu'il existe des bases de $\vec{E}$ formées de vecteurs deux à deux conjugués par rapport à la forme quadratique Φ et que, si $\mathcal{U}$ est l'une de ces bases, la matrice A correspondante est diagonale, soit

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F(X, Y, T) = aX^2 + a'Y^2 + a''T^2;$$

le rang r de Φ et de A est alors le nombre des scalaires non nuls qui figurent parmi les éléments diagonaux $\{a, a', a''\}$.

Rappelons que, dans la pratique, on peut obtenir un repère privilégié et déterminer le rang r de Φ en utilisant la méthode de la décomposition en carrés (ou méthode de Gauss) exposée au n° 10.

III. — *Définition d'une conique du plan projectif complexe.* — Définition. — **On appelle conique du plan projectif $\mathcal{L}$, attachée à la forme quadratique non nulle Φ, sur l'espace vectoriel $\vec{E}$ dont $\mathcal{L}$ est issu, l'ensemble Γ des points M de $\mathcal{L}$ tel que, $\vec{M}$ étant un représentant homogène de M dans $\vec{E}$,**

$$\Phi(\vec{M}) = 0.$$

Notons que, d'après la relation $\Phi(\lambda\vec{M}) = \lambda^2\Phi(\vec{M})$, cette définition est indépendante du choix de $\vec{M}$; par ailleurs les coniques attachées aux formes Φ et $k\,\Phi (k \in C^\bullet)$ coïncident.

On peut dire que la conique Γ est la partie de $\mathcal{L}$ issue de l'ensemble des vecteurs de $\vec{E}^\bullet$ qui sont singuliers pour la forme quadratique Φ.

Représentation analytique d'une conique. — Avec les notations du 1°, nous avons

$$M \in \Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\mathcal{M}}\, A\, \mathcal{M} = [0] \quad \text{ou} \quad F(X, Y, T) = 0.$$

218. *Notions fondamentales : points conjugués et points doubles.* — 1° **Points conjugués.** — *a)* Définition. — **Deux points M et M' de $\mathcal{L}$ sont dits conjugués par rapport à la conique Γ, attachée à la forme quadratique Φ, s'ils admettent des représentants, $\vec{M}$ et $\vec{M'}$, conjugués par rapport à Φ, c'est-à-dire tels que**

$$\varphi(\vec{M}, \vec{M'}) = 0.$$

Cette définition est indépendante du choix des représentants, car on sait que

$$\varphi(\lambda\vec{M}, \mu\vec{M'}) = \lambda\mu\varphi(\vec{M}, \vec{M'}).$$

On dit aussi que « M' *est conjugué de* M »; il s'agit d'une relation binaire, symétrique puisque

$$\varphi(\vec{M}, \vec{M'}) = \varphi(\vec{M'}, \vec{M}).$$

b) Traduction analytique de la conjugaison dans un repère $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{P}$:

M et M' conjugués $\iff \tilde{\mathcal{M}} A \mathcal{M}' = [0] \iff X'F'_X + Y'F'_Y + T'F'_T = 0,$

relations dans lesquelles on peut transposer M et M'.

THÉORÈME. — **Un point est conjugué de lui-même par rapport à une conique, si, et seulement si, il appartient à la conique.**

Cela tient à l'égalité :

$$\varphi(\vec{M}, \vec{M}) = \Phi(\vec{M}).$$

2° **Points doubles.** — *a)* DÉFINITION. — **Un point M_0 de $\mathcal{P}$ est dit point double de la conique Γ, attachée à la forme quadratique Φ, si un représentant $\vec{M}_0$ de M_0 est vecteur double pour Φ, c'est-à-dire élément du noyau $\vec{S}$ de Φ.**

Cette définition est indépendante du choix de $\vec{M}_0$ car, $\vec{S}$ étant un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$,

$$\vec{M}_0 \in \vec{S} \iff \lambda \vec{M}_0 \in \vec{S} \quad (\forall \lambda \in C^*).$$

Étant donné que $\vec{S}$ est l'ensemble des vecteurs de $\vec{E}$ qui sont conjugués de tout vecteur de $\vec{E}$, on peut énoncer :

THÉORÈME. — **Un point M_0 de $\mathcal{P}$ est point double de la conique Γ si, et seulement si, il est conjugué de tout point de $\mathcal{P}$ par rapport à Γ.**

En particulier, un point double de Γ est conjugué de lui-même et, (cf. 1°), il appartient à Γ. Si un point M appartient à Γ, sans être point double, nous dirons que M est *point simple* de Γ; le choix des vocables *simple* et *double* s'explique par l'étude de l'intersection d'une conique et d'une droite, qui sera traitée au n° 223.

b) Recherche analytique des points doubles, au moyen d'un repère $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{P}$. — Un point M_0 de $\mathcal{P}$ est point double de la conique Γ si, et seulement si,

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \tilde{\mathcal{M}}_0 A \mathcal{M} = [0] \iff \tilde{\mathcal{M}}_0 A = [000] \quad \text{ou} \quad [F'_{X_0} F'_{Y_0} F'_{T_0}] = [000].$$

Autrement dit les points doubles de Γ sont donnés par le système

$$(\Sigma) \begin{cases} F'_X = 0 \\ F'_Y = 0 \\ F'_T = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} aX + b''Y + b'T = 0 \\ b''X + a'Y + bT = 0 \\ b'X + bY + a''T = 0 \end{cases}$$

219. ***Classification projective des coniques, par les points doubles.*** — 1° DÉFINITION. — **La conique Γ, attachée à la forme quadratique Φ, est dite dégénérée ou propre suivant que Φ est dégénérée ou non, c'est-à-dire que le rang r de Φ est inférieur à 3 ou égal à 3.**

2° **Classification.** — Le noyau $\vec{S}$ de Φ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ dont la dimension est $3 - r$, (11, 1°).

1er CAS : Γ *est propre*; $\vec{S}$ est réduit à $\vec{0}$, Γ n'a pas de point double.

2e CAS : Γ *est dégénérée*; l'ensemble des points doubles de Γ est la variété linéaire de $\mathfrak{E}$ qui est issue de $\vec{S}$; cette variété linéaire a pour dimension $2 - r$, autrement dit :

I. $r = 2$, Γ a un point double unique, qui sera désigné par Ω;
II. $r = 1$, Γ a une *droite de points doubles*.

3° **Interprétation des cas de dégénérescence.** — Utilisons ici l'un des repères privilégiés dont il a été question au n° 217 : la base $\mathfrak{U}$ de $\vec{E}$ est formée de trois vecteurs deux à deux conjugués par rapport à Φ, ou ce qui revient au même, dans le repère $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{E}$ les sommets du triangle de référence sont deux à deux conjugués par rapport à Γ.

Dans ce repère, Γ est représentée par

$$F(X, Y, T) = 0 \qquad \text{avec} \qquad F(X, Y, T) = aX^2 + a'Y^2 + a''T^2,$$

et les points doubles sont donnés par le système

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} aX = 0 \\ a'Y = 0 \\ a''T = 0 \end{cases}$$

On retrouve la discussion du 2°, et on la complète de la façon suivante :

Cas de $r = 3$: $aa'a'' \neq 0$; (Σ) s'écrit

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad T = 0.$$

Comme il n'existe pas de point de $\mathfrak{E}$ dont les trois coordonnées sont nulles, Γ n'admet pas de point double.

Cas de $r = 2$: $aa' \neq 0$ et $a'' = 0$; (Σ) s'écrit

$$X = 0, \qquad Y = 0.$$

Γ admet un, et un seul point double, le point Ω de coordonnées (0, 0, 1).

En désignant par k (resp. k') l'un des deux nombres complexes (non nuls) dont le carré est a (resp. $-a'$), nous avons

$$F(X, Y, T) = (kX + k'Y)(kX - k'Y);$$

Γ est donc la réunion des deux droites, Δ et Δ', qui admettent les équations

$$kX + k'Y = 0 \qquad \text{et} \qquad kX - k'Y = 0.$$

Ces droites sont distinctes; elles ont en commun un, et un seul, point, qui est Ω.

Cas de $r = 1 : a \neq 0, a' = 0, a'' = 0$; (Σ) s'écrit $X = 0$.

Γ admet pour points doubles tous les points de la droite $X = 0$. Par ailleurs la conique dont une équation s'écrit $aX^2 = 0$, n'admet pas d'autre point que les points doubles. Pour harmoniser les notations nous conviendrons de dire que, dans ce cas, Γ est constituée par deux droites confondues ou par une *droite double.*

REMARQUE. — Les résultats obtenus pour $r = 2$ et $r = 1$ traduisent le fait que (cf nº **12**) sur le corps des complexes, une forme quadratique de rang 2 est le produit de deux formes linéaires indépendantes et qu'une forme quadratique de rang 1 est le carré d'une forme linéaire non nulle.

220. ***Les coniques du plan projectif réel.*** — On peut définir et étudier des coniques dans un espace projectif issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension 3, sur un corps commutatif K qui n'est pas de caractéristique 2. Les propriétés projectives, qui font l'objet de ce chapitre, restent valables, sauf celles qui découlent du fait que, sur le corps des complexes, un polynôme du second degré a deux zéros (décomposition en deux droites distinctes, intersection avec une droite...).

Dans ce paragraphe (et, plus loin, dans l'étude des propriétés affines et projectives des coniques) nous nous plaçons dans le cas où le corps de base est celui des réels; pour éviter toute difficulté nous convenons, une fois pour toutes, que l'espace vectoriel réel $\vec{E}$ ainsi que l'espace projectif $\mathcal{E}$ ont été complexifiés et que la forme quadratique réelle Φ a été prolongée (cf. chapitre IX). Naturellement, même dans l'espace complexifié, nous n'utilisons que des repères réels.

De cette façon la forme Φ est représentée par un polynôme quadratique, $F(X, Y, T)$, à coefficients réels et d'autre part deux points $M(X, Y, T)$ et $\overline{M}(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{T})$ sont imaginaires conjugués si, et seulement si, les nombres X et $\overline{X}$, Y et $\overline{Y}$, T et $\overline{T}$, sont deux à deux conjugués. On sait que si cette condition est remplie, (I, 77), les nombres complexes $F(X, Y, T)$ et $F(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{T})$ sont conjugués, si bien que la conique Γ contient le point M si, et seulement si, elle contient le point imaginaire conjugué $\overline{M}$.

La classification projective des coniques peut être complétée, en tenant compte de la signature de la forme quadratique réelle Φ : la conique Γ étant représentée dans le repère réel $\mathcal{R}$, privilégié, par l'équation

$$aX^2 + a'Y^2 + a''T^2 = 0,$$

a, a', a'' sont ici des scalaires réels parmi lesquels figurent un nombre imposé de scalaires positifs et un nombre imposé de scalaires négatifs, indépendamment du choix de $\mathcal{R}$. Rappelons que, dans la pratique, la méthode de la décomposition en carrés fournit la signature.

La classification par les points doubles est ainsi complétée :

Cas de $r = 3$: $aa'a'' \neq 0$. Si la signature de la forme quadratique réelle Φ est

$$(+ + +) \qquad \text{ou} \qquad (- - -)$$

c'est-à-dire si les scalaires réels a, a', a'' ont le même signe, la conique propre Γ n'admet aucun point réel; elle est dite *conique propre imaginaire.*

Dans les autres cas, la conique propre Γ contient au moins quatre points réels, situés sur deux côtés, convenablement choisis du triangle de référence de $\mathcal{R}$; elle est dite *conique propre réelle.* C'est ainsi que la conique d'équation $X^2 - 4 Y^2 + T^2 = 0$ contient les points réels (2, 1, 0), (2, — 1, 0), (0, 1, 2), (0, — 1, 2).

Cas de $r = 2$: $aa' \neq 0$, $a'' = 0$. Γ comprend deux droites distinctes réelles si la signature de la forme quadratique réelle Φ est $\{+, -\}$, imaginaires conjuguées dans les autres cas.

Le point double est, de toute façon, réel.

Cas de $r = 1$: $a \neq 0$, $a' = 0$, $a'' = 0$. La droite double qui compose Γ est réelle.

II. CONJUGAISON

Nous revenons au cas général : le plan projectif complexe $\mathcal{L}$ dans lequel nous nous plaçons n'est pas nécessairement obtenu par complexification d'un plan projectif réel.

221. *Polaire d'un point par rapport à une conique.* — Rappelons qu'un point double d'une conique est conjugué de tout point de $\mathcal{L}$ par rapport à la conique.

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donnés une conique Γ et un point M_0, qui n'est pas point double de Γ, le lieu D_0 des points conjugués de M_0 par rapport à Γ est une droite, qui est dite polaire de M_0 par rapport à Γ.**

a) D'après la définition de la conjugaison (218, 1°)

$$M \text{ conjugué de } M_0 \iff \varphi\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) = 0 \qquad (1)$$

$\vec{M_0}$ étant bloqué, $\varphi(\vec{M}, \vec{M_0})$ peut être considéré comme une forme linéaire, non nulle sans quoi M_0 serait point double de Γ. L'équation (1) représente donc un hyperplan projectif de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire une droite.

b) Analytiquement, en utilisant un repère quelconque $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}$,

$$M \text{ conjugué de } M_0 \iff \tilde{\mathcal{M}}_0 A \mathcal{M} = [0],$$

ce qui s'écrit

$$\mathcal{D}_0 \mathcal{M} = [0] \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{D}_0 = \tilde{\mathcal{M}}_0 A \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{D}_0 = \frac{1}{2}[F'_{X_0} F'_{Y_0} F'_{T_0}].$$

Puisque M_0 n'est pas un point double de Γ, les trois éléments de la matrice $\mathcal{D}_0$ ne sont pas tous nuls; le lieu D_0 est donc la droite qui admet pour coordonnées tangentielles les éléments de $\mathcal{D}_0$ et pour équation

$$XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + TF'_{T_0} = 0.$$

Remarque. — Le lieu des conjugués, par rapport à la conique dégénérée Γ, d'un point double Ω de Γ est le plan projectif $\mathcal{P}$. Nous conviendrons de considérer $\mathcal{P}$ comme la polaire de Ω.

2° **Propriétés des polaires.** — I. Deux points sont conjugués si, et seulement si, la polaire de l'un quelconque d'entre eux passe par l'autre. Il en résulte que *la polaire de* M_1 *passe par* M_0 *si, et seulement si, la polaire de* M_0 *passe par* M_1 (réciprocité polaire).

En particulier, *la polaire d'un point quelconque du plan passe par tout point double* d'une conique dégénérée.

II. *La polaire de* M_0 *contient* M_0 *si, et seulement si,* M_0 *est un point de la conique* Γ (218, 1°).

III. Deux points distincts M_0 et M_1, qui ne sont pas des points doubles de Γ, admettent la même polaire si, et seulement si, les formes linéaires obtenues en bloquant $\vec{M_0}$ et $\vec{M_1}$ dans $\varphi(\vec{M}, \vec{M_0})$ et $\varphi(\vec{M}, \vec{M_1})$ sont proportionnelles c'est-à-dire s'il existe un nombre complexe non nul, k, tel que

$$k\varphi(\vec{M}, \vec{M_0}) + \varphi(\vec{M}, \vec{M_1}) \qquad \text{qui s'écrit} \qquad \varphi(\vec{M}, k\vec{M_0} + \vec{M_1})$$

est la forme linéaire nulle, ce qui signifie que le point de la droite M_0M_1 représenté par $k\vec{M_0} + \vec{M_1}$ est un point double de Γ. Autrement dit M_0 et M_1 *admettent la même polaire si, et seulement si, la droite* M_0M_1 *contient un point double de la conique* Γ.

IV. Le point générique P d'une droite donnée L, déterminée par deux points M_0 et M_1, admet le représentant $\lambda\vec{M_0} + \mu\vec{M_1}$; sa polaire est la droite D d'équation

$$\varphi(\vec{M}, \lambda\vec{M_0} + \mu\vec{M_1}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda\varphi(\vec{M}, \vec{M_0}) + \mu\varphi(\vec{M}, \vec{M_1}) = 0$$

En général, quand P décrit L, D engendre un faisceau de droites, $\mathcal{F}$, et D est l'homologue de P dans une application homographique h de L sur $\mathcal{F}$; rappelons que h conserve le birapport.

Il n'y a exception que si M_0 et M_1 ont la même polaire, c'est-à-dire (cf. III) si la droite L contient un point double de Γ; dans ce cas, tous les points de L ont la même polaire.

3° **Étude de la polaire d'un point par rapport à une conique Γ dégénérée.** — 1er CAS : Γ *est formée d'une droite double* Δ. La polaire d'un point M, qui n'appartient pas à Δ, contient tous les points doubles de la conique et coïncide ainsi avec Δ.

2e CAS : Γ *est formée de deux droites distinctes* Δ *et* Δ', *qui se coupent en* Ω. La polaire d'un point M, distinct de Ω, est une droite D qui passe par Ω; D est fixe (2°, IV) quand M décrit une droite qui passe par Ω. Si M appartient à Δ, sans appartenir à Δ', D contient Ω et M (2°, II) et coïncide ainsi avec Δ.

4° **Cas d'une conique propre.** — La conique Γ n'ayant pas de point double, tout point du plan $\mathcal{L}$ admet pour polaire une droite et deux points distincts ont des polaires distinctes (2°, III).

THÉORÈME. — **Étant données une conique propre Γ et une droite D, il existe un, et un seul point, dont la polaire par rapport à Γ est D.**

a) Tout sous-espace vectoriel $\vec{E}'$, de dimension 1, de $\vec{E}$, admet un sous-espace conjugué $\vec{E}''$ de dimension 2, tel que $\vec{E}'$ est le sous-espace conjugué de $\vec{E}''$. La conjugaison par rapport à Φ détermine donc une bijection de l'ensemble des sous-espaces de $\vec{E}$ de dimension 1, sur l'ensemble des sous-espaces de dimension 2. Quand on passe de $\vec{E}$ à $\mathcal{L}$, il en résulte que la relation « D est la polaire de M par rapport à Γ » détermine une bijection de $\mathcal{L}$ sur l'ensemble des droites de $\mathcal{L}$ et aussi (cf. bijection δ du n° 93) sur l'espace projectif dual $\mathcal{L}^*$.

b) Retrouvons ce résultat par le calcul. Soit $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{L}$, arbitrairement choisi, dans lequel la conique Γ et la droite D sont respectivement représentés par la matrice (3, 3) symétrique A et par la matrice $\mathcal{D}(1, 3)$.

Le point M représenté par la matrice unicolonne $\mathcal{M}$ admet D pour polaire par rapport à Γ si, et seulement s'il existe un nombre complexe k non nul tel que

$$\tilde{\mathcal{M}}A = k\mathcal{D} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{M} = kA^{-1}\tilde{\mathcal{D}}.$$

Il en résulte que le point représenté par la matrice unicolonne $A^{-1}\tilde{\mathcal{D}}$ et lui seul, a pour polaire D.

L'étude de la correspondance entre un point et sa polaire par rapport à une conique propre sera reprise au n° 228, 3°.

222. ***Tangente en un point simple d'une conique.*** — DÉFINITION. — **Le polaire d'un point simple M_0 d'une conique Γ, par rapport à la conique, est dite tangente en M_0 à Γ.**

Un repère $\mathcal{R}$ ayant été choisi, dans lequel Γ a pour équation $F(X, Y, T) = 0$, la tangente au point M_0, de coordonnées (X_0, T_0, Y_0), a pour équation

$$XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + TF'_{T_0} = 0 \qquad \text{avec} \qquad F(X_0, Y_0, T_0) = 0.$$

Il en résulte que, lorsque le corps de base est celui des réels, la notion de tangente que nous donnons ici coïncide avec celle qui est introduite au n° 54 du tome IV.

REMARQUE I. — *Une droite est tangente à une conique Γ si, et seulement si, elle est la polaire de l'un de ses points par rapport à Γ*; dans le cas d'une conique propre, ce point ne saurait être qu'unique, puisque deux points distincts ont des polaires distinctes.

REMARQUE II. — Si Γ est la réunion de deux droites distinctes, Δ et Δ', qui se coupent en Ω, la tangente à Γ en un point M_0 de Δ, distinct de Ω, n'est autre que Δ (221, 3°).

III. INTERSECTION D'UNE CONIQUE ET D'UNE DROITE

Dans ce sous-chapitre nous aurons à utiliser le fait que le corps de base est celui des complexes.

223. ***Intersection d'une conique et d'une droite.*** — 1° THÉORÈME. — **Dans un plan projectif complexe, toute conique Γ, propre ou dégénérée, est coupée en deux points, éventuellement confondus, par toute droite D qui ne fait pas partie de Γ.**

Soit D une droite et Γ une conique, attachée à une forme quadratique Φ, non nulle. Nous exceptons le cas, trivial, où Γ est dégénérée et où D est l'une des droites, éventuellement confondues, qui composent Γ. Autrement dit nous supposons qu'il existe au moins un point M_1 de D qui n'appartient pas à Γ; nous définissons D par M_1 et par un second point M_0 (qui peut, ou non, appartenir à Γ). Le point générique de $D - \{M_1\}$ admet le représentant

$$\lambda\vec{M_1} + \vec{M_0}, \qquad \lambda \in C$$

et les points d'intersection de Γ et de D correspondent aux racines de l'équation sur C

$$\Phi\left(\lambda\vec{M_1} + \vec{M_0}\right) = 0$$

qui s'écrit, en utilisant la formule de Taylor,

$$(1) \qquad \lambda^2\Phi\left(\vec{M_1}\right) + 2\lambda\varphi\left(\vec{M_0}, \vec{M_1}\right) + \Phi\left(\vec{M_0}\right) = 0.$$

Compte-tenu de $\Phi(\overrightarrow{M_1}) \neq 0$, la proposition en résulte. On la traduit en disant que *toute conique de $\mathcal{P}$ est une courbe du second ordre.*

Remarque. — M_1 étant un point donné, non situé sur la conique Γ, l'équation de l'ensemble des droites qui passent par M_1 et coupent Γ en deux points confondus s'obtient en écrivant que l'équation (1), dans laquelle on a remplacé M_0 par le point générique M de $\mathcal{P}$, admet une racine double. On obtient ainsi

$$(2) \qquad \left[\varphi(\overrightarrow{M}, \overrightarrow{M_1})\right]^2 - \Phi(\overrightarrow{M_1}).\Phi(\overrightarrow{M}) = 0.$$

2° **Intersection d'une conique Γ et d'une droite D qui passe par un point M_0 de Γ.** — Nous nous limitons encore au cas où D ne fait pas partie de Γ. Nous définissons D par M_0 et par un second point M_1 non situé sur Γ. L'équation (1) du 1° reste valable, avec cette fois $\Phi(\overrightarrow{M_0}) = 0$. Autrement dit, l'équation (1) admet la racine $\lambda = 0$ qui correspond au point M_0. Cette racine est double si, et seulement si,

$$(3) \quad \varphi(\overrightarrow{M_0}, \overrightarrow{M_1}) = 0 \iff M_0 \text{ et } M_1 \text{ sont conjugués par rapport à } \Gamma.$$

Deux cas sont à considérer :

I. *Γ est dégénérée et M_0 est un point double de Γ.* La condition (3) est vérifiée par tout point M_1 de $\mathcal{P}$, extérieur à Γ. Autrement dit :

Théorème. — **Soit Γ une conique dégénérée admettant M_0 pour point double; toute droite D, qui passe par M_0 sans appartenir à Γ coupe Γ en deux points confondus avec M_0.**

Ce théorème explique le choix du vocable « point double » d'une conique et, par là même, celui du vocable « vecteur double » d'une forme quadratique.

Remarque. — Inversement, supposons qu'il existe un point M_0 de Γ tel que toute droite passant par M_0 coupe Γ en deux points confondus en M_0 (ou fait partie de Γ). D'après (3), M_0 est conjugué de tout point de $\mathcal{P}$ qui ne fait pas partie de Γ, ce qui exige que Γ soit une conique dégénérée dont un point double est M_0.

II. M_0 *est un point simple de* Γ. — La condition (3) exprime que M_1 est un point de la tangente en M_0 à Γ. Dans le cas d'une conique dégénérée en deux droites distinctes, cette condition est incompatible avec : $M_1 \notin \Gamma$. Dans le cas d'une conique propre, nous pouvons énoncer :

Théorème. — **Étant donnée une conique propre Γ, toute droite D coupe Γ en deux points; D est tangente à Γ si, et seulement si, ces deux points sont confondus.**

3° Concluons cette étude par la proposition suivante :

Théorème. — **Étant donnés une conique propre Γ et un point M_1 n'appartenant pas à Γ, il existe deux points de Γ en lesquels la tangente à Γ passe par M_1; ce sont les points d'intersection de Γ et de la polaire de M_1; ils sont distincts.**

En effet la tangente à Γ au point M de Γ passe par M_1 si, et seulement si, $\varphi\left(\overrightarrow{M}, \overrightarrow{M_1}\right) = 0$ c'est-à-dire si M est sur la polaire D_1 de M_1. Or D_1 n'est pas tangente à Γ, puisque D_1 est la polaire d'un et un seul point, M_1, qui n'appartient pas à D_1. Il en résulte que D_1 coupe Γ en deux points distincts T' et T'' et que la tangente à Γ en chacun de ces points passe par M_1 (fig. 83).

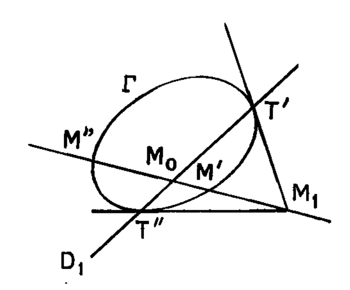


Fig. 83.

D'après la remarque du 1°, l'équation de la conique réunion des deux tangentes est

$$(2) \quad \left[\varphi\left(\overrightarrow{M}, \overrightarrow{M_1}\right)\right]^2 - \Phi\left(\overrightarrow{M_1}\right).\Phi\left(\overrightarrow{M}\right) = 0.$$

224. ***Conjugaison et birapport.*** — Soient une conique Γ, propre ou dégénérée, et deux points M_0 et M_1 qui n'appartiennent pas tous les deux à Γ : pour fixer les idées nous supposerons $M_1 \notin \Gamma$.

La droite M_0M_1, qui ne fait pas partie de Γ, coupe la conique en deux points M' et M'', distincts ou confondus; en reprenant les notations du n° **223**, 1°, ces points admettent les représentants

$$\lambda'\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_0} \qquad \text{et} \qquad \lambda''\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_0}$$

λ' et λ'' désignant les racines de l'équation

$$\lambda^2\Phi\left(\overrightarrow{M_1}\right) + 2\lambda\varphi\left(\overrightarrow{M_0}, \overrightarrow{M_1}\right) + \Phi\left(\overrightarrow{M_0}\right) = 0.$$

Deux cas peuvent se présenter :

I. M_0 *n'est ni point double de* Γ, *ni point de contact d'une tangente à* Γ *issue de* M_1. Parmi les quatre points $\{M_0, M_1, M', M''\}$ ne figurent pas trois points confondus; on peut parler du birapport des quatre points et écrire

$$(M_0, M_1, M', M'') = (0, \infty, \lambda', \lambda'') = \frac{\lambda'}{\lambda''}.$$

Il en résulte que les points M_0 et M_1 sont conjugués harmoniques par rapport aux points M' et M'' si, et seulement si $\frac{\lambda'}{\lambda''} = -1$ ou $\lambda' + \lambda'' = 0$ ou $\varphi\left(\overrightarrow{M_0}, \overrightarrow{M_1}\right) = 0$, c'est-à-dire si M_0 et M_1 sont conjugués par rapport à Γ (fig. 83).

II. M_0 *est soit point double de* Γ, *soit point de contact d'une tangente à* Γ *issue de* M_1. D'une part M_0 et M_1 sont conjugués par rapport à Γ, d'autre part, parmi les quatre points $\{M_0, M_1, M', M''\}$ figurent trois points confondus, M_0, M' et M''; une convention (69, 4°, *c*) nous permet alors de dire que M_0 et M_1 sont conjugués harmoniques par rapport à M' et M''.

En conclusion, nous pouvons énoncer :

Théorème. — **Étant donnée une conique Γ, propre ou dégénérée, deux points M_0 et M_1, dont l'un au moins n'appartient pas à Γ, sont conjugués par rapport à la conique si, et seulement si, ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de Γ et de la droite M_0M_1.**

Rappelons que deux points, M_0 et M_1, d'une conique Γ sont conjugués par rapport à Γ si, et seulement si, la conique est dégénérée et contient la droite M_0M_1.

Application. — Soit Γ la conique formée par deux droites distinctes, Δ et Δ', qui se coupent en Ω. La polaire par rapport à Γ du point M, distinct de Ω, n'est autre que la conjuguée harmonique de la droite Ω M, par rapport à Δ et Δ' et cela que M appartienne, ou non, à Γ.

IV. CONIQUES DANS LE PLAN PROJECTIF DUAL

225. ***Coniques du plan projectif dual.*** — 1° Soit $\mathfrak{P}^*$ le plan projectif dual du plan projectif $\mathfrak{P}$, issu de l'espace vectoriel $\vec{E}$, sur le corps des complexes.

Si nous considérons $\mathfrak{P}^*$ comme un plan projectif autonome, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}^*$, nous pouvons définir des coniques de $\mathfrak{P}^*$; désignons par Ψ une forme quadratique non nulle sur $\vec{E}^*$, de forme polaire ψ, de rang s.

Définition. — **On appelle conique attachée à la forme quadratique Ψ l'ensemble Γ^* des éléments de $\mathfrak{P}^*$ qui sont représentés dans $\vec{E}^*$ par les formes linéaires d telles que**

$$\Psi(d) = 0.$$

Dans une base $\mathfrak{U}^*$ arbitrairement choisie de $\vec{E}^*$, les formes Ψ et ψ sont représentées par une matrice carrée d'ordre 3, symétrique, de rang s,

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta'' & \beta' \\ \beta'' & \alpha' & \beta \\ \beta' & \beta & \alpha'' \end{bmatrix}$$

Soit $\mathfrak{D}$ la matrice uniligne (1) des coordonnées homogènes (u, v, h), dans la base $\mathfrak{U}^*$, de la forme linéaire générique, d, de $\vec{E}^*$. Nous avons :

$$\Psi(d) = \text{dét}\left(\mathfrak{D}B\tilde{\mathfrak{D}}\right) = \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' h^2 + 2\beta vh + 2\beta' hu + 2\beta'' uv = G(u, v, h)$$

$$\psi(d, d') = \text{dét}\left(\mathfrak{D}'B\tilde{\mathfrak{D}}\right) = \alpha uu' + \alpha' vv' + \alpha'' hh' + \beta(vh' + v'h) + \beta'(hu' + h'u) + \beta''(uv' + u'v)$$

---

(1) Rappelons (n° 7) que nous avons convenu d'écrire en colonne les coordonnées d'un élément de $\vec{E}$ et en ligne celles d'un élément de $\vec{E}^*$.

$$B\tilde{\mathfrak{D}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} G'_u \\ G'_v \\ G'_h \end{bmatrix} ; \ \psi(d, d') = \frac{1}{2}(u'G'_u + v'G'_v + h'G'_h)$$

Nous avons

$$\Psi(d) = 0 \iff \mathfrak{D}B\tilde{\mathfrak{D}} = [0] \iff G(u, v, h) = 0$$

Rappelons qu'il existe des bases de $\vec{E}^*$ formées de vecteurs deux à deux conjugués par rapport à la forme quadratique Ψ et que, si $\mathfrak{U}^*$ est l'une de ces bases, la matrice B est diagonale et on a

$$G(u, v, h) = \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' h^2.$$

2° Dans toute la suite, nous considérons que $\mathfrak{L}^*$ a été « identifié » à l'ensemble des droites du plan projectif $\mathfrak{L}$. A condition de se souvenir que cette identification n'est qu'une écriture commode d'une bijection δ de l'ensemble des droites de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{L}^*$ (93) et d'avoir recours à δ toutes les fois que cela est nécessaire, on peut déduire de l'étude faite aux sous-chapitres I, II et III un certain nombre de définitions et de propositions.

Définition I. — **On appelle conique de $\mathfrak{L}^*$, attachée à la forme quadratique sur $\vec{E}^*$ non nulle, Ψ, l'ensemble Γ^* des droites D de $\mathfrak{L}$ d'équations $d(\vec{M}) = 0$ avec**

$$\Psi(d) = 0.$$

Traduction analytique : $\mathfrak{D}$ étant la matrice uniligne des coordonnées tangentielles de la droite D dans le repère quelconque $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{L}$ (et aussi celle des coordonnées de la forme linéaire d dans le repère $\mathfrak{R}^*$ de $\mathfrak{L}^*$, dual de $\mathfrak{R}$) :

$$D \in \Gamma^* \iff \mathfrak{D}B\tilde{\mathfrak{D}} = [0] \iff G(u, v, h) = 0.$$

Définition II. — **Deux droites D et D′ sont conjuguées par rapport à la conique Γ^* de $\mathfrak{L}^*$, d'équation $\Psi(d) = 0$ si, et seulement si, $\psi(d, d') = 0$.**

Traduction analytique : $\mathfrak{D}'B\tilde{\mathfrak{D}} = [0]$ ou $u'G'_u + v'G'_v + h'G'_h = 0.$

Théorème. — **Une droite est conjuguée d'elle-même par rapport à la conique Γ^* de $\mathfrak{L}^*$ si, et seulement si, elle appartient à Γ^*.**

Définition III. — **Une droite D_0 est dite droite double de la conique Γ^* de $\mathfrak{L}^*$ si, et seulement si, elle est conjuguée de toute droite par rapport à Γ^*.**

Une droite double de Γ^* appartient à Γ^*; une droite de Γ^* qui n'est pas droite double est dite *droite simple* de Γ^*.

Traduction analytique :

D_0 droite double $\iff$ $\mathfrak{D}_0 B = [0 \ 0 \ 0]$ ou $G'_{u_0} = G'_{v_0} = G'_{h_0} = 0.$

226. *Classification projective des coniques de $\mathcal{P}^*$, d'après les droites doubles.* — En utilisant l'étude faite au nº 219, nous avons, en faisant intervenir ici le rang s de la forme quadratique Ψ :

1er CAS : $s = 3$. Γ^*, qui n'admet pas de droite double, est dite *conique propre* de $\mathcal{P}^*$.

2e CAS : $s = 2$. Γ^* est la réunion de deux faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, respectivement formés par les droites assujetties à passer par des points fixes ω et ω'; ces points sont distincts; Γ^* admet la droite double $\omega\omega'$.

3e CAS : $s = 1$. Γ^* est un faisceau $\mathcal{F}$ (compté deux fois), formé par les droites assujetties à passer par un point fixe ω; Γ^* admet pour droite double toute droite de $\mathcal{F}$.

Dans les cas $s = 2$ et $s = 1$, le polynôme quadratique $G(u, v, h)$ est le produit de deux polynômes linéaires, éventuellement confondus,

$$G(u, v, h) = (X_1 u + Y_1 v + T_1 h)\ (X_2 u + Y_2 v + T_2 h).$$

Les points fixes ω et ω' des faisceaux de droites $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ont pour coordonnées (X_1, Y_1, T_1) et (X_2, Y_2, T_2).

227. *Conjugaison par rapport à une conique de $\mathcal{P}^*$.* — D'après le nº 221, nous avons :

1º THÉORÈME ET DÉFINITION. — **L'ensemble des droites conjuguées par rapport à une conique Γ^* de $\mathcal{P}^*$ d'une droite D_0 (qui n'est pas droite double de Γ^*) est un faisceau dont le point fixe, M_0, est dit pôle de D_0 par rapport à Γ^*.**

Les coordonnées (ponctuelles) de M_0 s'obtiennent à partir des coordonnées (tangentielles) de D_0 par

$$\mathcal{M}_0 = B\,\tilde{\mathcal{D}}_0 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{M}_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} G'_{u_0} \\ G'_{v_0} \\ G'_{h_0} \end{bmatrix}$$

2º **Propriétés des pôles.** — I. Deux droites sont conjuguées si, et seulement si, le pôle de l'une quelconque d'entre elles est sur l'autre; *le pôle de D_0 est sur D_1 si, et seulement si, le pôle de D_1 est sur D_0.*

En particulier, *le pôle d'une droite quelconque est situé sur toute droite double de Γ^*.*

II. *Le pôle de D_0 est sur D_0 si, et seulement si, D_0 est une droite de Γ^*.*

III. *Deux droites D_0 et D_1, qui ne sont pas droites doubles de Γ^*, admettent le même pôle si, et seulement si, leur point d'intersection est sur une droite double de Γ^*.*

IV. Si une droite D engendre un faisceau $\mathcal{F}$, dont le point fixe n'est pas sur une droite double de Γ^*, le pôle P de D décrit une droite fixe Δ et on passe de $D \in \mathcal{F}$ à $P \in \Delta$ par une application homographique.

3° **Étude du pôle M_0 d'une droite D_0 par rapport à une conique Γ^* dégénérée.** — I. Γ^* *est formée d'un faisceau double*, $\mathcal{F}$. Le pôle de $D_0 \notin \mathcal{F}$ est le point fixe ω de $\mathcal{F}$.

II. Γ^* *est formée de deux faisceaux distincts* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}'$, *de points fixes* ω *et* ω'. Le pôle d'une droite, autre que $\omega\omega'$, est un point de $\omega\omega'$; le pôle d'une droite simple qui passe par ω est le point ω lui-même.

4° **Pôle d'une droite par rapport à une conique propre.** — Si la conique Γ^* est propre, il n'existe pas de droite double. Toute droite D de $\mathcal{L}$ admet donc un pôle par rapport à Γ^* et inversement tout point M est le pôle d'une, et d'une seule droite D; si la matrice unicolonne $\mathcal{M}$ représente M dans $\mathcal{R}$, D est représentée dans $\mathcal{R}^*$ par la matrice uniligne $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{M}} B^{-1}$.

5° **Point caractéristique.** — Définition. — *Le pôle d'une droite simple* D_0 *d'une conique* Γ^* *de* $\mathcal{L}^*$, *par rapport à cette conique, est dit point caractéristique de* D_0.

Avec les notations habituelles, ce point est représentée par la matrice unicolonne

$$\begin{bmatrix} G'_{u_0} \\ G'_{v_0} \\ G'_{h_0} \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad G(u_0, v_0, h_0) = 0.$$

6° **Intersection d'une conique Γ^* et d'un faisceau de droites $\mathcal{F}$.** — Nous utilisons ici le fait que le corps de base est celui des complexes.

Théorème. — *Toute conique* Γ^* *de* $\mathcal{L}^*$, *propre ou dégénérée, a deux droites communes, éventuellement confondus, avec tout faisceau de droites qui ne fait pas partie de* Γ^*.

On traduit cette propriété en disant que Γ^* est une *enveloppe de seconde classe.*

Théorème. — *Étant donnée une conique propre* Γ^* *de* $\mathcal{L}^*$, *il passe deux droites de* Γ^* *par tout point* M *de* $\mathcal{L}$; *ces droites sont confondues si, et seulement si,* M *est un point caractéristique de* Γ^*.

Théorème. — *Étant données une conique propre* Γ^* *de* $\mathcal{L}^*$ *et une droite* D_1 *n'appartenant pas à* Γ^*, *il existe deux droites de* Γ^* *dont les points caractéristiques appartiennent à* D_1; *ce sont les droites de* Γ^* *qui passent par le pôle* M_1 *de* D_1; *elles sont distinctes.*

7° **Intervention du birapport.** — Théorème. — *Étant donnée une conique* Γ^* *de* $\mathcal{L}^*$, *propre ou dégénérée, deux droites* D_0 *et* D_1, *dont l'une au moins n'appartient pas à* Γ^*, *sont conjuguées si, et seulement si, elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites de* Γ^* *qui passent par leur point d'intersection.*

228. ***Identification des coniques propres de $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^*$.*** — 1° THÉORÈME. — **A toute conique propre Γ de $\mathfrak{P}$ on peut associer biunivoquement une conique propre Γ^* de $\mathfrak{P}^*$ telle que Γ^* est l'ensemble des tangentes aux divers points de Γ, alors que Γ est l'ensemble des points caractéristiques des diverses droites de Γ^*.**

Pour démontrer cette proposition, nous utiliserons deux repères duaux, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$, arbitrairement choisis, de $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^*$.

a) Partons d'une conique propre Γ de $\mathfrak{P}$, représentée dans $\mathfrak{R}$ par la matrice régulière A.

Toute droite D est la polaire par rapport à Γ d'un point M et d'un seul (221, 4°), et, si $\mathfrak{D}$ est une matrice uniligne formée de coordonnées (tangentielles) de D, le point M admet pour coordonnées les éléments de la matrice unicolonne : $\mathcal{M} = A^{-1}\tilde{\mathfrak{D}}$.

La droite D est tangente à Γ si, et seulement si, elle contient le point M, c'est-à-dire si :

$$\mathfrak{D}A^{-1}\tilde{\mathfrak{D}} = [0]$$

ou encore si D est une droite de la conique propre de $\mathfrak{P}^*$ qui est représentée dans le repère $\mathfrak{R}^*$ par la matrice A^{-1}.

b) Partons d'une conique propre Γ^* de $\mathfrak{P}^*$, représentée dans $\mathfrak{R}^*$ par la matrice régulière B.

Tout point M est le pôle par rapport à Γ^* d'une droite D et d'une seule, et, si $\mathcal{M}$ est une matrice unicolonne formée de coordonnées de M, la droite D admet pour coordonnées (tangentielles) les éléments de la matrice uniligne :

$$\mathfrak{D} = \tilde{\mathcal{M}}B^{-1}.$$

Le point M est un point caractéristique de Γ^* si, et seulement si, il appartient à D, c'est-à-dire si :

$$\tilde{\mathcal{M}}B^{-1}\mathcal{M} = [0]$$

ou encore si M est un point de la conique propre de $\mathfrak{P}$ qui est représentée dans le repère $\mathfrak{R}$ par la matrice B^{-1}.

c) Nous venons de définir une bijection de l'ensemble des coniques propres de $\mathfrak{P}$ sur celui des coniques propres de $\mathfrak{P}^*$: à la conique Γ de $\mathfrak{P}$ qui est représentée dans $\mathfrak{R}$ par la matrice A est associée la conique Γ^* de $\mathfrak{P}^*$ qui est représentée dans $\mathfrak{R}^*$ par la matrice B inverse de A.

Cette bijection est indépendante du choix des repères duaux $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$: cela résulte de sa définition même et peut se retrouver par le calcul. En effet, considérons un second couple, $\mathfrak{R}'$ et $\mathfrak{R}'^*$, de repères duaux et soit P la matrice de passage de $\mathfrak{R}$ à $\mathfrak{R}'$, ce qui implique (7) que la matrice de passage de $\mathfrak{R}^*$ à $\mathfrak{R}'^*$ est P^{-1}.

Nous avons :

$$\mathcal{M} = P\mathcal{M}' \quad ; \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}'P^{-1}$$
$$\tilde{\mathcal{M}}A\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}'\tilde{P}AP\mathcal{M}'; \quad \mathfrak{D}B\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}'P^{-1}B(\tilde{P}^{-1})\tilde{\mathfrak{D}}'$$

Les coniques Γ et Γ* sont donc représentées, dans $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'^*$, par les matrices

$$A' = \tilde{P}AP \qquad B' = P^{-1}B(\widetilde{P^{-1}}),$$

telles que

$$A'B' = \tilde{P}(AB)(\tilde{P})^{-1} \quad \text{et} \quad AB = (\tilde{P})^{-1}(A'B')\tilde{P},$$

si bien que, I désignant la matrice unité d'ordre 3,

$$AB = I \iff A'B' = I.$$

2° Conséquence. — Étant données la conique Γ de $\mathfrak{L}$ et la conique Γ* de $\mathfrak{L}^*$ homologue de Γ dans la bijection étudiée au 1°, nous conviendrons de désigner dorénavant ces deux coniques par le même symbole, sous le vocable commun de *conique propre.* Nous parlerons des *points* et des *tangentes* (plutôt que des droites) d'une conique propre, celle-ci étant suivant le cas considérée comme ensemble de ses points (courbe du second ordre) ou de ses tangentes (enveloppe de seconde classe). Nous disposerons simultanément des notions de *points conjugués* et de *droites conjuguées*, de *polaire d'un point* et de *pôle d'une droite* par rapport à une conique propre.

Un couple de repères duaux de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ ayant été choisi, nous dirons qu'une conique propre admet une *matrice ponctuelle* (déterminée à un facteur près) et une *matrice tangentielle*, inverse de la précédente. Si Γ est une conique propre, associée à la matrice ponctuelle A et à la matrice tangentielle A^{-1}, les équations

$$\tilde{\mathcal{M}} A \mathcal{M} = [0] \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{D} A^{-1} \tilde{\mathfrak{D}} = [0]$$

sont dites respectivement *équation ponctuelle* de Γ, et *équation tangentielle* de Γ.

Exemple I. — La conique propre Γ d'équation ponctuelle $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} - T^2 = 0$, a pour équation tangentielle $Au^2 + Bv^2 - h^2 = 0$,

les matrices ponctuelle et tangentielle étant les matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont

$$\left\{ \frac{1}{A}, \frac{1}{B}, -1 \right\} \qquad \text{et} \qquad \{ A, B, -1 \}$$

Exemple II. — La conique Γ d'équation ponctuelle

$$Y^2 - 2pTX = 0 \qquad (p \neq 0)$$

a pour matrice ponctuelle la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

qui est régulière (son déterminant est $-p^2$) et admet la matrice inverse

$$\frac{1}{p}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & p & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Γ est donc la conique propre d'équation tangentielle

$$pv^2 - 2hu = 0.$$

3° **Compléments sur les pôles et polaires.** — THÉORÈME I. — **Une droite D est la polaire d'un point M par rapport à une conique propre Γ si, et seulement si, M est le pôle de D par rapport à Γ.**

En effet, compte-tenu de AB = I, les relations

$$\mathcal{M} = A^{-1}\tilde{\mathcal{D}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D} = \tilde{\mathcal{M}}B^{-1}$$

qui expriment respectivement que D est la polaire de M et que M est le pôle de D sont équivalentes.

THÉORÈME II. — **Si une droite D est la polaire d'un point M par rapport à une conique propre Γ**

a) **M est le point fixe du faisceau des polaires des points de D,**

b) **D est le lieu des pôles des droites qui passent par M.**

a) Nous avons montré (221, 2°, IV) que, quand le point P décrit la droite D, la polaire de P engendre un faisceau de droites; le point fixe de ce faisceau est conjugué de tout point de D par rapport à Γ; c'est nécessairement M.

b) Nous avons montré (227, 2°, IV) que, quand la droite L engendre le faisceau de point fixe M, le pôle de L décrit une droite; cette droite, dont tous les points sont conjugués de M, est nécessairement D.

4° **Triangle autopolaire.** — DÉFINITION. — **Étant donnée une conique propre Γ, tout triangle qui possède l'une des quatre propriétés suivantes :**

a) *les sommets du triangle sont deux à deux conjugués,*

b) *chaque sommet du triangle est le pôle du côté opposé,*

c) *chaque côté du triangle est la polaire du sommet opposé,*

d) *les côtés du triangle sont deux à deux conjugués*

est dit autopolaire par rapport à Γ.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les quatre propriétés sont deux à deux équivalentes.

229. ***La transformation par polaires réciproques.*** — 1° **Corrélation polaire déterminée par une conique propre.** — Soit $\mathcal{K}$ une conique propre du plan projectif $\mathcal{P}$ (et aussi du dual $\mathcal{P}^*$ de $\mathcal{P}$). Au point générique M de $\mathcal{P}$ nous associons la polaire D de M par rapport à $\mathcal{K}$ et nous posons D = *f*(M); nous définissons ainsi une application *f* de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}^*$ (considéré comme l'ensemble des droites de $\mathcal{P}$).

Cette application est bijective, toute droite pouvant être considérée comme l'image par *f* de son pôle par rapport à $\mathcal{K}$.

Rapportons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ aux repères duaux $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$. Si le point M est représenté par la matrice unicolonne $\mathcal{M}$, on peut adopter, pour représenter la droite D = *f*(M), la matrice uniligne : $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{M}}A$. On en déduit (96) que l'application *f* de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}^*$ est une corrélation. Nous dirons que *f* est la *corrélation polaire* par rapport à $\mathcal{K}$.

Cette corrélation f possède la propriété suivante : si M décrit la droite L la droite $D = f(M)$ pivote autour du point $N = f^{-1}(L)$. Nous allons montrer que cette propriété est caractéristique d'une corrélation polaire.

Soit c une corrélation de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}^*$, représentée dans les repères duaux $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ par

$$\tilde{\mathcal{D}} = C\mathcal{M} \iff \mathcal{D} = \tilde{\mathcal{M}}\tilde{C} \qquad \text{(cf. n° 96)}$$

relation dans laquelle C désigne une matrice régulière (3,3) à coefficients complexes.

Quand le point M décrit la droite L, représentée par la matrice $\mathcal{L}(1, 3)$, on a

$$\mathcal{L}\mathcal{M} = [0] \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{L}C^{-1}\tilde{\mathcal{D}} = [0],$$

ce qui prouve que la droite $D = c(M)$ pivote autour du point fixe N qui est représenté par la matrice $\mathcal{N}(3, 1)$ telle que : $\qquad \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{L}C^{-1}$.

La corrélation c possède la propriété envisagée ci-dessus si, et seulement si,

$$(1) \qquad \forall L, \quad N = f^{-1}(L) \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathcal{N}}\tilde{C} = k\mathcal{L},$$

k désignant un nombre complexe non nul.

Compte-tenu de $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{L}C^{-1}$, la relation (1) s'écrit

$$\forall \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}C^{-1}\tilde{C} = k\mathcal{L}$$

ce qui équivaut à : $\qquad C^{-1}\tilde{C} = kI \quad$ ou $\quad \tilde{C} = kC$.

La relation $\tilde{C} = kC$ s'écrivant aussi $C = k\tilde{C}$, il est nécessaire que $k^2 = 1$. La valeur $k = -1$ n'est pas à retenir, car elle conduirait à une matrice C (3, 3) antisymétrique et par suite, singulière.

Finalement la condition (1) s'écrit $\tilde{C} = C$, ce qui signifie que C est une matrice symétrique et que c est la corrélation polaire par rapport à la conique qui a C pour matrice ponctuelle dans le repère $\mathcal{R}$.

2° **Transformation par polaires réciproques.** — Étant donné un plan projectif $\mathcal{P}$, on appelle *élément de contact* l'ensemble d'un point M et d'une droite L qui contient M.

Nous avons vu que, f désignant la corrélation polaire par rapport à la conique propre $\mathcal{K}$,

$$\left.\begin{array}{l} M \in L \\ D = f(M) \\ N = f^{-1}(L) \end{array}\right\} \implies N \in D.$$

Autrement dit, la donnée de la conique propre $\mathcal{K}$ permet d'associer à tout élément de contact $\}M, L\{$ un second de contact $\}N, D\{$ ou encore de définir une application ϖ de l'ensemble F des éléments de contact de $\mathcal{P}$ dans lui-même. On constate

$$\}M, L\{ \overset{\varpi}{\longrightarrow} \}N, D\{ \iff \}N, D\{ \overset{\varpi}{\longrightarrow} \}M, L\{$$

L'application ϖ, qui est ainsi involutive, est appelée *transformation par polaires réciproques de conique directrice* $\mathcal{K}$ (cf. tome IV n° 87).

3° **Polaire réciproque d'une conique propre.** — Transformons par la corrélation polaire f, associée à la conique propre $\mathcal{K}$, la conique propre Γ considérée comme un ensemble de points.

Un repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{L}$ ayant été choisi, nous désignons par A et C des matrices ponctuelles de Γ et de $\mathcal{K}$. La droite D, de matrice uniligne $\mathcal{D}$, est la polaire par rapport à $\mathcal{K}$ du point M de matrice unicolonne $\mathcal{M} = C^{-1}\tilde{\mathcal{D}}$, et

$$M \in \Gamma \iff \tilde{\mathcal{M}} A \mathcal{M} = [0] \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{M} = C^{-1}\tilde{\mathcal{D}},$$

ce qui s'écrit, compte-tenu de ce que C^{-1} est une matrice symétrique,

$$\mathcal{D} C^{-1} A C^{-1} \tilde{\mathcal{D}} = [0].$$

L'image par f de l'ensemble des points de Γ est donc l'ensemble des tangentes de la conique propre $\bar{\Gamma}$ de matrice tangentielle $B^{-1} = C^{-1}AC^{-1}$ et, par suite, de matrice ponctuelle $B = CA^{-1}C$.

Nous constatons que $A = CB^{-1}C$, ce qui montre que l'ensemble des points de $\bar{\Gamma}$ est l'image par f^{-1} de l'ensemble des tangentes de Γ. Les deux coniques Γ et $\bar{\Gamma}$ jouent un rôle symétrique, chacune d'elles étant à la fois l'enveloppe des polaires des points de l'autre et le lieu des pôles des tangentes à l'autre, par rapport à $\mathcal{K}$.

En nous rapportant au 2°, nous constatons que la partie de F formée des éléments de contact de la forme

$$\{ \text{point de } \Gamma, \text{ tangente en ce point à } \Gamma \}$$

est transformée par ϖ en la partie de F formée des éléments de contact de la forme

$$\{ \text{point de } \bar{\Gamma}, \text{ tangente en ce point à } \bar{\Gamma} \}$$

C'est à ce titre que nous dirons que Γ et $\bar{\Gamma}$ sont polaires réciproques par rapport à $\mathcal{K}$.

V. REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES. GÉNÉRATIONS HOMOGRAPHIQUES

230. ***Équations de quelques coniques remarquables.*** — 1° Dans le plan projectif $\mathcal{L}$, nous considérons quatre points A_i, ($i = 1, 2, 3, 4$), trois à trois linéairement indépendants, ce qui signifie (**75**) que ces quatre points sont deux à deux distincts et que parmi eux ne figurent pas trois points alignés.

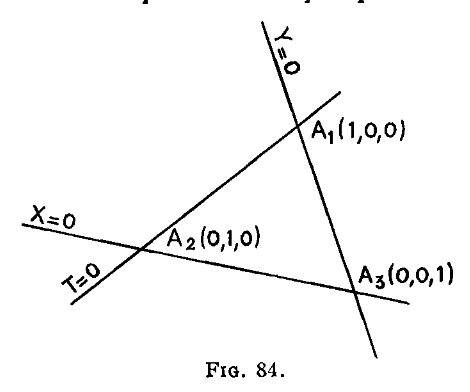


FIG. 84.

Nous allons étudier des coniques de $\mathcal{L}$, et de son dual $\mathcal{L}^*$, soumises à un certain nombre de conditions qui font intervenir le triangle $A_1A_2A_3$ et, éventuellement, le point A_4.

Nous rapporterons $\mathfrak{P}$ au repère $\mathfrak{R}$ formé par le triangle $A_1A_2A_3$ et par le point unitaire A_4. Nous rapporterons $\mathfrak{P}^*$ au repère $\mathfrak{R}^*$ dual de $\mathfrak{R}$, formé par le triangle $A_1A_2A_3$ et par une droite unitaire convenablement liée au point A_4 (**95**, 2°). La notation est telle que les droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 admettent respectivement pour équations $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$ (fig. 84).

Considérons la conique Γ de $\mathfrak{P}$ qui admet pour équation dans $\mathfrak{R}$ $F(X, Y, T) = 0$ avec $F(X, Y, T) = aX^2 + a'Y^2 + a''T^2 + 2bYT + 2b'TX + 2b''XY$, et la conique Γ^* de $\mathfrak{P}^*$ qui admet pour équation dans $\mathfrak{R}^*$

$$G(u, v, h) = 0 \quad \text{avec} \quad G(u, v, h) = \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' h^2 + 2\beta vh + 2\beta' hu + 2\beta'' uv.$$

Nous avons les équivalences logiques suivantes :

a) $A_1 \in \Gamma \iff F(1, 0, 0) = 0$ ou $a = 0$.
b) $A_2A_3 \in \Gamma^* \iff G(1, 0, 0) = 0$ ou $\alpha = 0$.
c) A_2 et A_3 conjugués par rapport à $\Gamma \iff b = 0$.
d) A_1A_3 et A_1A_2 conjuguées par rapport à $\Gamma^* \iff \beta = 0$.

Nous en déduisons les propositions suivantes :

a) L'équation générale des coniques de $\mathfrak{P}$ qui passent par A_1, A_2, A_3, est

$$bYT + b'TX + b''XY = 0.$$

b) L'équation générale des coniques de $\mathfrak{P}^*$ qui contiennent A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, est

$$\beta vh + \beta' hu + \beta'' uv = 0.$$

c) L'équation générale des coniques de $\mathfrak{P}$ qui admettent A_1, A_2, A_3 pour points deux à deux conjugués est

$$aX^2 + a'Y^2 + a''T^2 = 0.$$

d) L'équation générale des coniques de $\mathfrak{P}^*$ qui admettent A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 pour droites deux à deux conjuguées est

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' h^2 = 0.$$

2° **Problème.** — *Étant donnés quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4 *de* $\mathfrak{P}$, *deux à deux distincts, dont trois quelconques ne sont pas alignés, existe-t-il une conique de* $\mathfrak{P}$ *qui contient les points* A_1, A_3, A_4 *et admet les droites* A_1A_2 *et* A_3A_2 *pour tangentes aux points* A_1 *et* A_3?

Analyse. — Si une conique répond à la question elle fait partie de la famille des coniques qui passent par A_1, A_3 et admettent les couples de points conjugués (A_1, A_2), (A_3, A_2). Dans le repère $\mathfrak{R}$ défini au 1° (fig. 85) cette famille a pour équation générale

$$a'Y^2 + 2\,b'TX = 0.$$

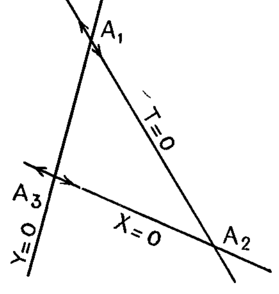


Fig. 85.

La conique considérée passant par A_4, on a nécessairement $a' + 2\,b' = 0$. Ainsi une seule conique peut répondre à la question, la conique Γ_0 qui admet pour équation dans le repère $\mathcal{R}$

$$a'(Y^2 - TX) = 0 \qquad \text{ou} \qquad Y^2 - TX = 0.$$

Synthèse. — Inversement cette conique Γ_0, qui est d'ailleurs une conique propre, vérifie toutes les conditions imposées par l'énoncé.

231. ***Représentations paramétriques ponctuelles d'une conique propre.*** — Soit Γ une conique propre, considérée ici comme un ensemble de points.

1° THÉORÈME. — **Il existe une bijection d'une conique propre Γ sur le faisceau de droites $\mathcal{F}$ dont le point fixe est un point P arbitrairement choisi de Γ.**

En effet toute droite D de $\mathcal{F}$ coupe Γ en P et en un second point, M, qui est confondu avec P dans le cas particulier où D est la tangente en P à Γ. Inversement nous pouvons associer à tout point M de Γ la droite PM si $M \neq P$ et la tangente en P à Γ si $M = P$; en désignant cette droite par $D = \varphi(M)$ nous définissons une bijection φ de Γ sur $\mathcal{F}$.

2° **Représentation paramétrique de** Γ. — Initialement $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère arbitrairement choisi $\mathcal{R}$. Considérons le repère auxiliaire $\mathcal{R}'$ obtenu de la façon suivante : P, P', P″ sont trois points arbitrairement choisis de Γ, Q est le point d'intersection des tangentes en P et P' à Γ, $\mathcal{R}'$ est formé du triangle de référence PQP' et du point unitaire P″ (fig. 86); les droites QP', PP' et QP ont respectivement pour équation

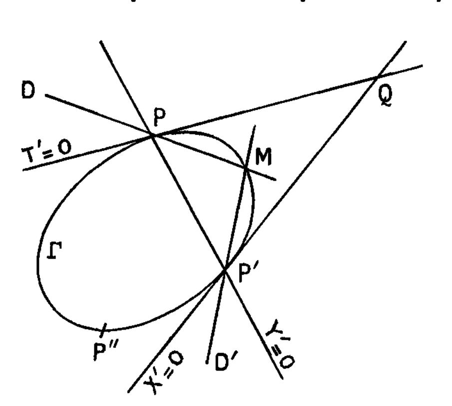


FIG. 86.

$$X' = 0, \; Y' = 0 \text{ et } T' = 0.$$

D'après le n° 230, 2°, Γ admet dans le repère $\mathcal{R}'$ l'équation : $Y'^2 - T'X' = 0$.

Si nous rapportons le faisceau $\mathcal{F}$, de point fixe P, aux droites de base PP' et PQ, d'équations $Y' = 0$ et $T' = 0$, la droite générique D de $\mathcal{F}$ admet pour équation dans $\mathcal{R}'$

$$\beta Y' - \alpha T' = 0.$$

L'élément t de $\tilde{C} = C + \{\infty\}$ dont un représentant est (α, β) est l'*abscisse projective* de D dans le faisceau $\mathcal{F}$ ainsi repéré.

La droite D coupe Γ en P et en un second point M dont tout système de coordonnées dans $\mathcal{R}'$ vérifie

$$\frac{X'}{\alpha^2} = \frac{Y'}{\alpha\beta} = \frac{T'}{\beta^2},$$

l'homogénéité des coordonnées permettant de s'en tenir à

$$(1) \quad \begin{cases} X' = \alpha^2 \\ Y' = \alpha\beta \\ T' = \beta^2 \end{cases}$$

Cela posé, les formules de changement de coordonnées s'écrivent

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ T \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{bmatrix}; \qquad \Omega = \begin{bmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{bmatrix}$$

désigne la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$; nous pouvons donc adopter, pour coordonnées du point générique M de Γ dans la base initiale $\mathcal{R}$,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ T \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha\beta \\ \beta^2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X = A\alpha^2 + A'\alpha\beta + A''\beta^2 \\ Y = B\alpha^2 + B'\alpha\beta + B''\beta^2 \\ T = C\alpha^2 + C'\alpha\beta + C''\beta^2 \end{cases} \quad (2)$$

Les formules (1) et (2) traduisent analytiquement la bijection φ étudiée au 1°; l'abcisse projective t de la droite PM du faisceau $\mathcal{F}$ est appelée *paramètre* du point M de la conique Γ.

Remarque. — Le paramètre de $P \in \Gamma$ est $\infty \in \tilde{C}$. Il en résulte que l'ensemble $\Gamma - \{P\}$ est représenté, dans $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$, par

$$(1') \quad \begin{cases} X' = t^2 \\ Y' = t \\ T' = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X = At^2 + A't + A'' \\ Y = Bt^2 + B't + B'' \\ T = Ct^2 + C't + C'' \end{cases} \quad (2')$$

Réciproque. — Dans le plan projectif $\mathcal{L}$, rapporté au repère $\mathcal{R}$, étudions l'ensemble Γ' des points M dont un système de coordonnées est donné par les formules (2) dans lesquelles les coefficients de α^2, $\alpha\beta$, β^2 déterminent une matrice *régulière* Ω.

Ω permet de déterminer à partir de $\mathcal{R}$ un second repère $\mathcal{R}'$, dans lequel M admet les coordonnées données par les formules (1); on constate que ces coordonnées sont liées par la relation $Y'^2 = T'X'$; Γ' fait donc partie de la conique propre Γ de $\mathcal{L}$ qui admet, dans le repère $\mathcal{R}'$ l'équation $Y'^2 - T'X' = 0$, (cf. **230**, 2°). L'étude directe nous apprend que tout point de Γ admet des coordonnées de la forme (1) et fait partie de Γ'. Par suite $\Gamma' = \Gamma$.

Nous pouvons dire que les formules (1) représentent une conique propre.

3° Comparaison de deux représentations paramétriques d'une même conique propre. — Théorème I. — **Les droites D et D' qui joignent deux points fixes P et P' d'une conique propre Γ au point générique M de Γ sont homologues dans une application homographique du faisceau $\mathcal{F}$ de point fixe P sur le faisceau $\mathcal{F}'$ de point fixe P'.**

En effet nous savons définir (cf. 1°) deux bijections φ et φ' de Γ respectivement sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$; il en résulte que $h = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ est une bijection de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$, dans laquelle $P'M = h\,(PM)$, les tangentes en P et P' à Γ étant respectivement $h^{-1}(P'P)$ et $h\,(PP')$.

Montrons que l'application h est homographique. En utilisant le repère auxiliaire $\mathcal{R}'$ défini au début du 2° nous constatons qu'à la droite générique D de $\mathcal{F}$, d'équation $\beta Y' - \alpha T' = 0$, la bijection φ^{-1} associe le point M de Γ dont un système de coordonnées homogènes est

$$X' = \alpha^2, \qquad Y' = \alpha\beta, \qquad T' = \beta^2,$$

et qu'à ce point M, la bijection φ' associe la droite D' de $\mathcal{F}'$ dont une équation est $\beta X' - \alpha Y' = 0$. Autrement dit les deux droites D et $D' = h(D)$ admettent les mêmes abscisses projectives dans les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ respectivement rapportés aux droites $Y' = 0$, $T' = 0$ et $X' = 0$, $Y' = 0$. La proposition en résulte.

Remarquons que, si nous revenons à un repère $\mathcal{R}$ quelconque et si nous choisissons arbitrairement les droites de base de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, les abscisses projectives des droites D et $h(D)$, sans être égales, sont liées homographiquement. On en déduit :

THÉORÈME II. — **Les paramètres associés au point générique d'une conique propre dans deux représentations paramétriques ponctuelles se correspondent homographiquement.**

4° **Birapport de quatre points d'une conique propre.** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Le birapport des quatre droites joignent un point P d'une conique propre Γ à quatre points donnés A_i de Γ, ($i = 1, 2, 3, 4$), est indépendant du choix de P; on l'appelle birapport des quatre points A_i de Γ.**

Nous convenons, naturellement, que, si $P = A_i$, la droite PA_i est la tangente en A_i à Γ. Cela posé, nous savons, d'après le 3°, que, P et P' désignant deux points quelconques de Γ, les quatre couples $(PA_i, P'A_i)$ sont chacun formé de deux droites homologues dans une application homographique du faisceau de point fixe P sur le faisceau de point fixe P'; d'où l'égalité des birapports

$$(PA_1, PA_2, PA_3, PA_4) = (P'A_1, P'A_2, P'A_3, P'A_4).$$

La proposition en résulte.

REMARQUE. — Le birapport des quatre droites PA_i est celui de leurs abscisses projectives dans une représentation quelconque du faisceau de droites de point fixe P. Autrement dit, *le birapport de quatre points d'une conique propre est égal au birapport des quatre valeurs correspondantes du paramètre;* l'indifférence du choix du paramètre résulte du théorème II du 3°.

5° **Intersection d'une conique propre et d'une droite. Équation tangentielle.** — Soit Γ une conique propre et D une droite du plan projectif $\mathfrak{L}$. Dans le repère $\mathcal{R}'$ défini au 2°, Γ et D ont respectivement pour équation

$$Y'^2 - T'X' = 0 \qquad \text{et} \qquad u'X' + v'Y' + h'T' = 0,$$

et Γ admet la représentation paramétrique

$$(1) \qquad X' = \alpha^2, \qquad Y' = \alpha\beta, \qquad T' = \beta^2.$$

Les paramètres, t = classe (α, β), des points d'intersection de Γ et de D sont les éléments de $\tilde{C}$ qui vérifient l'équation du second degré

$$u'\alpha^2 + v'\alpha\beta + h'\beta^2 = 0.$$

Γ et D ont donc deux points communs qui sont distincts, sauf si

$$(3) \qquad v'^2 - 4\,h'u' = 0$$

c'est-à-dire si D est tangente à Γ (d'après l'exemple II du n° 228, (3) est en effet l'équation tangentielle de Γ). Nous retrouvons ainsi un résultat mis en évidence au n° 223.

Si nous nous plaçons, cette fois, dans un repère quelconque $\mathcal{R}$, D a pour équation

$$uX + vY + hT = 0$$

et Γ a pour représentation paramétrique

$$(2) \qquad \begin{cases} X = A\alpha^2 + A'\alpha\beta + A''\beta^2 \\ Y = B\alpha^2 + B'\alpha\beta + B''\beta^2 \\ T = C\alpha^2 + C'\alpha\beta + C''\beta^2. \end{cases}$$

L'équation aux paramètres des points d'intersection de Γ et de D est

$$(Au + Bv + Ch)\alpha^2 + (A'u + B'v + C'h)\alpha\beta + (A''u + B''v + C''h)\beta^2 = 0.$$

En écrivant que cette équation admet une racine double, on obtient l'équation tangentielle de Γ dans le repère $\mathcal{R}$:

$$(A'u + B'v + C'h)^2 - 4\,(A''u + B''v + C''h)\,(Au + Bv + Ch) = 0.$$

232. ***Générations homographiques ponctuelles d'une conique propre.*** — 1° Nous nous proposons d'étudier la réciproque du théorème I du n° 231, 3°. Auparavant adjoignons à ce théorème I la proposition suivante :

THÉORÈME. — **Les droites D et D' qui joignent deux points fixes P et P' au point générique M d'une droite fixe Δ, qui ne passe ni par P ni par P', sont homologues dans une application homographique du faisceau $\mathcal{F}$ de point fixe P sur le faisceau $\mathcal{F}'$ de point fixe P'.**

En effet la correspondance entre D et D′ est visiblement bijective; d'autre part elle conserve le birapport. En effet, si on considère quatre droites D_i de $\mathcal{F}$, ($i = 1, 2, 3, 4$), et si on pose

$$M_i = D_i \cap \Delta; \qquad D'_i = \text{droite}\,(P'M'_i),$$

on a
$$(D_1, D_2, D_3, D_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4) = (D'_1, D'_2, D'_3, D'_4).$$

La proposition en résulte.

2° <u>Théorème réciproque.</u> — **Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux faisceaux de droites, de points fixes distincts P et P′, et h une application homographique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$, qui transforme la droite générique D de $\mathcal{F}$ en la droite $D' = h(D)$ de $\mathcal{F}'$. Soit L le lieu engendré, quand D décrit $\mathcal{F}$, par l'intersection de D et D′.**

I. *Si h transforme en elle-même la droite* PP′, L **est une conique dégénérée, formée de deux droites dont l'une est PP′.**

II. *Si h ne transforme pas en elle-même la droite* PP′, L **est une conique propre, qui passe par P et P′ et admet pour tangentes en ces points les droites $h^{-1}(P'P)$ et $h(PP')$.**

Première hypothèse. — h transforme la droite PP′ *de $\mathcal{F}$ en la droite* P′P *de $\mathcal{F}'$.* — La droite PP′ fait partie du lieu L. Cela posé, considérons (fig. 87) deux droites distinctes D_1 et D_2 de $\mathcal{F}$, dont aucune n'est confondue avec PP′. Les droites homologues $D'_1 = h(D_1)$ et $D'_2 = h(D_2)$ sont distinctes et aucune d'elles n'est confondue avec PP′, car h est une bijection. Les points $M_1 = D_1 \cap D'_1$ et $M_2 = D_2 \cap D'_2$, qui sont distincts, déterminent une droite Δ qui ne passe ni par P ni par P′. Soit k l'application homographique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$ obtenue (cf. théorème du 1°) en joignant le point générique de Δ à P et à P′.

Les applications homographiques h et k admettent les trois couples communs de droites homologues :

$\mathcal{F}$	PP′	D_1	D_2
$\mathcal{F}'$	P′P	D'_1	D'_2

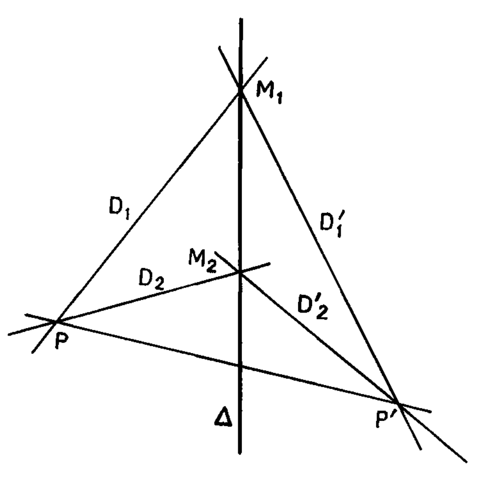


Fig. 87.

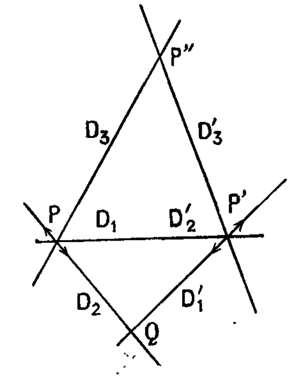


Fig. 88.

On en déduit (**85**) qu'elles coïncident et que le lieu L est la réunion de la droite PP' et de la droite Δ. Nous pouvons considérer L comme une conique dégénérée.

Deuxième hypothèse. — h transforme la droite PP' *de* $\mathcal{F}$ *en une droite de* $\mathcal{F}'$ *distincte de* PP'. Nous pouvons déterminer h par trois droites distinctes D_1, D_2, D_3 de $\mathcal{F}$ et par leurs homologues D'_1, D'_2, D'_3 en faisant en sorte que D_1 et D'_2 coïncident avec la droite PP', ce qui revient à désigner par D'_1 et D_2 les droites $h(PP')$ et $h^{-1}(P'P)$. Posons en outre (fig. 88)

$$Q = D_2 \cap D'_1, \qquad P'' = D_3 \cap D'_3.$$

Nous savons (**230**, 2°) qu'il existe une conique propre Γ qui passe par P, P', P″ et qui admet pour tangentes en P et P' les droites $PQ = D_2$ et $P'Q = D'_1$. Soit k l'application homographique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$ obtenue (cf. théorème I du n° **231**, 3°) en joignant le point générique de Γ à P et P'.

Nous constatons que k admet pour couples de droites homologues les trois couples qui ont servi à déterminer h :

$\mathcal{F}$	$D_1 = PP'$	D_2	D_3
$\mathcal{F}'$	D'_1	$D'_2 = P'P$	D'_3

Il en résulte que h et k coïncident et que le lieu L n'est autre que la conique Γ. La proposition est ainsi démontrée.

3° <u>Théorème.</u> — **Soient** $A_i, (i = 1, \ldots, 5)$, **cinq points donnés d'un plan projectif** $\mathcal{L}$, **deux à deux distincts et trois à trois non alignés. Il existe une, et une seule, conique de** $\mathcal{L}$ **qui contient les cinq points; elle est propre.**

Remarquons d'abord que si une conique dégénérée contenait les cinq points A_i, l'une des droites composant la conique contiendrait trois des points, au moins; cela est impossible; il n'existe donc pas de conique dégénérée contenant les cinq points A_i.

Analyse. — Supposons qu'il existe une conique propre Γ qui contient les cinq points. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ les faisceaux de droites de points fixes A_4 et A_5, soit h l'application homographique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$ obtenue en joignant A_4 et A_5 au point générique de Γ; h admet les trois couples de droites homologues :

(1)

$\mathcal{F}$	A_4A_1	A_4A_2	A_4A_3
$\mathcal{F}'$	A_5A_1	A_5A_2	A_5A_3

Synthèse. — Inversement, trois des points A_i étant linéairement indépendants par hypothèse, les triplets $\{A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3\}$ et $\{A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3\}$ sont, l'un et l'autre, formés de trois droites deux à deux distinctes. Il en résulte qu'il existe une, et une seule, application homographique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$ qui admet les trois couples (1) de droites homologues; désignons cette application par k. Soit L la conique propre qui est engendrée par le point commun aux droites D et $D' = k(D)$, quand D parcourt $\mathcal{F}$; L contient les cinq points A_i et, d'après l'analyse, elle est la seule conique propre à contenir ces points.

La proposition est ainsi démontrée.

233. *Représentations paramétriques tangentielles d'une conique propre.* — Une conique propre est ici considérée comme un ensemble, Γ, de droites. A partir de l'étude faite au nº 231, en utilisant la bijection δ de l'ensemble des droites de $\mathfrak{L}$ sur le dual $\mathfrak{L}^*$ (bijection qui transforme Γ en une conique propre du plan projectif $\mathfrak{L}^*$), nous obtenons les résultats suivants :

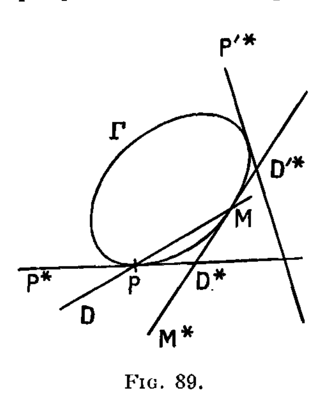


Fig. 89.

Théorème. — *Il existe une bijection d'une conique propre* Γ *sur l'une de ses tangentes* P*, *arbitrairement choisie.*

A la tangente générique M* de Γ, cette bijection associe son point d'intersection avec P* ou son point de contact avec Γ, selon que $M^* \neq P^*$ ou $M^* = P^*$ (fig. 89).

Théorème. — *Un ensemble* Γ *de droites est une conique propre si, et seulement si, les coordonnées tangentielles de la droite générique* M* *de* Γ, *dans un repère arbitrairement choisi, peuvent s'écrire*

$$[u\ v\ h] = [\alpha^2\ \alpha\beta\ \beta^2].\,\omega,$$

ω *désignant une matrice régulière d'ordre 3.*

L'élément t de $\tilde{C}$ représenté par le couple homogène (α, β) est dit paramètre associé à la tangente M* de Γ. C'est l'abscisse projective du point d'intersection de la droite M* et d'une tangente fixe P* de Γ, convenablement choisie et convenablement repérée.

Théorème. — *Les points d'intersection* D*, D'* *de deux tangentes fixes* P*, P'* *d'une conique propre* Γ *et de la tangente générique* M* *se correspondent dans une application homographique de la droite* P* *sur la droite* P'*.

Les paramètres associés à la tangente générique d'une conique propre dans deux représentations paramétriques tangentielles se correspondent homographiquement.

Théorème et définition. — *Le birapport des quatre points d'intersection d'une tangente* P* *d'une conique propre* Γ *et de quatre tangentes données* A_i^* *de* Γ, ($i = 1, 2, 3, 4$), *est indépendant du choix de* P*; *on l'appelle birapport des quatre tangentes* A_i^* *de* Γ.

Liaison homographique entre les représentations ponctuelle et tangentielle d'une conique propre. — Les théorèmes précédents font intervenir une conique propre donnée Γ. Nous aurions pu les démontrer en utilisant la transformation par polaires réciproques de conique directrice Γ. Celle-ci associe aux points P et M de Γ les tangentes P* et M* dont les points de contact sont P et M et à la droite D = PM le point $D^* = P^* \cap M^*$, pôle de D par rapport à Γ (fig. 89).

Lorsque P, et par suite P^*, est fixé, on passe de D à D^* par une application homographique du faisceau $\mathcal{F}$ de point fixe P sur la droite projective P^*. Autrement dit les abscisses projectives de $D \in \mathcal{F}$ et de $D^* \in P^*$ sont liées homographiquement. On en déduit que *les paramètres respectivement associés au point générique de* Γ *et à la tangente en ce point dans deux représentations paramétriques, l'une ponctuelle, l'autre tangentielle sont liés homographiquement.*

D'autre part les quatre droites joignant le point P de Γ aux points fixes A_i de Γ, ($i = 1, 2, 3, 4$) sont les polaires des points d'intersection de la tangente P^* et des tangentes fixes A_i^*. D'après la conservation du birapport, *le birapport de quatre points* A_i *de* Γ *est égal à celui des quatre tangentes aux points* A_i.

234. ***Générations homographiques tangentielles d'une conique propre.*** — A partir de l'étude faite au nº 232, nous obtenons, par utilisation de la bijection δ, les résultats suivants :

Théorème. — *Les points d'intersection* D^* *et* D'^* *de deux droites fixes* P^* *et* P'^* *et de la droite générique* M^* *d'un faisceau, dont le point fixe n'appartient ni à* P^* *ni à* P'^*, *sont homologues dans une application homographique de* P^* *sur* P'^*.

Théorème. — *Soient* P^* *et* P'^* *deux droites fixes distinctes et h une application homographique de* P^* *sur* P'^*, *qui transforme le point générique* D^* *de* P^* *en le point* $D'^* = h(D^*)$ *de* P'^*. *Soit* L^* *l'ensemble engendré, quand* D^* *décrit* P^*, *par l'intersection des faisceaux de droites de sommets* D^* *et* D'^*.

I. *Si h transforme en lui-même le point* $P^* \cap P'^*$, L^* *est une conique de* $\mathfrak{L}^*$ *dégénérée en deux faisceaux de droites dont l'un a pour point de base* $P^* \cap P'^*$.

II. *Si h ne transforme pas en lui-même le point* $P^* \cap P'^*$, L^* *est une conique propre tangente à* P^* *et à* P'^*, *les points de contact étant respectivement* $h^{-1}(P'^* \cap P^*)$ *et* $h(P^* \cap P'^*)$.

Théorème. — *Soient* A_i^*, ($i = 1, \ldots, 5$), *cinq droites données d'un plan projectif* $\mathfrak{L}$, *deux à deux distinctes, trois à trois non concourantes. Il existe une, et une seule, conique de* $\mathfrak{L}^*$ *qui contient les cinq droites. Elle est propre.*

VI. ÉTUDE PROJECTIVE DES FAISCEAUX DE CONIQUES

235. ***Notion de faisceau de coniques.*** — 1° **Notations.** — Soit $\mathfrak{L}$ un plan projectif, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, de dimension 3, sur le corps des complexes. Nous avons montré (I, 5°) que l'ensemble des formes quadratiques sur $\vec{E}$, qui sera désigné ici par $\vec{\mathcal{E}}$, peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des complexes. Soit $\mathfrak{Q}$ l'espace projectif qui est issu de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$.

Nous allons passer de la notion de faisceau de droites dans le plan projectif $\mathcal{L}$, introduite au nº 94, à celle de faisceau de coniques dans le plan projectif $\mathcal{L}$, en faisant jouer aux espaces $\vec{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{Q}$ les rôles précédemment dévolus aux espaces $\vec{E}^*$ et $\mathcal{L}^*$.

2º **Bijection sur $\mathcal{Q}$ de l'ensemble des coniques de $\mathcal{L}$.** — A la conique Γ du plan $\mathcal{L}$, qui est associée à la forme quadratique non nulle Φ (et aussi aux formes $k\,\Phi$, $k \in C^\bullet$), associons l'élément de $\mathcal{Q}$ dont un représentant homogène dans $\vec{\mathcal{E}}$ est la forme quadratique Φ; désignons cet élément de $\mathcal{Q}$ par $\varpi(\Gamma)$. *Nous définissons ainsi une application ϖ, visiblement bijective, de l'ensemble des coniques de $\mathcal{L}$ sur l'espace projectif $\mathcal{Q}$.*

3º <u>Définition.</u> — **On appelle faisceau linéaire [1] de coniques toute famille de coniques de $\mathcal{L}$ dont l'image par la bijection ϖ est une variété linéaire projective de dimension 1 de $\mathcal{Q}$**

Une variété linéaire projective de dimension 1 étant déterminée par la donnée de deux de ses éléments distincts, arbitrairement choisis, il en est de même pour un faisceau de coniques.

Autrement dit si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux coniques distinctes, arbitrairement choisies, d'un faisceau $\mathcal{F}$, et si $\Sigma(\vec{M}) = 0$ et $\Theta(\vec{M}) = 0$ sont des équations arbitrairement choisies de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$, on peut considérer $\mathcal{F}$ comme l'ensemble des coniques que peut représenter l'équation

$$\alpha\,\Sigma(\vec{M}) + \beta\,\Theta(\vec{M}) = 0, \qquad \text{classe } (\alpha, \beta) \in \tilde{C}.$$

On dit que l'élément de C représenté par (α, β) est l'*abscisse projective* de la conique générique de $\mathcal{F}$, quand on rapporte le faisceau aux *coniques de base* $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ et quand on adopte pour ces coniques les équations $\Sigma(\vec{M}) = 0$ et $\Theta(\vec{M}) = 0$.

Quand on change soit de coniques de base, soit d'équations pour ces coniques, l'abscisse projective est transformée par une application homographique de $\tilde{C}$ sur lui-même, ce qui conserve le birapport. On peut donc poser :

Définition. — *On appelle birapport de quatre coniques d'un faisceau le birapport de leurs abscisses projectives.*

Remarque : $\mathcal{F} - \{\mathcal{S}\}$ est l'ensemble des coniques Γ_α d'équations

$$\alpha\,\Sigma(\vec{M}) + \Theta(\vec{M}) = 0, \qquad \alpha \in C.$$

(1) En abrégé, nous dirons *faisceau de coniques.*

4° **Points fixes.** — Soient deux coniques distinctes du faisceau $\mathcal{F}$, dont les abscisses projectives sont représentées par (α, β) et (α', β'). Les points d'intersection de ces deux coniques sont les points de $\mathcal{L}$ représentés par les vecteurs $\vec{M}$ qui vérifient le système

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha\ \Sigma(\vec{M}) + \beta\ \Theta(\vec{M}) = 0 \\ \alpha'\ \Sigma(\vec{M}) + \beta'\ \Theta(\vec{M}) = 0. \end{cases}$$

Étant donné que $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$, ce qui résulte du fait que les deux coniques sont distinctes, le système (1) est équivalent au système

$$(2) \qquad \begin{cases} \Sigma(\vec{M}) = 0 \\ \Theta(\vec{M}) = 0. \end{cases}$$

Autrement dit, les points d'intersection de deux coniques du faisceau, quelconques mais distinctes, sont les points d'intersection des deux coniques de base; on les appelle *points fixes* du faisceau.

Soit A un point de $\mathcal{L}$ qui n'est pas point fixe du faisceau de coniques $\mathcal{F}$. On démontre, en raisonnant comme dans le cas d'un faisceau d'hyperplans 94, 4°, qu'il existe une, et une seule conique de $\mathcal{F}$ qui passe par A. Son équation est

$$\Theta(\vec{A}).\Sigma(\vec{M}) - \Sigma(\vec{A}).\Theta(\vec{M}) = 0.$$

236. ***Coniques dégénérées d'un faisceau.*** — Dans toute la suite, nous exceptons en général le cas d'un faisceau dont toutes les coniques sont dégénérées.

Considérons donc un faisceau $\mathcal{F}$ qui contient au moins une conique propre $\mathcal{G}$. Nous pouvons choisir comme coniques de base $\mathcal{G}$ et une seconde conique du faisceau, $\mathcal{C}$, propre ou dégénérée.

Rappelons que le discriminant de la forme quadratique Φ, que nous désignerons symboliquement par dét $[\Phi]$, est le déterminant de la matrice qui représente Φ dans une base de $\vec{E}$ (dans un changement de base, ce déterminant est multiplié par un facteur non nul).

Un repère de $\mathcal{L}$ ayant été arbitrairement choisi, les coniques $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ admettent des équations de la forme $\Sigma(\vec{M}) = 0$, $\Theta(\vec{M}) = 0$ avec

$$\Sigma(\vec{M}) = F(X, Y, T) = aX^2 + a'Y^2 + a''T^2 + 2\,bYT + 2\,b'TX + 2\,b''XY$$
$$\Theta(\vec{M}) = G(X, Y, T) = a_1X^2 + a_1'Y^2 + a_1''T^2 + 2\,b_1YT + 2\,b_1'TX + 2\,b_1''XY$$

La conique générique, Γ_α, de $\mathcal{F} - \{\mathcal{G}\}$ a pour équation

$$\alpha\,\Sigma(\vec{M}) + \Theta(\vec{M}) = 0.$$

On peut adopter comme discriminant de la forme quadratique $\alpha\Sigma + \Theta$ le déterminant

$$\text{dét}\,[\alpha\Sigma + \Theta] = \begin{vmatrix} \alpha a + a_1 & \alpha b'' + b_1'' & \alpha b' + b_1' \\ \alpha b'' + b_1'' & \alpha a' + a_1' & \alpha b + b_1 \\ \alpha b' + b_1' & \alpha b + b_1 & \alpha a'' + a_1'' \end{vmatrix}$$

Après avoir scindé chacune de ses colonnes, nous pouvons écrire ce discriminant sous la forme d'un polynôme en α

$$\Pi(\alpha) = \alpha^3\text{dét}\,[\Sigma] + \ldots + \text{dét}\,[\Theta]$$

$\mathcal{S}$ étant propre, nous dét $[\Sigma] \neq 0$; le polynôme $\Pi(\alpha)$ est du troisième degré.

Or la conique Γ_α est dégénérée si, et seulement si, son discriminant est nul. Il en résulte que la famille $\mathcal{F} - \{\mathcal{S}\}$, et aussi le faisceau $\mathcal{F}$, admet trois coniques dégénérées, distinctes ou confondues et — si l'on s'en tient aux coniques distinctes — au moins une conique dégénérée.

Remarque. — S'il existe un zéro, α_0, du polynôme $\Pi(\alpha)$ auquel correspond une conique dégénérée Γ_{α_0} formée par une droite double, la forme quadratique $\alpha_0\Sigma + \Theta$ est de rang 1; tous les mineurs d'ordre 2 de dét $[\alpha_0\Sigma + \Theta]$ sont nuls; α_0 est zéro non seulement de $\Pi(\alpha)$, mais aussi du polynôme dérivé $\Pi'(\alpha)$, autrement dit α_0 est un zéro double de $\Pi(\alpha)$.

La réciproque de cette propriété n'est pas vraie : à un zéro double de $\Pi(\alpha)$ ne correspond pas nécessairement une conique dégénérée formée par une droite double.

237. ***Intersection de deux coniques.*** — 1° Théorème. — **Deux coniques, dont une au moins est propre, se coupent en quatre points, distincts ou confondus.**

Soit $\mathcal{S}$ une conique propre, d'équation $\Sigma(\vec{M}) = 0$, et $\mathcal{T}$ une conique, propre ou dégénérée, d'équation $\Theta(\vec{M}) = 0$. Dans le faisceau de coniques déterminé par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$, il existe au moins une conique dégénérée, $\mathcal{C}$, qui admet une équation de la forme $f(\vec{M}).g(\vec{M}) = 0$, dans laquelle f et g désignent deux formes linéaires, distinctes ou confondues.

a) D'après le n° 235, 4°, les points d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont les points de $\mathcal{P}$ représentés par les vecteurs $\vec{M}$ qui vérifient le système

$$(1) \qquad \begin{cases} \Sigma(\vec{M}) = 0 \\ f(\vec{M}).g(\vec{M}) = 0, \end{cases}$$

ou encore l'un ou l'autre des systèmes

$$\begin{cases} \Sigma(\vec{M}) = 0 \\ f(\vec{M}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma(\vec{M}) = 0 \\ g(\vec{M}) = 0 \end{cases}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$ sont donc ceux de $\mathcal{S}$ et de chacune des droites qui composent $\mathcal{C}$. Or nous avons montré de deux façons, en utilisant d'abord une représentation paramétrique de la droite (223, 2°), puis une représentation paramétrique de la conique (231, 5°), qu'une droite coupe une conique propre en deux points (qui sont confondus si, et seulement si, la droite est tangente à la conique). La proposition en résulte.

b) Étude analytique. — Rapportons le plan projectif au repère $\mathfrak{R}$ obtenu de la façon suivante : P, P′, P″ sont trois points arbitrairement choisis de la conique propre $\mathcal{S}$ (sous réserve que P n'appartienne pas à la conique $\mathcal{T}$), Q est le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{S}$ en P et P′; $\mathfrak{R}$ est formé par le triangle de référence PQP′ et le point unitaire P″; les droites QP′, PP′ et PQ ont respectivement pour équation $X = 0$, $Y = 0$ et $T = 0$ (fig. 90).

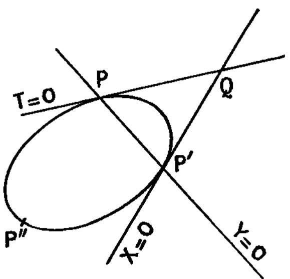


Fig. 90.

La conique $\mathcal{T}$ a pour équation

$$G(X, Y, T) = 0, \quad \text{avec} \quad G(1, 0, 0) \neq 0$$

qui traduit $\qquad P \notin \mathcal{T}$.

Le point générique de $\mathcal{S} - \{P\}$ peut être représenté (231, 2°) par

$$X = t^2, \qquad Y = t, \qquad T = 1,$$

t désignant un paramètre qui parcourt le corps des complexes.

L'équation « aux t » des points d'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$ — et, plus généralement, de $\mathcal{S}$ et de toute conique du faisceau déterminé par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ — s'écrit

$$(2) \qquad\qquad G(t^2, t, 1) = 0.$$

L'équation (2) — qui n'est qu'une écriture commode du système (1) — fournit les quatre points d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$, chacun avec son ordre de multiplicité; le fait que $G(t^2, t, 1)$, considéré comme un polynôme en t, est strictement de degré 4 résulte de $G(1, 0, 0) \neq 0$.

2° **Interprétation des racines multiples.** — *a) Cas d'une conique propre $\mathcal{S}$ et d'une conique $\mathcal{C}$ dégénérée en deux droites, Δ et Δ'.* Soient A un point de $\mathcal{S}$ et τ la tangente à $\mathcal{S}$ en ce point. Deux des points d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont confondus en A si, et seulement si, on est dans l'un des trois cas suivants :

$$\Delta = \tau, \quad A \notin \Delta'; \quad \Delta' = \tau, \quad A \notin \Delta; \quad A \in \Delta, \quad A \in \Delta', \quad \Delta \neq \tau, \quad \Delta' \neq \tau.$$

Trois des quatre points d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont confondus avec A si, et seulement si,

$$\Delta = \tau, \ A \in \Delta', \ \Delta' \neq \tau \quad \text{ou} \quad \Delta' = \tau, \ A \in \Delta, \ \Delta \neq \tau.$$

Les quatre points d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont confondus avec A, et seulement si,

$$\Delta = \tau, \qquad \Delta' = \tau.$$

b) Cas de deux coniques propres. — THÉORÈME. — **Deux, au moins, des quatre points d'intersection de deux coniques propres $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ sont confondus avec A si, et seulement si, les deux coniques ont une tangente commune en A.**

Nous reprenons les notations du 1°, *b)* en supposant en outre que nous avons choisi pour point P′ du repère $\mathcal{R}$ un point A commun à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$.

Explicitons le premier membre de l'équation de $\mathcal{C}$:

$$G(X, Y, T) = a_1X^2 + a_1'Y^2 + a_1''T^2 + 2\,b_1YT + 2\,b_1'TX + 2\,b_1''XY,$$

avec :
$$P' \in \mathcal{C} \iff a_1'' = 0.$$

L'équation « aux t » des points d'intersection de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ s'écrit

$$(2) \qquad a_1t^4 + 2\,b_1''t^3 + (a_1' + 2\,b_1')\,t^2 + 2\,b_1t = 0$$

Deux, au moins, des quatre points d'intersection sont confondus avec P′ si, et seulement si, l'équation (2) admet 0 pour racine double, c'est-à-dire si $b_1 = 0$. Or la conique propre $\mathcal{C}$ admet au point P′(0, 0, 1) une tangente d'équation

$$G_T'(X, Y, T) = 0 \qquad \text{ou} \qquad b_1'X + b_1Y = 0.$$

La condition $b_1 = 0$ exprime que cette tangente est la droite d'équation $X = 0$, soit P′Q, qui est la tangente en P′ à $\mathcal{G}$. La proposition en résulte.

DÉFINITION. — **Deux coniques propres sont dites osculatrices** [1] **(resp. surosculatrices) au point A si trois (resp. quatre) de leurs points d'intersection sont confondus avec A.**

3° THÉORÈME. — **Soit $\mathcal{F}$ le faisceau déterminé par une conique propre $\mathcal{G}$ et une conique $\mathcal{C}$, propre ou dégénérée; $\mathcal{F} - \{\mathcal{G}\}$ est l'ensemble des coniques du plan projectif qui ont, avec $\mathcal{G}$, la même intersection que $\mathcal{C}$.**

Nous avons montré au n° **235**, 4°, que toute conique du faisceau $\mathcal{F}$, distincte de $\mathcal{G}$, a, avec $\mathcal{G}$, la même intersection que $\mathcal{C}$.

Inversement, soit Γ une conique du plan projectif $\mathcal{P}$ telle que l'intersection de $\mathcal{G}$ et de Γ coïncide avec celle de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{C}$. En reprenant les notations du 1°, *b)* et en désignant par $H(X, Y, T) = 0$ une équation de Γ dans le repère $\mathcal{R}$, cela signifie que les deux équations algébriques à l'inconnue t, sur le corps des complexes,

$$G(t^2, t, 1) = 0 \qquad \text{et} \qquad H(t^2, t, 1) = 0$$

ont les mêmes racines, aux mêmes ordres de multiplicité, c'est-à-dire que les polynômes $G(t^2, t, 1)$ et $H(t^2, t, 1)$, une fois ordonnés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée t, ont des coefficients proportionnels : il existe un nombre complexe non nul, λ, tel que

$$H(t^2, t, 1) - \lambda G(t^2, t, 1)$$

est le polynôme nul.

---

(1) Le vocable de *coniques osculatrices* trouve son origine en géométrie euclidienne, ainsi que cela est expliqué au n° **256**.

Cela signifie que :

> ou bien le polynôme quadratique H(X, Y, T) — λG(X, Y, T) est le polynôme quadratique nul,
>
> ou bien tout point de $\mathcal{G} - \{P\}$ appartient à la conique d'équation
> $$H(X, Y, T) - \lambda G(X, Y, T) = 0,$$

ce qui est possible si, et seulement si, cette conique coïncide avec $\mathcal{G}$.

Dans l'un et dans l'autre cas, il existe un nombre complexe μ, éventuellement nul, qui assure l'égalité des polynômes quadratiques

$$H(X, Y, T) - \lambda G(X, Y, T) \quad \text{et} \quad \mu F(X, Y, T)$$

ou

$$H(X, Y, T) \quad \text{et} \quad \mu F(X, Y, T) + \lambda G(X, Y, T),$$

ce qui signifie que Γ appartient au faisceau $\mathcal{F}$ qui a pour coniques de base $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$. Comme $\lambda \neq 0$, on a $\Gamma \neq \mathcal{G}$; Γ appartient donc à l'ensemble $\mathcal{F} - \{\mathcal{G}\}$. La proposition en résulte.

Remarque. — Le théorème précédent peut se trouver en défaut si la conique $\mathcal{G}$ n'est pas propre. Soit en effet une conique propre $\mathcal{C}$ et trois points A, B, C de $\mathcal{C}$; désignons par $\mathcal{G}$ la conique formée par le couple de droites (AB, AC) et par $\mathcal{F}$ le faisceau déterminé par les coniques de base $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$. Toute conique propre qui passe par A, B, C a avec $\mathcal{G}$ la même intersection que $\mathcal{C}$, sans pour cela appartenir nécessairement à l'ensemble $\mathcal{F} - \{\mathcal{G}\}$.

238. ***Classification projective des faisceaux de coniques.*** — 1° Nous convenons ici d'éliminer le cas d'un faisceau dont toutes les coniques sont dégénérées. Dans ces conditions, un faisceau $\mathcal{F}$ est déterminé par la donnée d'une conique propre $\mathcal{G}$ et de quatre points A, B, C, D de $\mathcal{G}$, non nécessairement distincts, qui sont les points fixes du faisceau : $\mathcal{F} - \{\mathcal{G}\}$ est l'ensemble des coniques dont l'intersection avec $\mathcal{G}$ est formée par les points A, B, C, D. Nous allons distinguer cinq types de faisceau, d'après le nombre des points distincts qui figurent parmi les points fixes.

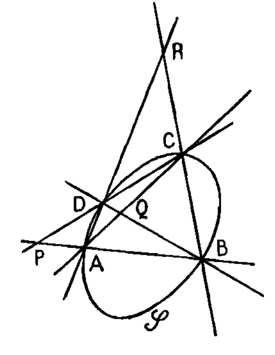


Fig. 91.

1er type : ABCD — *Les quatre points fixes sont deux à deux distincts.* — Les trois coniques dégénérées du faisceau sont ici distinctes : elles sont respectivement formées (fig. 91) par les couples de droites (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC).

Si $p(\vec{M}) = 0$ et $q(\vec{M}) = 0$ sont des équations des droites AB et CD et si $r(\vec{M}) = 0$ et $s(\vec{M}) = 0$ sont des équations des droites AC et BD, le faisceau $\mathcal{F}$ admet l'équation générale

$$\alpha p(\vec{M})q(\vec{M}) + \beta r(\vec{M})s(\vec{M}) = 0.$$

Remarque. — Donnons nous *a priori* quatre points A, B, C, D, deux à deux distincts et trois à trois non alignés. Soit $\mathcal{F}'$ l'ensemble des coniques qui

passent par A, B, C, D; d'après l'étude de la détermination d'une conique (232, 3°), $\mathcal{F}'$ contient au moins une conique propre $\mathcal{S}$ (à laquelle on peut d'ailleurs imposer de contenir un cinquième point donné); on en déduit que $\mathcal{F}'$ n'est autre que le faisceau du premier type déterminé par la conique propre $\mathcal{S}$ et les quatre points fixes A, B, C, D.

2e type : A²BC. — *Les trois points fixes* A, B, C *sont deux à deux distincts; ils ne sont pas alignés; les points fixes* A *et* D *sont confondus.* — Le faisceau ne contient que deux coniques dégénérées distinctes : l'une est formée par le couple de droites (AB, AC), l'autre est la réunion de la droite BC et de la droite Δ tangente en A à la conique propre $\mathcal{S}$ (fig. 92).

Les coniques propres du faisceau sont les coniques propres que passent par B, C et sont tangentes en A à $\mathcal{S}$.

Si $p(\vec{M}) = 0$ et $q(\vec{M}) = 0$ sont des équations des droites AB et AC et si $r(\vec{M}) = 0$ et $s(\vec{M}) = 0$ sont des équations des droites BC et Δ, le faisceau $\mathcal{F}$ admet l'équation générale

$$\alpha p(\vec{M}) q(\vec{M}) + \beta r(\vec{M}) s(\vec{M}) = 0.$$

Remarque. — Donnons nous *a priori* trois points A, B, C, deux à deux distincts, non alignés, et une droite Δ qui passe par A mais est distincte de AB et de AC. Soit $\mathcal{F}'$ l'ensemble des coniques propres qui passent par B, C et sont tangentes en A à Δ; d'après l'étude faite au n° 230, 2°, $\mathcal{F}'$ contient au moins une conique propre $\mathcal{S}$ (à laquelle on peut d'ailleurs imposer d'admettre pour tangente en B une droite donnée); on en déduit que $\mathcal{F}'$ est l'ensemble des coniques propres du faisceau $\mathcal{F}$ du 2e type déterminé par la conique propre $\mathcal{S}$ et les points fixes A²BC.

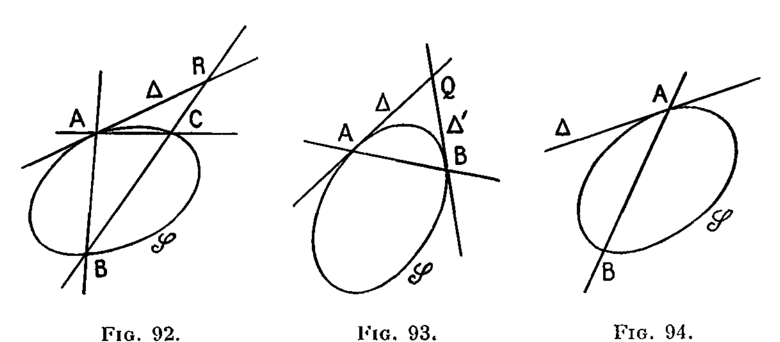


Fig. 92. Fig. 93. Fig. 94.

3e type : A²B². — *Les points fixes* A *et* B *sont distincts, respectivement confondus avec les points fixes* D *et* C. — Le faisceau ne contient que deux coniques dégénérées distinctes : l'une est formée par la droite double AB, l'autre par les droites Δ et Δ' tangentes en A et B à $\mathcal{S}$ (fig. 93). Les coniques propres du faisceau sont les coniques propres bitangentes à $\mathcal{S}$ et A en B.

Si $p(\vec{M}) = 0$, $q(\vec{M}) = 0$ et $r(\vec{M}) = 0$ sont des équations des droites AB, Δ et Δ', le faisceau $\mathcal{F}$ admet l'équation générale

$$\alpha p^2(\vec{M}) + \beta q(\vec{M}) r(\vec{M}) = 0.$$

Remarque. — Donnons nous *a priori* deux points distincts A et B, une droite Δ qui passe par A et ne passe pas par B, une droite Δ' qui passe par B et ne passe pas par A. Soit $\mathcal{F}'$ l'ensemble des coniques propres qui sont tangentes en A à Δ et en B à Δ'; d'après l'étude faite au n° 230, 2°, $\mathcal{F}'$ contient au moins une conique propre $\mathcal{S}$ (à laquelle on peut d'ailleurs imposer de contenir un troisième point donné); on en déduit que $\mathcal{F}'$ est l'ensemble des coniques propres du faisceau $\mathcal{F}$ du 3e type déterminé par la conique propre $\mathcal{S}$ et les points fixes A^2B^2.

4e type : A^3B. — *Les points fixes* A *et* B *sont distincts; les points fixes* C et D *sont confondus avec* A. — Le faisceau ne contient qu'une conique dégénérée formée de la droite AB et de la droite Δ tangente en A à la conique propre $\mathcal{S}$ (fig. 94). Les coniques propres du faisceau sont les coniques qui sont osculatrices en A à $\mathcal{S}$.

Si $f(\vec{M}) = 0$, $p(\vec{M}) = 0$ et $q(\vec{M}) = 0$ sont des équations de la conique $\mathcal{S}$, des droites AB et Δ, le faisceau admet l'équation générale

$$\alpha f(\vec{M}) + \beta p(\vec{M}) q(\vec{M}) = 0.$$

5e type : A^4. — *Les quatre points fixes sont confondus avec* A. — Le faisceau ne contient qu'une conique dégénérée, la droite double Δ, en désignant par Δ la tangente en A à $\mathcal{S}$ (fig. 95). Les coniques propres du faisceau sont les coniques surosculatrices en A à $\mathcal{S}$.

Si $f(\vec{M}) = 0$ et $p(\vec{M}) = 0$ sont des équations de la conique $\mathcal{S}$ et de la droite Δ, le faisceau admet l'équation générale

$$\alpha f(\vec{M}) + \beta p^2(\vec{M}) = 0.$$

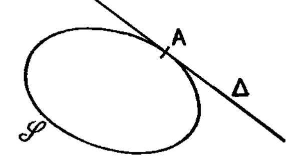


Fig. 95.

2° **Sécantes communes à deux coniques.** — A titre d'exercice, nous allons démontrer deux théorèmes qui font intervenir les *sécantes communes* à deux coniques, c'est-à-dire les droites qui composent les coniques dégénérées du faisceau déterminé par les coniques considérées; deux sécantes communes dites associées composent une même conique dégénérée.

Théorème I. — *Deux coniques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, propres ou dégénérées, bitangentes à une conique propre $\mathcal{S}$ ont un couple de sécantes communes conjuguées harmoniques par rapport aux cordes de contact Δ (de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$) et Δ' (de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}'$).*

Choisissons des équations $\Sigma(\overrightarrow{M}) = 0$, $f(\overrightarrow{M}) = 0$, $g(\overrightarrow{M}) = 0$ de $\mathcal{S}$, Δ, Δ' de façon que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ admettent respectivement les équations

$$\Sigma(\overrightarrow{M}) - f^2(\overrightarrow{M}) = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma(\overrightarrow{M}) - g^2(\overrightarrow{M}) = 0.$$

Cela est possible d'après le fait que la forme linéaire associée à une droite donnée n'est déterminée qu'à un facteur près; en outre le corps de base est ici celui des complexes.

Le faisceau déterminé par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ contient la conique d'équation

$$[\Sigma(\overrightarrow{M}) - f^2(\overrightarrow{M})] - [\Sigma(\overrightarrow{M}) - g^2(\overrightarrow{M})] = 0$$

qui s'écrit

$$[g(\overrightarrow{M}) - f(\overrightarrow{M})]\,[g(\overrightarrow{M}) + f(\overrightarrow{M})] = 0$$

et n'est autre que la réunion de deux droites qui appartiennent au faisceau déterminé par Δ et Δ' et sont conjuguées harmoniques par rapport à Δ et Δ'.

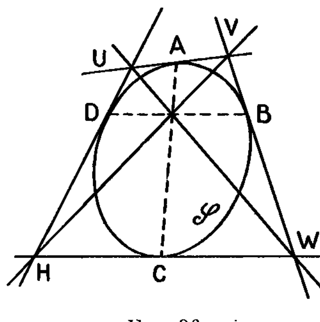


Fig. 96.

Application. — Soit une conique $\mathcal{S}$ et quatre points U, V, W, H tels que les droites UV, VW, WH, HU soient respectivement tangentes à $\mathcal{S}$ en A, B, C, D. Les couples de droites (UV, WH) et (VW, HU) constituent deux coniques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ bitangentes à $\mathcal{S}$, les cordes de contact étant respectivement AC et BD. La troisième conique dégénérée du faisceau déterminé par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est le couple de droites (UW, VH). Ces deux droites passent donc par le point d'intersection de AC et BD et sont conjuguées harmoniques par rapport à AC et BD (fig. 96).

Théorème II. — *Si les trois coniques $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ ont en commun les points* A *et* B, *les sécantes communes associées à la droite* AB *sont trois droites concourantes.*

$\Sigma(\overrightarrow{M}) = 0$ et $f(\overrightarrow{M}) = 0$ étant des équations de $\mathcal{S}$ et AB, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont pour équations

$$\Sigma(\overrightarrow{M}) + f(\overrightarrow{M})g(\overrightarrow{M}) = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma(\overrightarrow{M}) + f(\overrightarrow{M})h(\overrightarrow{M}) = 0,$$

$g(\overrightarrow{M}) = 0$ $\left[\text{resp. } h(\overrightarrow{M}) = 0\right]$ représentant la sécante commune à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) associée à AB.

Le faisceau déterminé par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ contient la conique d'équation :

$$f(\overrightarrow{M})\,[g(\overrightarrow{M}) - h(M)] = 0.$$

La sécante commune à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, associée à AB, a pour équation : $g(\overrightarrow{M}) - h(\overrightarrow{M}) = 0$. La proposition en résulte.

239. ***Le théorème de Desargues.*** — 1° Théorème. — **Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de coniques et L une droite qui ne contient aucun point fixe de $\mathcal{F}$. Au point générique M de L on associe le second point d'intersection M′ de L et de celle des coniques de $\mathcal{F}$ qui passe par M. L'application $\mathcal{J}$ de L dans elle-même ainsi déterminée est une involution.**

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ deux coniques de $\mathcal{F}$, d'équations $\Sigma(\overrightarrow{M}) = 0$ et $\Theta(\overrightarrow{M}) = 0$. Nous avons le droit de supposer que $\mathcal{S}$ a été choisie de telle sorte qu'elle coupe L en deux points distincts A et B et nous pouvons utiliser ces points pour para-

métrer L : $\vec{A}$ et $\vec{B}$ étant des représentants homogènes de A et B, L — $\{A\}$ est le lieu du point M dont un représentant homogène est

$$\vec{M} = \lambda\vec{A} + \vec{B}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

La conique générique de $\mathcal{F}$ — $\{\mathcal{S}\}$ a pour équation

$$\alpha\Sigma\left(\vec{M}\right) + \Theta\left(\vec{M}\right) = 0.$$

Elle coupe L en deux points, distincts de A, dont les paramètres sont les racines de l'équation à l'inconnue λ, sur le corps des complexes,

$$\alpha\Sigma\left(\lambda\vec{A} + \vec{B}\right) + \Theta\left(\lambda\vec{A} + \vec{B}\right) = 0.$$

Compte-tenu de $\Sigma\left(\vec{A}\right) = 0$ et $\Sigma\left(\vec{B}\right) = 0$, cette équation s'écrit

$$\lambda^2\Theta\left(\vec{A}\right) + \lambda(\ldots) + \Theta\left(\vec{B}\right) = 0$$

avec d'ailleurs $\Theta\left(\vec{A}\right) \neq 0$ et $\Theta\left(\vec{B}\right) \neq 0$ puisque ni A, ni B, n'appartient à $\mathcal{C}$.

Compte-tenu de $\mathfrak{I}(A) = B$ et $\mathfrak{I}(B) = A$, l'application $\mathfrak{I}$ associe au point M de L dont l'abscisse projective est $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$, le point M′ dont l'abscisse projective est donnée par le tableau suivant :

M	∞	0	λ
$\mathfrak{I}(M)$	0	∞	$\frac{k}{\lambda}$

avec $k = \dfrac{\Theta\left(\vec{B}\right)}{\Theta\left(\vec{A}\right)}$

La proposition en résulte.

Remarque I. — Une involution étant déterminée par deux couples, on définira $\mathfrak{I}$ en utilisant les intersections de L et de deux quelconques des coniques du faisceau; on choisira, autant que possible, des coniques dégénérées.

Remarque II. — L'involution $\mathfrak{I}$ admet deux points doubles distincts. Chacun d'eux est soit un point double d'une conique dégénérée de $\mathcal{F}$, soit le point de contact d'une conique de $\mathcal{F}$ tangente à L. Retenons que *si la droite* L *ne contient ni un point fixe du faisceau $\mathcal{F}$, ni un point double d'une conique dégénérée de $\mathcal{F}$, il existe deux coniques du faisceau qui sont tangentes à* L.

Remarque III. — *Si $\mathcal{F}$ contient une droite double* (faisceau du 3[e] ou du 5[e] type), le point d'intersection de cette droite et de L est l'un des points doubles de $\mathfrak{I}$, *il existe en général une et une seule conique du faisceau qui est tangente à* L. Nous expliquerons ce résultat par le fait que les coniques propres de $\mathcal{F}$ appartiennent, dans ce cas, à un faisceau tangentiel.

2° **Application à l'étude de l'équation du second degré.** — Nous allons utiliser le théorème de Desargues pour démontrer le théorème suivant, déjà énoncé au n° 91, 2°.

THÉORÈME. — **Si, dans une équation du second degré sur $\tilde{C}$, les coefficients « dépendent linéairement » d'un paramètre, les racines de l'équation se correspondent en général dans une involution.**

a) Donnons nous les deux polynômes du second degré, homogènes, à coefficients complexes

$$\begin{cases} F(X, T) = aX^2 + bXT + cT^2 \\ G(X, T) = a'X^2 + b'XT + c'T^2. \end{cases}$$

Nous nous limitons au cas où les deux équations sur $\tilde{C}$

$$F(X, T) = 0 \qquad \text{et} \qquad G(X, T) = 0$$

n'ont aucune racine commune. Étant donné que ∞ n'est racine commune que si $a = 0$, $a' = 0$, cela revient à supposer que d'une part a et a' ne sont pas tous deux nuls, et que d'autre part les deux équations sur C (dont l'une au moins est du second degré)

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a'x^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

n'ont pas de racine commune, ce qui se traduit (I, 126) par

$$(1) \qquad (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')\,(bc' - cb') \neq 0.$$

Nous pouvons d'ailleurs nous en tenir à cette dernière hypothèse, puisqu'elle implique que a et a' ne sont pas tous deux nuls.

b) Cela posé, nous pouvons associer à tout élément θ de $\tilde{C}$, dont un représentant est (α, β), l'équation du second degré sur $\tilde{C}$

$$(E_\theta) \qquad \alpha F(X, T) + \beta G(X, T) = 0,$$

et la conique Γ_θ du plan projectif donné $\mathfrak{L}$ qui admet, dans le repère donné $\mathfrak{R}$, l'équation

$$\alpha F(X, T) + \beta G(X, T) = 0.$$

Nous reconnaissons en Γ_θ la conique générique d'un faisceau $\mathcal{F}$; elle est formée de deux droites et admet le point double (0, 1, 0). On peut considérer que les racines ξ et ξ' de E_θ sont les abscisses projectives — de la forme : classe (X, T) — des points d'intersection de Γ_θ et de la droite L d'équation $Y = 0$.

Nous pouvons appliquer le théorème de Desargues. En effet la démonstration donnée au 1° n'est pas altérée par le fait que $\mathcal{F}$ est formé de coniques dégénérées et la clause selon laquelle L ne contient aucun point fixe du faisceau est remplie (sinon les équations sur $\tilde{C}$: $F(X, T) = 0$ et $G(X, T) = 0$ auraient une racine commune, ce qui est exclu par hypothèse).

En désignant par p et q les abscisses projectives des points invariants de l'involution de Desargues, on a : $(\xi, \xi', p, q) = -1$. La proposition en résulte.

240. ***Polaires d'un point par rapport aux coniques d'un faisceau.*** — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de coniques déterminé par les coniques $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$, respectivement attachées aux formes quadratiques Σ et Θ, de formes polaires σ et τ. Nous supposerons ici que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ sont des coniques propres, ce qui élimine le cas d'un faisceau qui ne contient que des coniques dégénérées.

1° **Faisceau des polaires d'un point donné.** — La conique générique, Γ, de $\mathcal{F}$ a pour équation

$$\alpha\Sigma\left(\vec{M}\right) + \beta\Theta\left(\vec{M}\right) = 0. \tag{1}$$

La polaire D, par rapport à Γ, du point donné M_0 a pour équation

$$\alpha\sigma\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) + \beta\tau\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) = 0. \tag{2}$$

En général les polaires de M_0 par rapport à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$, d'équations $\sigma\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) = 0$ et $\tau\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) = 0$ sont deux droites distinctes, qui déterminent un faisceau de droites $\mathcal{G}$, dont nous désignerons le point fixe par M_1. Quand Γ parcourt $\mathcal{F}$, D parcourt $\mathcal{G}$, de telle sorte que la conique et la droite admettent la même abscisse projective : l'élément de $\tilde{C}$ qui admet le représentant homogène (α, β). On dispose donc d'une application homographique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$, considérés l'un et l'autre comme des espaces projectifs de dimension 1; rappelons qu'une telle application est bijective et qu'elle conserve le birapport. Il y a réciprocité entre M_0 et M_1 qui sont dits *points conjugués par rapport au faisceau* $\mathcal{F}$.

2° **Pôles doubles d'un faisceau.** — Le raisonnement précédent n'est en défaut que si les polaires de M_0 par rapport à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ sont confondues, c'est-à-dire si les formes linéaires

$$\sigma\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) \quad \text{et} \quad \tau\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) \quad \left(\text{avec } \vec{M_0} \text{ bloqué}\right)$$

sont proportionnelles; il existe alors un nombre complexe k non nul tel que

$$k\sigma\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) + \tau\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right), \text{ qui s'écrit } \varphi\left(\vec{M}, \vec{M_0}\right) \text{ avec } \varphi = k\sigma + \tau,$$

est la forme linéaire nulle, ce qui signifie que la conique de $\mathcal{F}$ qui est associé à la forme quadratique $k\Sigma + \Theta$ admet M_0 pour point double.

Autrement dit, M_0 admet la même polaire par rapport à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ si, et seulement s'il existe dans le faisceau une conique dégénérée $\mathcal{C}$ dont un point double est M_0; on dit dans ce cas que M_0 est un *pôle double* du faisceau; M_0 *admet alors la même polaire par rapport à toute conique de* $\mathcal{F}$ (autre que $\mathcal{C}$).

C'est ainsi qu'un faisceau du premier type admet trois pôles doubles; ils déterminent un triangle qui est autopolaire par rapport à toute conique propre du faisceau.

Application. — A tout quadruplet $\{$ A, B, C, D $\}$ de points deux à deux distincts d'une conique propre donnée $\mathcal{G}$, on peut associer un triangle autopolaire par rapport à $\mathcal{G}$: le triangle PQR formé par les pôles doubles du faisceau de points fixes A, B, C, D (fig. 91).

On en déduit une construction de la polaire d'un point donné P par rapport à une conique propre donnée $\mathcal{G}$, en utilisant deux sécantes issues de P.

241. *Lieu des pôles d'une droite par rapport aux coniques d'un faisceau.* — Nous considérons un faisceau de coniques $\mathcal{F}$ et une droite L, que nous pouvons déterminer par deux de ses points M_0 et M_0'.

1° Plaçons-nous dans le cas général où ni M_0 ni M_0' n'est pôle double de $\mathcal{F}$. Les notations étant celles du n° 240, les polaires, D et D', de M_0 et M_0' par rapport à la conique générique Γ de $\mathcal{F}$ ont pour équations

$$\alpha\sigma(\vec{M}, \vec{M_0}) + \beta\tau(\vec{M}, \vec{M_0}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha\sigma(\vec{M}, \vec{M_0'}) + \beta\tau(\vec{M}, \vec{M_0'}) = 0.$$

Quand Γ parcourt $\mathcal{F}$, l'intersection de D et D' engendre une courbe Ω dont l'équation s'obtient par élimination de α et β, soit :

$$\sigma(\vec{M}, \vec{M_0}).\tau(\vec{M}, \vec{M_0'}) - \sigma(\vec{M}, \vec{M_0'}).\tau(\vec{M}, \vec{M_0}) = 0.$$

Ω est donc une conique.

2° On peut retrouver ce résultat (toujours dans l'hypothèse où ni M_0, ni M_0' n'est pôle double de $\mathcal{F}$) en remarquant que D et D' engendrent les faisceaux de droites, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, dont les points fixes, M_1 et M_1', sont les points conjugués de M_0 et M_0' par rapport à $\mathcal{F}$; les abscisses projectives de D et D' sont égales (l'une et l'autre étant égale à l'abscisse projective de la conique Γ); ces droites sont donc homologues dans une application homographique de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}'$, ce qui explique que leur intersection engendre une conique Ω.

En fait, D et D' ne sont confondues (221, 2°, III) que si L passe par un pôle double du faisceau (ce qui se produit pour toute droite D si $\mathcal{F}$ contient une droite double). D'où la discussion :

I — L *ne contient aucun pôle double de* $\mathcal{F}$ (ce qui implique que le faisceau ne contient pas de droite double). Pour toute conique Γ de $\mathcal{F}$, les droites D et D' sont distinctes; elles se coupent en un point qui est le pôle de L par rapport à Γ si la conique est propre, le point double de Γ si la conique est dégénérée; dans ce dernier cas, le point double de Γ, (autour duquel pivote la polaire, par rapport à Γ, du point générique de L) sera considéré comme pôle de L. Par ailleurs la conique Ω est propre puisque, quand on l'engendre par homographie, les deux droites D et D' sont toujours distinctes. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Le lieu des pôles, par rapport aux coniques d'un faisceau, d'une droite qui ne contient aucun pôle double du faisceau est une conique propre.*

Dans le cas où les quatre points fixes du faisceau $\mathcal{F}$ sont distincts, Ω contient les trois pôles doubles du faisceau, les deux points doubles de l'involution de Desargues relative à L et les six points obtenus en prenant le conjugué harmonique, par rapport à deux des points fixes du point commun à L et à la droite qui joint ces deux points fixes.

II — L *contient un pôle double* P *du faisceau* $\mathcal{F}$ (ce qui est nécessairement le cas si le faisceau contient une droite double). La conique Ω se compose de la polaire fixe de P par rapport à toutes les coniques du faisceau et de la droite conjuguée harmonique de L par rapport aux deux droites qui forment la conique dégénérée du faisceau dont un point double est P.

242. — ***Notions sur les faisceaux tangentiels de coniques.*** — 1° **Définition d'un faisceau tangentiel de coniques.** — Quand on étudie simultanément le plan projectif $\mathfrak{L}$ et son dual $\mathfrak{L}^*$, il est commode d'appeler *faisceau ponctuel* un faisceau de coniques de $\mathfrak{L}$ (tel qu'il a été étudié ci-dessus) et *faisceau tangentiel* un faisceau de coniques de $\mathfrak{L}^*$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{F}^*$ des coniques de $\mathfrak{L}^*$ qui sont représentées par l'équation générale

$$\alpha\Sigma(d) + \beta\Theta(d) = 0, \qquad \text{classe } (\alpha, \beta) \in \tilde{C},$$

dans laquelle Σ et Θ sont deux formes quadratiques sur $\vec{E}^*$, indépendantes.

Reprenons la bijection δ (225, 2°) qui nous a conduit à « identifier » $\mathfrak{L}^*$ à l'ensemble des droites de $\mathfrak{L}$. Une conique Γ^* de $\mathfrak{L}^*$ peut ainsi être considérée comme une famille de droites de $\mathfrak{L}$: si Γ^* est propre, il s'agit de l'ensemble des tangentes à une conique propre de $\mathfrak{L}$ qui est identifiée à Γ^*; si Γ^* est dégénérée, il s'agit de l'ensemble des droites de $\mathfrak{L}$ qui appartiennent à l'un ou l'autre de deux faisceaux de droites, qui peuvent être confondus. Dans tous les cas nous parlerons dorénavant des *tangentes* (plutôt que des droites) d'une conique de $\mathfrak{L}^*$.

2° **Propriétés générales des coniques d'un faisceau tangentiel.** — En nous aidant de la bijection δ, nous pouvons interpréter de la façon suivante les propriétés d'un faisceau de coniques de $\mathfrak{L}^*$, (nous exceptons le cas d'un faisceau qui ne contient que des coniques dégénérées) :

THÉORÈME. — *Tout faisceau tangentiel contient trois coniques dégénérées, distinctes ou non.*

THÉORÈME. — *Deux coniques de $\mathfrak{L}^*$, dont l'une au moins est propre, ont quatre tangentes communes, distinctes ou non.*

Deux, au moins, des quatre tangentes communes à deux coniques propres sont confondues si, et seulement si, les points de contact des deux coniques et de l'une de leurs tangentes communes sont confondues.

THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{F}^*$ le faisceau tangentiel déterminé par une conique propre $\mathcal{S}^*$ et par une conique $\mathcal{C}^*$, propre ou dégénérée; $\mathcal{F}^* - \{ \mathcal{S}^* \}$ est l'ensemble des coniques de $\mathfrak{L}^*$ qui ont, avec $\mathcal{S}^*$, les mêmes tangentes communes que $\mathcal{C}^*$.*

Ces quatre tangentes communes sont dites *tangentes fixes* de $\mathcal{F}^*$.

Il existe une, et une seule, conique d'un faisceau tangentiel admettant pour tangente une droite donnée, qui n'est pas tangente fixe du faisceau.

On peut choisir pour coniques de base d'un faisceau tangentiel deux coniques quetconques du faisceau.

3° Classification projective des faisceaux tangentiels. — A partir du n° 238, on obtient les résultats suivants :

THÉORÈME I. — *Les coniques de* $\mathfrak{L}^*$ *qui sont tangentes à quatre droites données* A^*, B^*, C^*, D^*, *deux à deux distinctes, trois à trois non concourantes, forment un faisceau tangentiel.*

Les trois coniques dégénérées de ce faisceau, distinctes, sont respectivement formés des couples de faisceaux de droites ayant pour point fixes (fig. 97)

$$A^* \cap B^* \quad \text{et} \quad C^* \cap D^*;$$
$$A^* \cap C^* \quad \text{et} \quad B^* \cap D^*;$$
$$A^* \cap D^* \quad \text{et} \quad B^* \cap C^*.$$

Dans la pratique on utilisera les équations tangentielle de deux coniques dégénérées pour écrire l'équation générale du faisceau : si P et Q sont deux points de $\mathfrak{L}$, déterminés dans un repère $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{L}$ par les coordonnées homogènes (X_1, Y_1, T_1) et (X_2, Y_2, T_2), la droite de coordonnées tangentielles (u, v, h) passe par au moins l'un des points P, Q, si, et seulement si,

$$(1) \qquad (uX_1 + vY_1 + hT_1)(uX_2 + vY_2 + hT_2) = 0;$$

cette équation représente la conique dégénérée de $\mathfrak{L}^*$, formée des deux faisceaux de droites de points fixes P et Q.

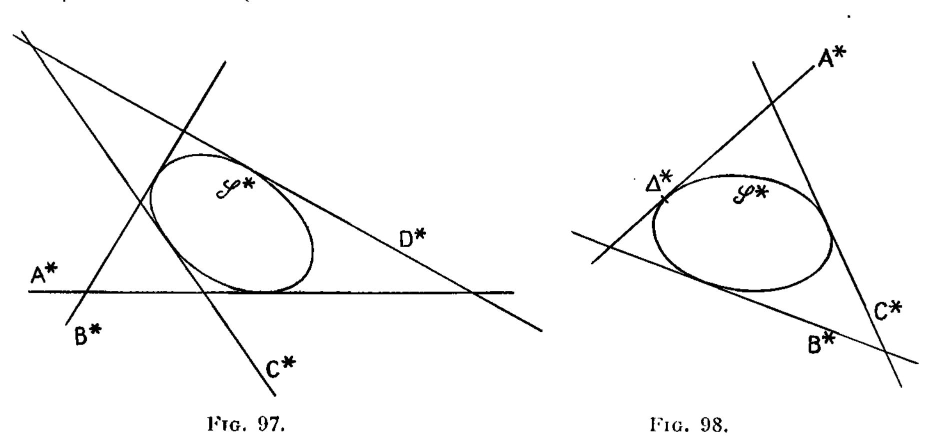


FIG. 97. FIG. 98.

THÉORÈME II. — *Soient* A^*, B^*, C^* *trois droites deux à deux distinctes, non concourantes, et* Δ^* *un point de* A^*, *qui n'appartient ni à* B^*, *ni à* C^*. *Les coniques propres qui sont tangentes à* B^*, *à* C^* *et à* A^* *en* Δ^* *sont les coniques propres d'un faisceau tangentiel.*

Ce faisceau ne contient que deux coniques dégénérées distinctes, respectivement formées des couples de faisceaux de droites ayant pour points fixes (fig. 98) :

$$A^* \cap B^* \quad \text{et} \quad A^* \cap C^*; \qquad B^* \cap C^* \quad \text{et} \quad \Delta^*.$$

THÉORÈME III. — *Soient* A^* *et* B^* *deux droites distinctes,* Δ^* *un point de* A^* *qui n'appartient pas à* B^*, Δ'^* *un point de* B^* *qui n'appartient pas à* A^*. *Les coniques propres qui sont tangentes à* A^* *en* Δ^* *et à* B^* *en* Δ'^* *sont les coniques propres d'un faisceau tangentiel.*

Ce faisceau ne contient que deux coniques dégénérées distinctes, respectivement formées des couples de faisceaux de droites ayant pour points fixes (fig. 99) :

$A^* \cap B^*$ (faisceau double); Δ^* et Δ'^*.

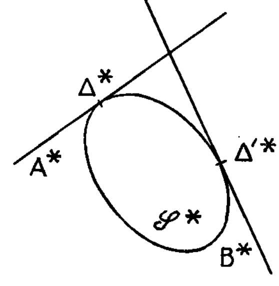


FIG. 99.

Rappelons que les coniques propres tangentes à A^* en Δ^* et à B^* en Δ'^* sont aussi les coniques propres d'un faisceau ponctuel du 3e type (**238**).

Ajoutons, pour terminer, que les coniques propres surosculatrices à une conique propre donnée, en un point donné, appartiennent, elles aussi, à la fois à un faisceau ponctuel et à un faisceau tangentiel.

4° **Théorème de Plücker.** — A partir du théorème de Desargues (**239**), on obtient :

THÉORÈME. — *Soient* $\mathcal{F}^*$ *un faisceau tangenttel de coniques et* L^* *un point qui n'appartient à aucune des tangentes fixes de* $\mathcal{F}^*$. *Les tangentes menées de* L^* *aux coniques de* $\mathcal{F}^*$ *se correspondent dans une involution* (application homographique et involutive du faisceau de droites de point fixe L^* sur lui-même).

Les rayons doubles, distincts, de cette involution sont en général les tangentes en L^* aux deux coniques de $\mathcal{F}^*$ qui passent par L^*. Il peut cependant arriver que l'un de ces rayons doubles soit tangente double d'une conique dégénérée de $\mathcal{F}^*$, auquel cas il ne passe par L^* qu'une conique de $\mathcal{F}^*$ (cela se produit nécessairement pour un faisceau de coniques bitangentes ou surosculatrices).

5° THÉORÈME. — *Le lieu des pôles d'une droite donnée par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel est en général une droite.*

Il n'y a exception que si la droite donnée est tangente double d'une conique dégénérée du faisceau : elle admet alors le même pôle par rapport à toutes les coniques du faisceau.

THÉORÈME. — *Les polaires, par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel, d'un point donné (qui n'appartient pas à une droite double d'une conique dégénérée du faisceau) sont les tangentes d'une conique propre.*

EXERCICES

Sauf avis contraire, le lecteur se placera, soit dans un plan projectif complexe, soit dans la complétion projective d'un espace affine, éventuellement complexifié, éventuellement muni d'une structure euclidienne.

1. — Démontrer que l'on peut, d'une infinité de manières, associer à toute conique propre Γ un repère $\mathcal{R}$ relativement auquel Γ est représentée par l'équation :

$$X^2 + Y^2 + T^2 = 0.$$

2. — On considère un triangle ABC et une conique propre Γ tangente aux droites BC, CA, AB en A', B', C'. Démontrer que les droites AA', BB', CC' sont concourantes. Étudier la réciproque.

3. — On considère deux coniques propres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$; à tout point M, on associe le pôle M', par rapport à $\mathcal{B}$, de la polaire de M par rapport à $\mathcal{A}$. On détermine ainsi une application f du plan projectif dans lui-même.

a) Montrer que f est une application homographique. Trouver ses points invariants

b) Trouver le lieu de M pour que M' décrive $\mathcal{A}$.

c) $\mathcal{A}$ étant donnée a priori, comment faut-il choisir $\mathcal{B}$ pour que f ne change pas quand on transpose $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

(On choisira un repère dans lequel $\mathcal{A}$ a pour équation : $X^2 + Y^2 + T^2 = 0$.)

4. — Dans cet exercice, on suppose que le plan projectif $\mathcal{P}$ est réel et qu'il est rapporté à un repère $\mathcal{R}$ donné. On considère les trois droites D_i, $(i = 1, 2, 3)$, d'équations

$$u_i X + v_i Y + h_i T = 0$$

avec : $$u_i u_j + v_i v_j + h_i h_j = 0, \qquad (i \neq j).$$

a) Montrer que les trois droites forment un triangle $\mathcal{T}$.

b) Trouver les matrices (3,3), A, qui admettent pour vecteurs propres les trois vecteurs (u_i, v_i, h_i). On constatera que ces matrices sont symétriques.

c) Que peut-on dire du triangle $\mathcal{T}$ vis-à-vis de la conique de matrice tangentielle A?

5. — *Coniques harmoniquement inscrites et circonscrites.* — Un plan projectif complexe est rapporté à un repère quelconque $\mathcal{R}$. On considère des coniques propres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$,... et on désigne par A, B,... des matrices ponctuelles de ces coniques (cf n° 228). On dit que la conique $\mathcal{A}$ est harmoniquement circonscrite (resp. inscrite) à la conique $\mathcal{B}$ s'il existe un triangle autopolaire par rapport à $\mathcal{B}$ dont les sommets sont des points de $\mathcal{A}$ (resp. dont les côtés sont des tangentes à $\mathcal{A}$).

a) Démontrer que si $\mathcal{A}$ est harmoniquement circonscrite à $\mathcal{B}$ la trace de la matrice AB^{-1} est nulle. Démontrer que, réciproquement, si deux coniques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont telles que la trace de la matrice AB^{-1} soit nulle, il existe une infinité de triangles inscrits dans $\mathcal{A}$ et autopolaires par rapport à $\mathcal{B}$, tout point de $\mathcal{A}$ étant sommet d'un tel triangle (pour établir ces propositions, on commencera par utiliser des repères particuliers).

Retrouver géométriquement que, s'il existe un triangle $\alpha\beta\gamma$ inscrit dans une conique $\mathcal{A}$ et autopolaire par rapport à une conique $\mathcal{B}$, il en existe une infinité. Pour cela on associera au point générique M de $\mathcal{A}$ sa polaire, m, par rapport à $\mathcal{B}$; on désignera par U et V les points d'intersection de m et de $\mathcal{A}$, par P et Q les points d'intersection de m et de $\mathcal{B}$; on démontrera, en utilisant des coniques dégénérées, que les points P et Q sont conjugués par rapport au faisceau de points fixes M, α, β, γ.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante (relative aux matrices B et C) pour que la conique $\mathcal{C}$ soit harmoniquement inscrite à la conique $\mathcal{B}$. En déduire l'équivalence logique :

$\mathcal{A}$ harmoniquement circonscrite à $\mathcal{B}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ harmoniquement inscrite à $\mathcal{A}$.

c) Déduire, sans calcul, de ce qui précède les résultats suivants :

Deux triangles autopolaires par rapport à une même conique sont inscrits dans une même conique et réciproquement.

Deux triangles autopolaires par rapport à une même conique sont circonscrits à une même conique et réciproquement.

Deux triangles inscrits dans une même conique sont circonscrits à une même conique et réciproquement.

Démontrer analytiquement que deux triangles sont inscrits dans une même conique si, et seulement si, ils sont autopolaires par rapport à une même conique (on utilisera l'un des triangles pour triangle de référence).

6. — On donne, dans un repère affine Ox, Oy, les coniques

$$C : xy - a^2 = 0$$

$$C' : (x - a)^2 + ay = 0 \qquad (\text{resp. } y^2 - 2px = 0).$$

Démontrer directement qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans C et circonscrits à C'. Retrouver le résultat en utilisant l'exercice n° 5.

7. — Calculer R pour qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ et circonscrits au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ (repère orthonormé).

8. — On donne deux droites D, D' et deux points M, M' ($M \notin D'$, $M' \notin D$). Existe-t-il des coniques Γ telles que les polaires de M et M' par rapport à Γ soient D et D'?

9. — On donne une conique propre Γ et trois points A, B, C, non alignés. Existe-t-il des coniques qui sont bitangentes à Γ et passent par A, B, C?

10. — On donne trois points A, B, C non alignés et deux droites D et D'. Existe-t-il des coniques qui passent par A, B, C et sont tangentes à D et D'?

11. — On donne un triangle ABC et deux points U et V. Montrer que les coniques qui passent par A, B, C et admettent U, V pour points conjugués ont en commun un quatrième point fixe dont on donnera une construction géométrique.

12. — On donne une conique Γ et deux points P et Q. Étudier les coniques C dont les points d'intersection avec toute droite D passant soit par P soit par Q sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de D et de Γ.

13. — On donne quatre points A, B, C, D, parmi lesquels ne figurent pas trois points alignés, et une conique propre Γ qui passe par B et C. Une droite Δ, qui pivote autour de A, coupe Γ en M et N. Montrer que la conique déterminée par les cinq points B, C, D, M, N fait partie d'un faisceau.

14. — Une conique propre variable Γ est tangente en deux points fixes A et A' à deux droites fixes Δ et Δ'. Trouver le lieu L des sommets du quadrilatère formé par les tangentes à Γ menées par deux points fixes B et C, alignés avec A. On montrera, si possible géométriquement, que L est une cubique qui admet pour point double le point commun à Δ et Δ'.

15. — Une conique propre variable Γ passe par deux points fixes A, B, et reste tangente à deux droites fixes D et D', en des points variables U, U'.

a) Enveloppe de la droite UU'.

b) Lieu du pôle de la droite AB par rapport à Γ.

16. — Une conique propre variable Γ passe par deux points fixes A et B, reste tangente à une droite fixe D; en outre, le pôle de la droite AB par rapport à Γ décrit une droite fixe Δ. Trouver l'enveloppe de Γ.

17. — On donne quatre points A, B, C, D, tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. A toute conique Γ du faisceau de points fixes A, B, C, D, on associe la conique Γ' qui admet ABC pour triangle autopolaire et est tangente à Γ en D. Trouver le lieu des points communs à Γ et Γ' (on prendra ABC pour triangle de référence et D pour point unitaire).

18. — On donne quatre points A, B, C, D tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. Une conique propre Γ, variable, passe par D et est tangente aux côtés du triangle ABC. Trouver l'enveloppe de la polaire de A par rapport à Γ (on prendra ABC pour triangle de référence et D pour point unitaire).

19. — On donne une conique propre Γ et deux points A et A', n'appartenant pas à Γ. On désigne par P et Q (resp. P' et Q') les points de contact des tangentes à Γ menées par A (resp. A'). Montrer qu'il existe une conique qui passe par les six points A, P, Q, A', P',Q' (On utilisera un repère dans lequel Γ admet pour équation $X^2 + Y^2 + T^2 = 0$).

20. — On donne une conique C et deux droites Δ et Δ'. Sur Δ et Δ' varient deux points M et M' conjugués par rapport à C.

a) Démontrer que l'enveloppe de la droite MM' est en général une conique propre Γ. Étudier les cas de décomposition de Γ.

b) Dans le cas général, construire les points de contact de Γ avec Δ et Δ'. Démontrer que les points de contact, avec C, des tangentes communes à C et Γ sont sur Δ et Δ'. Que peut-on dire des points de contact de ces mêmes tangentes avec Γ? Donner une construction simple de ces points.

21. — On donne une conique propre Γ et deux points A et A'. Trouver le lieu d'un point M tel que les droites MA et MA' soient conjuguées par rapport à Γ.

22. — On donne une conique Γ et deux droites D et D' qui se coupent en A. Trouver l'enveloppe d'une corde MM' de Γ telle que les droites AM et AM' soient conjuguées harmoniques par rapport à D et D'.

23. — On donne un triangle ABC et une droite L. Trouver l'enveloppe, quand le point M décrit L, de la droite Δ conjuguée harmonique de la droite MA par rapport aux droites MB et MC.

24. — On donne deux droites D et D' qui se coupent en A, et trois points P, Q, R. Un triangle UVW varie de façon que U décrive D, que V décrive D', que les droites VW, WU et UV passent respectivement par P, Q, R. Trouver le lieu du point W. Étudier le cas particulier où A, P, Q sont alignés et celui où P, Q, R sont alignés.

25. — On donne un triangle ABC et une droite Δ. Une conique Γ, variable, reste tangente aux droites BC, CA, AB et Δ; on appelle respectivement α, β, γ et μ les points de contact. Démontrer les propriétés suivantes :

a) les droites βγ, γα, αβ passent par des points fixes, respectivement désignés par A', B', C';

b) les droites A'α, B'β, C'γ passent par μ;

c) les droites Aα, Bβ, Cγ concourent en un point P dont le lieu est la conique tangente en A, B, C aux droites B'C', C'A', A'B'.

26. — Deux coniques fixes Γ et Γ' sont tangentes en A. Trouver le lieu du point d'intersection de la tangente en M à Γ et de la tangente en M' à Γ', quand M et M' varient en restant alignés avec A. Étudier le cas particulier où Γ et Γ' sont surosculatrices en A.

27. — On donne une conique propre Γ et quatre points P, A, B, C de Γ. Une droite Δ, qui pivote autour de P, coupe BC, CA, AB et Γ en A', B', C' et P'. Montrer que le birapport (A', B', C', P') est constant.

28. — On donne deux coniques propres et on considère deux de leurs points communs, A et B. D'un point M de la droite AB on mène deux tangentes à chacune des coniques; les points de contact de ces tangentes déterminent un quadrangle 𝔔. Démontrer que, quand M décrit AB, chacun des six côtés de 𝔔 passe par un point fixe.

29. — Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux coniques tangentes à deux droites données en des points donnés.

30. — Soit $\mathcal{F}$ le faisceau de coniques de points fixes deux à deux distincts A, B, C, D. On désigne par P, Q, R les points communs aux couples de droites (AB, CD), (AC, DB), (AD, BC). Montrer que, si les points M et M′ sont conjugués par rapport à $\mathcal{F}$, les birapports

(MA, MB, MC, MD) et (M′M, M′P, M′Q, M′R)

sont égaux.

31. — On considère trois coniques propres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

a) Trouver le lieu L des points M dont les polaires par rapport aux trois coniques concourent en un point M′; vérifier que L est aussi le lieu de M′. Examiner le cas où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ont deux, trois ou quatre points communs.

b) On suppose dorénavant que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ont deux points communs. Montrer que, quand M décrit L, la droite MM′ pivote autour d'un point fixe P. Trouver l'enveloppe de L et le lieu de P quand, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ restant fixes, $\mathcal{C}$ varie.

32. — *Théorème de Pascal.* — On donne six points A, B, C, P, Q, R, tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On désigne par U, V, W les points d'intersection des droites (BR, CQ), (CP, AR), (AQ, BP).

Démontrer par le calcul, en utilisant ABC pour triangle de référence, que les six points A, B, C, P, Q, R appartiennent à une même conique si, et seulement si, les trois points U, V, W sont alignés.

Le théorème corrélatif du théorème de Pascal est connu sous le nom de théorème de Brianchon : énoncer le théorème de Brianchon.

33. — Un plan projectif complexe est rapporté à un repère quelconque $\mathcal{R}$. On considère deux coniques propres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dont des matrices ponctuelles sont désignées par A et B (cf. n° 228).

a) Démontrer que la polaire réciproque de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{B}$ est une conique $\mathcal{C}$ dont une matrice ponctuelle est $BA^{-1}B$.

b) On propose de rechercher toutes les coniques $\mathcal{A}$ qui sont leurs propres polaires réciproques par rapport à une conique donnée $\mathcal{B}$.

I) Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante est $(AB^{-1})^2 = 1$, 1 étant la matrice-unité d'ordre 3.

II) Démontrer que, si $\mathcal{A}$ existe, tout point commun à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est un point de contact. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont donc surosculatrices ou bitangentes. Démontrer, par un choix convenable de $\mathcal{R}$, que la première hypothèse n'est possible que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont confondues.

III) On considère le cas où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont bitangentes en Q et R. Démontrer que toute droite passant par le pôle P de la droite QR rencontre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en deux couples de points conjugués harmoniques.

IV) On considère maintenant deux coniques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ bitangentes et satisfaisant à la condition exprimée en III). Démontrer que chacune des coniques est sa propre polaire réciproque par rapport à l'autre.

V) Montrer que si $F(X, Y, T) = 0$ est une équation de $\mathcal{B}$ dans le repère $\mathcal{R}$, l'ensemble des coniques $\mathcal{A}$ répondant à la question est déterminé par l'équation :

$$(X_0F'_X + Y_0F'_Y + T_0F'_T)^2 - 2F(X_0, Y_0, T_0)F(X, Y, T) = 0$$

(X_0, Y_0, T_0) étant trois nombres quelconques, non simultanément nuls.

c) Démontrer que si trois coniques propres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont telles que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soient polaires réciproques par rapport à $\mathcal{A}$, et que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ soient polaires réciproques par rapport à $\mathcal{B}$, alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont polaires réciproques par rapport à $\mathcal{C}$.

On donne la conique $\mathcal{A}$, d'équation $F(X, Y, T) = 0$. Montrer qu'on peut lui associer une seule conique $\mathcal{B}$ et une seule conique $\mathcal{C}$ telles que soient réalisées les conditions précédentes; former les équations de ces coniques.

d) Former les systèmes de *n* coniques $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ telles que $\mathcal{A}_{i-1}$ et $\mathcal{A}_{i+1}$ soient polaires réciproques par rapport à $\mathcal{A}_i$ ($\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_1$).

34. — Dans un plan projectif rapporté à un repère donné $\mathcal{R}$ on considère la conique propre Γ déterminée par la représentation paramétrique

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ T \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

dans laquelle Ω désigne une matrice régulière d'ordre 3.

a) Montrer que la droite qui joint les points de Γ dont les paramètres sont t_1 et t_2 peut être représentée par la matrice uniligne

$$[1 \quad -(t_1 + t_2) \quad t_1 t_2]\, \Omega^{-1}$$

et que la tangente à Γ au point de paramètre t peut être représentée par

$$[1 \quad -2t \quad t^2]\, \Omega^{-1}.$$

b) Écrire l'équation aux paramètres des points de contact des tangentes à Γ issues d'un point P, donné par la matrice unicolonne de ses coordonnées homogènes.

En déduire des coordonnées tangentielles de la polaire de P par rapport à Γ : on fera intervenir la matrice ε telle que

$$\varepsilon \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

c) Montrer que Γ admet pour matrice tangentielle : $\Omega \varepsilon^{-1} \tilde{\Omega}$.

35. — *Triangles et quadrilatères de Poncelet.* — *a*) Étant données deux coniques propres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'un plan projectif complexe, montrer que les points d'intersection de $\mathcal{A}$ et de la tangente générique à $\mathcal{B}$ sont conjugués par rapport à une conique fixe $\mathcal{C}$.

Pour cela on utilisera un repère $\mathcal{R}_0$ dans lequel $\mathcal{A}$ est représentée par

$$Y^2 - XT = 0 \qquad \text{ou} \qquad X = t^2, \quad Y = t, \quad T = 1,$$

et $\mathcal{B}$ par une matrice ponctuelle B. On notera

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix}$$

On montrera que le contact avec $\mathcal{B}$ de la droite qui joint les points de $\mathcal{A}$ dont les paramètres sont t et t' s'exprime par

$$[t^2 \quad t \quad 1]\, C \begin{bmatrix} t'^2 \\ t' \\ 1 \end{bmatrix} = [0],$$

C désignant une matrice carrée symétrique, d'ordre 3.

b) Réciproquement, montrer que, étant données la conique $\mathcal{C}$ et la conique propre $\mathcal{A}$, si deux points M et M' décrivent $\mathcal{A}$ en restant conjugués par rapport à $\mathcal{C}$, la droite MM' enveloppe une conique $\mathcal{B}$.

c) On reprend les coniques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et le repère $\mathcal{R}_0$ de *a*). Montrer sans calcul que, les tangentes menées à $\mathcal{B}$ par le point générique M de $\mathcal{A}$ recoupant $\mathcal{A}$ en M' et M'', la droite M'M'' enveloppe une conique $\mathcal{A}^*$.

Montrer qu'il existe deux nombres complexes α et β tels que des matrices ponctuelles A, B, A* de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}^*$ dans le repère $\mathcal{R}_0$ sont liées par

$$A^* = \alpha A + \beta B,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{A}^*$ appartient au faisceau déterminé par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

On vérifiera que, avec la notation introduite en *a*), la relation $\alpha = 0$ s'écrit

$$a'^2 - 4\, bb'' + aa'' + 2a'b' = 0.$$

Montrer que, pour qu'il existe un triangle inscrit dans $\mathcal{A}$ et circonscrit à $\mathcal{B}$, il faut et il suffit que $\alpha = 0$; il existe alors une infinité de tels triangles, tout point de $\mathcal{A}$ pouvant être pris comme sommet.

Vérifier que la condition $\alpha = 0$ équivaut à la suivante : on peut choisir des racines carrées des valeurs propres de la matrice AB^{-1} de manière que la somme de deux de ces racines soit égale à la troisième (on notera que cette dernière condition est indépendante du choix du repère).

Application. — Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé on donne les cercles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'équations

$$(x - d)^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Démontrer qu'il existe un triangle inscrit dans $\mathcal{A}$ et circonscrit à $\mathcal{B}$ si, et seulement si :

$$d^2 - R^2 = \pm 2Rr.$$

d) Démontrer que, pour qu'il existe un quadrilatère inscrit dans $\mathcal{A}$ et circonscrit à $\mathcal{B}$, il faut et il suffit que la conique $\mathcal{C}$, introduite en *a*), soit dégénérée, ce qui équivaut à la condition suivante : l'une des valeurs propres de la matrice AB^{-1} est égale à la somme des deux autres.

Il existe alors une infinité de tels quadrilatères, tout point de $\mathcal{A}$ pouvant être pris comme sommet.

Appliquer ce résultat aux cercles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (cf. fin de *c*); on trouvera

$$\frac{1}{(R + d)^2} + \frac{1}{(R - d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

CHAPITRE XVIII

PROPRIÉTÉS AFFINES DES CONIQUES

243. ***Les coniques du plan affine.*** — Soit Π un plan affine, associé à un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des réels. Désignons par $\mathfrak{L}$ la complétion projective de Π : $\mathfrak{L}$ est la réunion de Π et d'une *droite à l'infini*, que nous désignerons par ∞_Π. Pour la commodité des discussions, nous supposerons que Π et $\mathfrak{L}$ ont été complexifiés (**107**), mais nous désignerons par la même lettre le plan réel (affine ou projectif) et son complexifié.

Soit $\{ O, \vec{i}, \vec{j} \}$ un repère affine (réel) de Π, arbitrairement choisi, dans lequel le point générique M de Π a pour coordonnées (x, y); nous adopterons pour coordonnées homogènes de M les nombres (X, Y, T) tels que

$$x = \frac{X}{T} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{Y}{T},$$

ce qui revient à rapporter $\mathfrak{L}$ au repère $\mathfrak{R}$ dont le triangle de référence a pour sommets O et ∞_X, ∞_Y, points à l'infini des axes $x'Ox$, $y'Oy$, le point unitaire de $\mathfrak{R}$ étant le point de Π dont les coordonnées non homogènes sont $(x = 1, y = 1)$.

Les points de ∞_Π sont ainsi caractérisés par $T = 0$.

1° **Équation non homogène d'une conique.** — La conique Γ du plan projectif $\mathfrak{L}$ attachée à la forme quadratique Φ est l'ensemble des points de $\mathfrak{L}$ dont les coordonnées homogènes vérifient la relation $F(X, Y, T) = 0$ dans laquelle F désigne le polynôme quadratique (à coefficients réels)

$$F(X, Y, T) = aX^2 + a'Y^2 + a''T^2 + 2\,bYT + 2\,b'TX + 2\,b''XY.$$

Nous poserons

$$A = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta = \text{dét } A.$$

La restriction de la conique au plan affine Π (nous la désignerons encore par Γ) est l'ensemble des points de Π dont les coordonnées non homogènes vérifient la relation $F(x, y, 1) = 0$, que nous écrirons $f(x, y) = 0$ avec

$$f(x, y) = ax^2 + 2\,b''xy + a'y^2 + 2\,b'x + 2\,by + a''.$$

Nous poserons :

$$H(x, y) = ax^2 + 2\,b''xy + a'y^2, \qquad B = \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix}, \qquad \delta = \text{dét } B.$$

Nous dirons que $F(X, Y, T) = 0$ et $f(x, y) = 0$ sont respectivement une *équation homogène* et une *équation non homogène* de Γ. Nous éliminerons le cas d'une conique dégénérée contenant la droite ∞_Π ; on aurait alors $a = 0$, $b'' = 0$, $a' = 0$; l'équation non homogène serait du premier degré.

2° **Points à l'infini.** — Les points à l'infini de Γ sont donnés par le système

$$\begin{cases} F(X, Y, T) = 0, \\ T = 0, \end{cases} \quad \text{qui s'écrit} \quad \begin{cases} H(X, Y) = 0 \\ T = 0. \end{cases}$$

Les points à l'infini de Γ sont donc les points à l'infini, U et V, des deux droites qui composent la conique dégénérée, de point double O, dont l'équation est $H(X, Y) = 0$. Nous dirons que ces deux droites sont les *directions asymptotiques* de Γ, menées par O.

3° **Classification des coniques d'un plan affine.** — En tenant compte du rang r de la forme quadratique et de la réalité des points à l'infini, on dispose, dans l'ensemble des coniques du plan affine Π, de la partition suivante

	Points a l'infini		
	imaginaires conjugués	réels et distincts	réels et confondus
$r = 3$, conique propre dite(1) :	ellipse	hyperbole	parabole
$r = 2$, deux droites distinctes : avec point double réel :	imaginaires conjuguées à distance finie	réelles à distance finie	réelles ou imaginaires conjuguées à l'infini
$r = 1$, droite double :			réelle

Chercher la nature d'une conique du plan affine Π, c'est indiquer sa place dans la partition précédente.

Remarque I. — Une *parabole* est ainsi définie comme *conique propre tangente à la droite à l'infini.* Il en résulte que $G(u, v, h) = 0$ est l'équation tangentielle d'une parabole si, et seulement si, le discriminant du polynôme quadratique G n'est pas nul et si $G(0, 0, 1) = 0$, c'est-à-dire si le coefficient de h^2 dans le polynôme G est nul.

Remarque II. — Une conique propre imaginaire (220) a nécessairement deux points à l'infini imaginaires conjugués; il s'agit donc d'une ellipse. Nous sommes ainsi conduits à distinguer les *ellipses réelles* et les *ellipses imaginaires.*

(1) Le lecteur comprendra la raison du choix de ces dénominations quand il étudiera les coniques en géométrie euclidienne.

3° **Recherche pratique de la nature d'une conique de Π, donnée par son équation** $f(x, y) = 0$. — Nous reprenons la notation du 1°.

a) On cherche le rang *r* de la matrice A.

b) La réalité des points à l'infini, U et V, est liée au signe (1) de

$$\delta = aa' - b''^2 :$$

$$\begin{cases} \delta > 0 : & \text{U et V imaginaires conjugués,} \\ \delta < 0 : & \text{U et V réels et distincts,} \\ \delta = 0 : & \text{U et V réels et confondus.} \end{cases}$$

c) Quand on a déterminé *r* et étudié le signe de δ, il ne subsiste une ambiguïté que si la conique est une ellipse : théoriquement on doit alors rechercher la signature de la forme quadratique (il arrive que l'on puisse lever l'ambiguïté en remarquant que, si une ellipse a un point réel, elle est réelle). Rappelons que la décomposition en carrés du polynôme quadratique F(X, Y, T) fournit à la fois le rang et la signature de la forme quadratique.

244. ***Centre d'une conique.*** — Soit Γ une conique de la complétion projective $\mathfrak{L}$ du plan affine Π.

1° **Notion de centre.** — Un point ω de $\mathfrak{L}$, à distance finie, n'appartenant pas à Γ, est un centre de symétrie de Γ si, et seulement si, pour toute droite D qui passe par ω et coupe Γ en deux points M′ et M″ situés à distance finie, ω est le milieu du segment M′M″, ou encore le conjugué harmonique du point à l'infini de D par rapport à M′ et M″.

Par extension, nous poserons :

DÉFINITION. — **Un point à distance finie** (resp. **infinie) est dit centre véritable** (resp. **à l'infini) de la conique Γ s'il est conjugué, par rapport à Γ, de tout point de la droite à l'infini.**

2° **Conséquences de la définition.** — *a*) Toute conique propre Γ admet un, et un seul, centre, le pôle ω de la droite à l'infini; ce centre est réel. Dans le cas d'une parabole, le centre ω est le point de contact de la conique et de la droite à l'infini. Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, le centre ω, situé à distance finie, est le point d'intersection des tangentes à Γ en ses points à l'infini; ces droites, qui sont parallèles aux directions asymptotiques, sont dites *asymptotes de* Γ; elles sont réelles dans le cas d'une hyperbole, imaginaires conjuguées dans celui d'une ellipse.

Si la conique propre Γ a pour équation tangentielle $G(u, v, h) = 0$, le

(1) Nous vérifierons par le calcul au n° 251, 1° que le signe de δ (et sa nullité éventuelle) sont indépendants du choix du repère affine $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$

centre, pôle de la droite à l'infini de coordonnées tangentielles ($u_0 = 0, v_0 = 0, h_0 = 1$), a pour coordonnées homogènes

$$X_0 = G'_u(0, 0, 1), \quad Y_0 = G'_v(0, 0, 1), \quad T_0 = G'_h(0, 0, 1).$$

b) Tout point double d'une conique dégénérée en est un centre.

c) Soit Γ une conique dégénérée, formée par deux droites distinctes réelles ou imaginaires conjuguées qui se coupent en un point réel ω, à distance finie. Le point double ω de Γ en est un centre. Il est l'unique centre de Γ : en effet les polaires, par rapport à Γ, de deux points distincts de ∞_{II} n'ont en commun que le point ω. Les deux droites qui constituent Γ étant les tangentes à Γ en ses points à l'infini, nous pourrons considérer ces droites comme des asymptotes de Γ.

d) Soit Γ une conique dégénérée, formée par deux droites parallèles, D_1 et D_2, réelles ou imaginaires conjuguées, dont le point à l'infini commun (réel) est U. Tout point de ∞_{II}, autre que U, a pour polaire par rapport à Γ la droite D conjuguée harmonique de ∞_{II} par rapport à D_1 et D_2. Il en résulte que la droite D, qui est d'ailleurs réelle, constitue le lieu des centres de Γ. Élémentairement, $D - \{U\}$ est le lieu du milieu du segment M_1M_2 quand M_1 parcourt $D_1 - \{U\}$ et M_2 parcourt $D_2 - \{U\}$.

Tous les cas de la classification affine des coniques ayant été envisagés, la discussion est terminée.

Nous allons en retrouver les résultats par le calcul.

3° **Recherche analytique des centres.** — Les notations sont celles du n° 243, 1°.

Le point $\omega(X_0, Y_0, T_0)$ de $\mathcal{L}$ est centre de Γ si, et seulement si, la condition de conjugaison,

$$XF'_X(X_0, Y_0, T_0) + YF'_Y(X_0, Y_0, T_0) + TF'_T(X_0, Y_0, T_0) = 0,$$

est vérifiée, pour $T = 0$, quels que soient X et Y (non nuls tous les deux), c'est-à-dire si

$$F'_X(X_0, Y_0, T_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad F'_Y(X_0, Y_0, T_0) = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer :

Les centres de Γ sont les points dont les coordonnées homogènes (X, Y, T) vérifient le système

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}F'_X(X, Y, T) = 0 \\ \frac{1}{2}F'_Y(X, Y, T) = 0 \end{cases} \qquad \text{qui s'explicite} \qquad \begin{cases} aX + b''Y + b'T = 0 \\ b''X + a'Y + bT = 0. \end{cases}$$

La discussion fait intervenir les trois nombres

$$\xi = \begin{vmatrix} b'' & b' \\ a' & b \end{vmatrix}, \qquad \eta = -\begin{vmatrix} a & b' \\ b'' & b \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix}$$

qui sont les cofacteurs des éléments de la dernière ligne et aussi de la dernière colonne du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$$

Notons que la nullité simultanée de ξ, η, δ exige $\Delta = 0$; d'autre part δ est intervenu dans l'étude des points à l'infini de Γ.

a) En général ξ, η, δ ne sont pas nuls tous les trois. Le système (1) représente deux droites distinctes; il fournit un centre et un seul, le point ω dont un système de coordonnées homogènes est précisément ξ, η, δ; ω est à l'infini si, et seulement si, $\delta = 0$, c'est-à-dire si les points à l'infini de Γ sont confondus.

b) Nous avons vu que ξ, η, δ ne peuvent être simultanément nuls que si $\Delta = 0$, $\delta = 0$, c'est-à-dire si Γ est la réunion de deux droites parallèles.

Inversement, s'il en est ainsi, Γ admet un point double à l'infini $(X_1, Y_1, 0)$, avec X_1 et Y_1 non nuls tous les deux. F'_X, F'_Y, F'_T prenant la valeur 0 en un point double, on a

$$aX_1 + b''Y_1 = 0, \qquad b''X_1 + a'Y_1 = 0, \qquad b'X_1 + bY_1 = 0,$$

ce qui exige $\qquad \xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \delta = 0.$

Le système (1) représente dans ce cas deux droites confondues : la conique Γ admet une infinité de centres.

4° « **Équation au centre** » **d'une conique à centre.** — Nous venons de voir qu'une conique dont les points à l'infini sont distincts admet un centre unique, réel, à distance finie (centre véritable); une telle conique est dite *conique à centre.*

Dans le plan Π initialement rapporté à un repère $\{ O, \vec{i}, \vec{j} \}$ considérons une conique à centre Γ, d'équation homogène $F(X, Y, T) = 0$ et d'équation non homogène :

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{avec} \qquad f(x, y) = H(x, y) + 2\,b'x + 2\,by + a'',$$

dont le centre ω a pour coordonnées (x_0, y_0).

Dans le repère $\{ \omega, \vec{i}, \vec{j} \}$, Γ admet pour nouvelle équation : $g(x', y') = 0$, avec

$$(2) \qquad g(x', y') = f(x, y) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Explicitons :

$$g(x', y') = H(x', y') + 2\,b'_1x' + 2\,b_1y' + a''_1$$

La conique Γ' symétrique de Γ par rapport à ω a pour équation dans $\{\omega, \vec{i}, \vec{j}\}$

$$g_1(x', y') = 0 \qquad \text{avec} \qquad g_1(x', y') = g(-x', -y')$$

ou
$$g_1(x', y') = \mathrm{H}(x', y') - 2\,b_1' x' - 2\,b_1 y' + a_1''$$

En écrivant que Γ et Γ' sont confondues, c'est-à-dire que les coefficients des polynômes du second degré $g(x', y')$ et $g_1(x', y')$ sont proportionnels, nous obtenons :

$$b_1' = 0 \qquad \text{et} \qquad b_1 = 0.$$

Autrement dit $g(x', y')$ se réduit à : $\mathrm{H}(x', y') + a_1''$.

Cela posé, considérons la conique dégénérée, Γ_0, formée par les asymptotes de Γ. Dans le repère $\{\omega, \vec{i}, \vec{j}\}$ elle admet l'équation

$$\mathrm{H}(x', y') = 0 \qquad \text{ou} \qquad g(x', y') - a_1'' = 0.$$

Il en résulte, d'après (2), que Γ_0 admet, dans le repère initial $\{\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\}$ l'équation non homogène

$$f(x, y) - a_1'' = 0$$

et, par suite, l'équation homogène

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{T}) - a_1''\mathrm{T}^2 = 0$$

En écrivant que Γ_0 est dégénérée, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' - a_1'' \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a & b'' & b' - 0 \\ b'' & a' & b - 0 \\ b' & b & a'' - a_1'' \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne :

$$\Delta - \delta a_1'' = 0 \qquad \text{et, puisque} \qquad \delta \neq 0, \qquad a_1'' = \frac{\Delta}{\delta}.$$

En conclusion, Γ admet, dans le repère $\{\omega, \vec{i}, \vec{j}\}$, l'équation non homogène

$$\mathrm{H}(x', y') + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

qui est dite *équation au centre.*

Corollaire I. — Dans le repère initial $\{\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\}$, la conique Γ_0 formée par les asymptotes de Γ admet l'équation

$$f(x, y) - \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Corollaire II. — Une conique à centre, Γ, admettant dans un repère $\{\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\}$ l'équation non homogène $f(x, y) = 0$, l'équation générale des coniques de mêmes asymptotes que Γ est, dans le même repère,

$$f(x, y) + k = 0.$$

On peut démontrer cette proposition en passant par l'intermédiaire de la conique dégénérée Γ_0. On peut aussi remarquer que les coniques étudiées sont les coniques bitangentes à Γ en ses points à l'infini U et V; elles constituent le faisceau de coniques déterminé par Γ et la droite double ∞_{Π} (droite double mise à part); leur équation générale est donc, en coordonnées homogènes :

$$F(X, Y, T) + kT^2 = 0.$$

245. ***Diamètres d'une conique.*** — 1° **Définition.** — Soit Γ une conique de la complétion projective $\mathscr{L}$ d'un plan affine Π et soit Δ une direction de droite de Π dont le point à l'infini, ∞_Δ, n'est pas un point double de Γ, ce qui revient à supposer que Γ n'est pas dégénérée en deux droites parallèles, ayant pour direction Δ. Posons :

<u>Définition</u>. — **On appelle diamètre de la direction de droite Δ, par rapport à la conique Γ, la polaire D du point ∞_Δ par rapport à Γ.**

Si ∞_Δ n'est pas un point de Γ, c'est-à-dire si Δ n'est pas une direction asymptotique de Γ, $D - \{\infty_D\}$ est le milieu des cordes de Γ dont la direction est Δ.

Si ∞_Δ est un point simple de Γ, D est la tangente en ce point à Γ : une asymptote ou la droite à l'infini selon que Γ est une conique à centre ou une parabole.

2° **Équation du diamètre D de la direction de droite Δ.** — Reprenons les notations du n° **243**, 1° et désignons par $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ un vecteur directeur de Δ, ce qui revient à désigner par $(\alpha, \beta, 0)$ un système de coordonnées homogènes de ∞_Δ.

Le diamètre D de la direction Δ admet l'équation homogène

$$\alpha F'_X(X, Y, T) + \beta F'_Y(X, Y, T) = 0$$

ou

$$\alpha(aX + b''Y + b'T) + \beta(b''X + a'Y + bT) = 0$$

et, par suite, l'équation non homogène

(1) $\quad \alpha(ax + b''y + b') + \beta(b''x + a'y + b) = 0 \quad$ ou $\quad \alpha f'_x(x, y) + \beta f'_y(x, y) = 0.$

Remarque. — Le terme constant, a'', de l'équation non homogène n'intervenant pas dans (1), le diamètre D d'une direction de droite donnée Δ est commun à toutes les coniques à centre qui admettent les mêmes asymptotes. On en déduit :

Théorème. — **La droite déterminée par deux points à distance finie, M′ et M″, d'une hyperbole Γ coupe les asymptotes de Γ en deux points N′ et N″ tels que les milieux des segments M′M″ et N′N″ sont confondus.**

3° **Propriétés des diamètres.** — *a*) Tout centre ω de Γ étant conjugué de tout point de ∞_{Π} et en particulier de ∞_Δ, il en résulte que la polaire de ∞_Δ passe par ω. Autrement dit, *le diamètre d'une direction quelconque contient tout centre de* Γ.

b) Dans le cas d'une conique dégénérée en deux droites parallèles, la droite des centres est diamètre de toute direction non asymptotique; la direction asymptotique n'a pas de diamètre.

c) Dans tous les autres cas, Γ admet un, et un seul centre ω (éventuellement à l'infini). Montrons qu'alors *toute droite* D *passant par* ω *est le diamètre d'une, et d'une seule, direction* Δ; en effet

I) si Γ est propre, ∞_Δ est le pôle de D par rapport à Γ;

II) si Γ est dégénérée en deux droites qui se coupent en ω, à distance finie, et admettent les points à l'infini distincts U et V, ∞_Δ est le conjugué par rapport à U et V du point à l'infini, ∞_D, de D.

d) Si Γ est une conique propre, le diamètre D de la direction Δ, non asymptotique, coupe Γ en deux points E et E'; ces points sont conjugués de ∞_Δ par rapport à Γ; leurs polaires passent par ∞_Δ; autrement dit les tangentes en E et E' à Γ sont, en général, parallèles à Δ (si Γ est une parabole, l'un des deux points, E' par exemple, est le point de contact de la courbe et de la droite de l'infini; la tangente en E' à Γ est la droite de l'infini).

e) Si Γ est une conique propre, un point P de Π appartient au diamètre D d'une direction donnée Δ si, et seulement si, la polaire de P contient ∞_Δ c'est-à-dire si P est le pôle d'une droite parallèle à Δ.

Nous résumerons cette étude en distinguant deux cas de figure.

RÉSUMÉ. — I. Γ *est une ellipse ou une hyperbole et* Δ *n'est pas une direction asymptotique de* Γ. Le diamètre, D, de la direction Δ est le lieu du milieu Q de la corde variable M'M'' de Γ, parallèle à Δ; D est également le lieu du pôle P de la droite M'M'' (point d'intersection des tangentes en M' et M'' à Γ); enfin D est déterminé par les points de contact, E et E', des deux tangentes à Γ qui sont parallèles à Δ.

Ces résultats sont condensés dans la figure 100 : on notera que P et Q sont conjugués par rapport à E et E'.

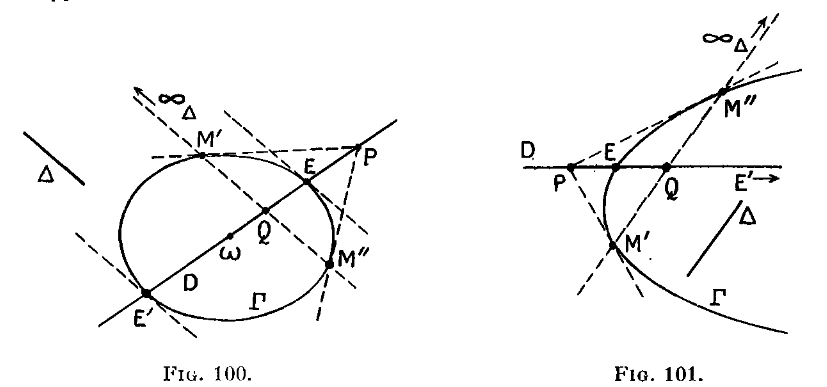


FIG. 100. FIG. 101.

II. Γ *est une parabole et* Δ *n'est pas la direction asymptotique double de* Γ. Le diamètre, D, de la direction Δ est le lieu du milieu Q de la corde variable M'M'' de Γ, parallèle à Δ; D est également le lieu du pôle P de M'M''; D passe par le point de contact, E, de la tangente à Γ qui est parallèle à Δ et aussi par le point de contact, E' ou U, de Γ et de ∞_Π. On notera que, sur la figure 101, E est le milieu du segment PQ.

246. ***Directions de droites conjuguées par rapport à une conique.*** — 1° DÉFINITION. — **Deux directions de droites, Δ et Δ', sont dites conjuguées par rapport à la conique Γ si leurs points à l'infini, ∞_{Δ} et $\infty_{\Delta'}$, sont conjugués par rapport à Γ.**

Si les points à l'infini, U et V, de Γ sont distincts (conique à centre), cela signifie que ∞_{Δ} et $\infty_{\Delta'}$ sont conjugués harmoniques par rapport à U et V : toute direction de droite admet donc une, et une seule, direction conjuguée.

Si les points à l'infini de Γ sont confondus en U, le point U est conjugué de tout point à l'infini, par rapport à Γ : toute direction non asymptotique admet une, et une seule, direction conjuguée, qui est la direction asymptotique double.

2° **Traduction analytique.** — Reprenons les notations du n° **243**; désignons par $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ et $\alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j}$ des vecteurs directeurs de Δ et Δ', ce qui revient à désigner par $(\alpha, \beta, 0)$ et $(\alpha', \beta', 0)$ des systèmes de coordonnées homogènes de ∞_{Δ} et $\infty_{\Delta'}$.

La conjugaison des directions de droites Δ et Δ' se traduit par

$$\alpha F'_X(\alpha', \beta', 0) + \beta F'_Y(\alpha', \beta', 0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha' F'_X(\alpha, \beta, 0) + \beta' F'_Y(\alpha, \beta, 0) = 0,$$

ce qui s'écrit, de façon plus symétrique,

$$(1) \qquad a\alpha\alpha' + b''(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a'\beta\beta' = 0,$$

c'est-à-dire, en faisant intervenir le polynôme quadratique

$$H(X, Y) = aX^2 + 2b''XY + a'Y^2,$$

$$\alpha H'_X(\alpha', \beta') + \beta H'_Y(\alpha', \beta') = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha' H'_X(\alpha, \beta) + \beta' H'_Y(\alpha, \beta) = 0.$$

On retrouve ainsi le fait que seuls les points à l'infini de Γ interviennent dans la conjugaison des deux directions Δ et Δ' par rapport à Γ.

REMARQUE. — Si aucune des directions Δ et Δ' n'est celle de l'axe $y'Oy$, nous pouvons introduire les coefficients directeurs $m = \frac{\beta}{\alpha}$, $m' = \frac{\beta'}{\alpha'}$ et remplacer (1) par

$$(2) \qquad a'mm' + b''(m + m') + a = 0.$$

247. ***Diamètres conjugués d'une conique à centre.*** — 1° DÉFINITION. — **On appelle diamètres conjugués d'une conique à centre Γ tout couple de deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux asymptotes de Γ.**

Autrement dit, il s'agit de deux droites, D et D', qui joignent le centre ω de Γ à deux points à l'infini, ∞_D et $\infty_{D'}$, conjugués harmoniques par rapport aux points à l'infini de Γ, U et V, qui sont distincts; il s'agit également des représentants, menés par le centre ω, de deux directions conjuguées par rapport à la conique.

D (resp. D') est la polaire de $\infty_{D'}$, (resp. ∞_D), par rapport à Γ, c'est-à-dire le diamètre de la direction de droite dont un représentant est D' (resp. D).

2° **Équation d'une conique à centre Γ, rapportée à deux diamètres conjugués.** — Pour que les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ du repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ soient deux diamètres conjugués de la conique à centre il faut, et il suffit, que O soit le centre de Γ et que les directions de vecteurs directeurs $\vec{i}$ ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) et $\vec{j}$ ($\alpha' = 0$, $\beta' = 1$) soient conjuguées.

O est centre si, et seulement si, l'équation est de la forme (cf. équation au centre)

$$ax^2 + 2\,b''xy + a'y^2 + a'' = 0.$$

Cette condition étant remplie, la conjugaison des directions des axes s'écrit $b'' = 0$.

Finalement, suivant que $a'' \neq 0$ ou $a'' = 0$, nous obtenons les deux formes

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 0 \qquad (2)$$

qui correspondent respectivement à une conique propre et à une conique dégénérée.

3° **Équation réduite commune à une parabole, à une hyperbole, et à une ellipse réelle.** — Prenons pour origine un point réel, arbitrairement choisi, O, de la conique Γ; pour axe $y'Oy$ la tangente O à Γ; pour axe $x'Ox$ le diamètre de la direction de $y'Oy$ (ce diamètre est une droite qui passe par le point de contact O de la tangente $y'Oy$).

L'équation non homogène de Γ, conique qui passe par l'origine, est de la forme

$$ax^2 + 2\,b''xy + a'y^2 + 2\,b'x + 2\,by = 0.$$

Le diamètre de la direction Oy ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) a pour équation

$$b''x + a'y + b = 0;$$

comme il coïncide avec $x'Ox$, nécessairement : $b'' = 0$, $b = 0$, $a' \neq 0$.

L'équation de Γ ne peut donc qu'être de la forme

$$(2) \qquad y^2 - qx^2 - 2\,px = 0.$$

Inversement, l'équation (2) représente une conique qui passe par O, pour laquelle $x'Ox$ est le diamètre de la direction de $y'Oy$.

Si $p = 0$, il s'agit d'une conique dégénérée.

Si $p \neq 0$, il s'agit d'une conique propre ($\Delta = -p^2$) qui est une parabole si $q = 0$, une hyperbole si $q > 0$ et une ellipse réelle si $q < 0$.

Remarque. — Soient Γ et Γ_1 deux paraboles dont les équations non homogènes, dans un repère quelconque, ne diffèrent que par le terme constant (propriété qui est conservée par un changement de repère). Un nouveau repère,

$\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, étant choisi de façon que $y'Oy$ soit une tangente à Γ et $x'Ox$ le diamètre de la direction de $y'Oy$, les nouvelles équations des deux coniques sont de la forme

$$(\Gamma)\ y^2 - 2\,px = 0; \qquad (\Gamma_1)\ y^2 - 2\,px + k = 0 \qquad \text{ou} \qquad y^2 - 2\,p(x - x_0) = 0.$$

Autrement dit, on passe d'une parabole à l'autre par une translation parallèle à la direction asymptotique double, commune aux deux coniques.

Notons que les équations homogènes sont de la forme

$$F(X, Y, T) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(X, Y, T) + kT^2 = 0;$$

les deux paraboles sont surosculatrices en leur point de contact, commun, avec la droite l'infini.

248. ***Les faisceaux de coniques d'un plan affine réel.*** — Les résultats de l'étude des faisceaux faite dans un plan projectif restent valables, mais nous devons tenir compte ici de deux éléments supplémentaires : les questions de réalité et le rôle particulier joué par la droite à l'infini, ∞_{Π}.

1° **Discussion de la réalité des coniques dégénérées d'un faisceau ponctuel.** — Les notations sont celles du n° 248. Nous utiliserons les résultats suivants : la droite déterminée par deux points imaginaires conjugués est réelle; une conique qui passe par un point imaginaire passe par le point imaginaire conjugué; si une conique dégénérée est formée de deux droites distinctes, celles-ci sont soit réelles soit imaginaires conjugués, de toute façon le point double de la conique est réel; si une conique dégénérée est formée de deux droites confondues, celles-ci sont réelles. Cela posé, on obtient sans difficulté les résultats suivants :

Ier type : ABCD. — Les pôles doubles, qui sont les points doubles, P, Q, R des coniques dégénérées (AB, CD), (AC, DB), (AD, BC) sont réels. Deux cas sont possibles :

a) A, B, C, D réels : les trois coniques dégénérées sont réelles.

b) C et D imaginaires conjugués; A et B soit réels, soit imaginaires conjugués : le couple (AB, CD) constitue la seule conique dégénérée formée de deux droites réelles.

2e type : A^2BC. — A est réel (sans quoi le point imaginaire conjugué serait un point fixe d'ordre deux); B et C sont soit réels, soit imaginaires conjugués : la conique dégénérée (AB, AC) est formée, suivant le cas, de deux droites réelles ou de deux droites imaginaires conjuguées; la conique dégénérée (Δ, BC) est formée de deux droites réelles.

3e type : A^2B^2. — La droite double AB est réelle. La seconde conique dégénérée est formée par les deux droites Δ et Δ' qui sont réelles ou imaginaires conjuguées suivant que A et B sont réels ou imaginaires conjugués.

4e type : A³B et *5e type* A⁴. — Les points fixes sont nécessairement réels (cf. 2e type) et la conique dégénérée est formée de deux droites réelles.

2° **Paraboles d'un faisceau.** — *a*) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau ponctuel qui n'admet aucun point fixe à l'infini. L'involution de Desargues (239) relative à la droite $L = \infty_{\Pi}$ admet deux points doubles distincts. Chacun d'eux est soit le point double d'une conique dégénérée de $\mathcal{F}$ (formée de deux droites parallèles, éventuellement confondues), soit le point de contact de ∞_{Π} et d'une parabole du faisceau. Retenons qu'*un faisceau ponctuel contient en général deux paraboles.*

b) Un faisceau tangentiel qui n'admet pas ∞_{Π} pour tangente fixe contient une, et une seule parabole; dans un faisceau tangentiel dont ∞_{Π} est tangente fixe, toutes les coniques propres sont des paraboles.

3° **Lieu des centres des coniques d'un faisceau.** — *a*) Compte-tenu du fait que le pôle de ∞_{Π} par rapport à la conique Γ est le centre de Γ, on a, par application du théorème du n° 241, dans le cas où $L = \infty_{\Pi}$:

THÉORÈME. — *Le lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel qui n'admet pas de pôle double à l'infini est une conique.*

On en connaît, en général, onze points remarquables.

b) Par application du théorème du n° 242, 5° :

THÉORÈME. — *Le lieu des centres des coniques d'un faisceau tangentiel est en général une droite.*

Il n'y a exception que si ∞_{Π} est tangente double d'une conique dégénérée du faisceau.

EXERCICES

Un certain nombre d'exercices proposés ci-dessous font appel à des notions métriques; on adoptera alors un repère orthonormé.

1. — Lieu des centres des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés.

2. — *a*) Soit Γ une conique à centre; le lieu des points d'où l'on peut mener à Γ deux tangentes rectangulaires est un cercle Ω, concentrique à Γ (Ω est appelé cercle *orthoptique* de Γ); discuter sa réalité.

b) Déterminer la conique transformée par polaires réciproques de Ω par rapport à Γ.

3. — Déterminer la conique transformée par polaires réciproques :

a) d'une hyperbole équilatère par rapport à un cercle concentrique;

b) de la parabole P ($y^2 - 2px = 0$) par rapport à la parabole Q ($y^2 - 2qx = 0$); dans quel cas retrouve-t-on P?

4. — On donne un repère orthonormé Ox, Oy et la droite Δ d'équation $x = a$. Soit P la parabole de foyer O dont la directrice est Δ. Soit C un cercle quelconque centré sur Δ et passant par O.

a) Démontrer qu'il existe une conique Γ telle que deux quelconques des coniques P, C, Γ soient polaires réciproques par rapport à la troisième.

b) Évaluer le birapport des quatre points d'intersection d'une des coniques P, C, Γ avec chacune des deux autres (*ce birapport est* — *j ou* — *j*²).

c) P restant fixe, et C variant, démontrer que Γ reste tangente à quatre droites fixes.

5. — Le centre d'une hyperbole équilatère H et le pôle d'une droite D, par rapport à H, sont conjugués par rapport au cercle qui admet pour extrémités d'un diamètre les points d'intersection de H et D (solutions analytique et géométrique).

6. — Lieu des centres des hyperboles équilatères admettant un triangle autopolaire donné.

7. — Enveloppe des paraboles admettant un triangle autopolaire donné.

8. — Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une ellipse de grandeur constante qui tourne autour de son centre.

9. — *a*) On donne une conique Γ et on désigne par P et Q les points de contact des tangentes à Γ menées par un point M quelconque. Trouver le lieu de M pour que le cercle circonscrit au triangle MPQ soit tangent à Γ. (On distinguera deux cas, suivant que Γ est une conique à centre, ou une parabole).

b) Si Γ est une conique à centre, trouver le lieu de M pour que le cercle circonscrit au triangle MPQ passe par le centre de Γ.

10. — Lieu du sommet d'une parabole variable qui est osculatrice à une parabole donnée Γ et qui a un axe perpendiculaire à celui de Γ.

11. — Trouver l'enveloppe des cordes communes à une conique à centre donnée, Γ, et à un cercle de rayon variable, centré en un point donné de l'un des axes de Γ.

12. — Enveloppe des asymptotes d'une hyperbole variable bitangente à une hyperbole équilatère donnée en deux points donnés.

13. — *a*) Le cercle osculateur à une ellipse donnée E au point M_n recoupe la courbe en M_{n+1}. Déterminer M_1 de façon que $M_4 = M_1$.

b) Retrouver le résultat précédent en utilisant la proposition suivante, que l'on démontrera sans calcul : la somme des paramètres des points d'intersection de l'ellipse

$$x = a \cos u \qquad y = b \sin u$$

et d'un cercle quelconque est nulle (modulo 2π).

14. — On donne une ellipse E de centre O et deux points A et B de E. Un cercle variable C, qui passe par A et B, recoupe E en P et Q. Trouver le lieu du point d'intersection de la droite PQ et de la polaire de O par rapport à C.

15. — Montrer que l'enveloppe des cordes de la cissoïde droite : $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ qui sont vues du point double O sous un angle droit est une hyperbole dont on recherchera le centre, les asymptotes et les sommets.

16. — Lieu du centre et enveloppe des axes d'une hyperbole équilatère variable dont on donne un sommet et un point.

17. — Enveloppe du second côté d'un angle droit dont le sommet décrit un cercle donné C et dont le premier côté reste tangent à une ellipse donnée, concentrique à C.

18. — Étant donnée une parabole Γ existe-t-il une conique C qui coupe Γ en quatre points tels que, en chacun d'eux, les tangentes à Γ et à C sont perpendiculaires?

19. — On donne une ellipse E, de foyers F et F'. Trouver le lieu d'un point M auquel on peut associer un cercle C qui passe par F et F' de façon que les tangentes menées de M à C et l'une des tangentes menées de M à E forment un faisceau régulier.

CHAPITRE XIX

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES CONIQUES

I. ÉLÉMENTS ISOTROPES. POINTS CYCLIQUES

249. ***Éléments isotropes.*** — Soit Π un plan affine réel, associé à un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension 2.

Nous supposons que, d'une part, $\vec{E}$ et Π ont été munis d'une structure euclidienne par l'introduction d'un produit scalaire sur $\vec{E}$ et que, d'autre part, $\vec{E}$ et Π ont été complexifiés. Nous avons alors appris (**104, 106**) à prolonger le produit scalaire φ en une forme bilinéaire symétrique φ_C sur l'espace vectoriel complexifié, appelée — elle aussi — produit scalaire euclidien (à ne pas confondre avec le prolongement ψ_C de φ en un produit scalaire hermitien). Nous avons posé :

<u>Définition I.</u> — **Deux vecteurs, réels ou imaginaires, sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.**

<u>Définition II.</u> — **Un vecteur est isotrope si son carré scalaire est nul, c'est-à-dire s'il est orthogonal à lui-même.**

Nous avons montré (**106**) que, dans tout repère orthonormé réel $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ du plan affine Π complexifié, le produit scalaire des vecteurs

$$\vec{V} = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{V}' = \xi'\vec{i} + \eta'\vec{j}$$

a pour expression : $\vec{V}.\vec{V}' = \xi\xi' + \eta\eta'$.

Il en résulte

$$\vec{V} \text{ isotrope} \iff \xi^2 + \eta^2 = 0 \iff \begin{cases} \text{ou} & \vec{V} = \vec{0} \\ \text{ou} & \eta = \pm i\xi. \end{cases}$$

Cela nous conduit à poser :

<u>Définition III.</u> — **Une droite est dite isotrope si elle admet un vecteur directeur isotrope** (non nul), **c'est-à-dire si, dans un repère orthonormé réel quelconque, elle a pour coefficient directeur** $+i$ **ou** $-i$.

L'indifférence du choix du repère orthonormé tient à la raison suivante : Quand on passe du repère orthonormé $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ au repère orthonormé

$\{O, \vec{i'}, \vec{j'}\}$ les formules de changement de coordonnées sont de la forme

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ suivant que les deux repères sont de même sens, ou de sens contraires. On en déduit :

$$\begin{cases} y - ix = e^{i\theta} \ (\varepsilon y' - ix') \\ y + ix = e^{-i\theta} \ (\varepsilon y' + ix') \end{cases}$$

de sorte que si une droite a dans le premier repère $+ i$ (resp. $- i$) pour coefficient directeur, elle a dans le second repère εi (resp. $- \varepsilon i$) pour coefficient directeur.

Conséquence. — Par un point donné M_0 (x_0, y_0) du plan Π passent deux droites isotropes, dont les équations sont

$$y - y_0 = i (x - x_0) \qquad \text{et} \qquad y - y_0 = - i (x - x_0).$$

L'ensemble de ces droites, qui admet pour équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0,$$

est le lieu des points M (x, y) du plan Π tels que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ a un carré scalaire nul (rappelons qu'il n'est en général pas question de parler de la norme du vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ ou de la distance des points M_0 et M).

250. ***Points cycliques.*** — Les notations sont celles du n° 249. Introduisons maintenant la complétion projective $\mathfrak{L}$ du plan affine euclidien Π. $\mathfrak{L}$ est, lui aussi, complexifié.

1° Définition. — **On appelle points cycliques du plan $\mathfrak{L}$ les points à l'infini des deux directions de droites isotropes de $\mathfrak{L}$.**

Autrement dit les points cycliques de $\mathfrak{L}$ sont les points I et J de la droite à l'infini ∞_Π qui admettent pour coordonnées homogènes :

$$(X = 1, \ Y = i, \ T = 0) \qquad \text{et} \qquad (X = 1, \ Y = - i, \ T = 0)$$

et cela quel que soit le choix du repère orthonormé réel $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ auquel on rapporte le plan Π.

2° **Interprétation de l'orthogonalité de deux droites à l'aide des points cycliques.** — Soient D et D' deux droites de Π, non parallèles, de vecteurs directeurs

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{V'} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$$

et de points à l'infini : $\infty_D \ (a, b, 0)$ et $\infty_{D'} (a', b', 0)$.

Étudions le birapport ρ des droites D et D' et des isotropes menées par le point d'intersection de D et D'. En coupant les quatre droites par la droite à l'infini, on obtient

$$\rho = (\infty_D, \infty_{D'}, I, J) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ i & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a' \\ i & b' \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ -i & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a' \\ -i & b' \end{vmatrix}}$$

Autrement dit :

(1) $$\rho = \frac{aa' + bb' - i(ab' - ba')}{aa' + bb' + i(ab' - ba')}$$

On en déduit

$$\rho = -1 \iff aa' + bb' = 0,$$

ce qui permet d'énoncer :

THÉORÈME. — **Dans un plan euclidien complexifié, deux droites sont orthogonales si, et seulement si, elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux isotropes menées par leur point d'intersection.**

3° **Formule de Laguerre.** — Si les droites D et D' sont réelles et si le plan Π est orienté, nous savons (131) que la mesure θ de l'angle de D et D' vérifie

$$\cos\theta = \frac{aa' + bb'}{\|\vec{V}\|\|\vec{V'}\|} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{ab' - ba'}{\|\vec{V}\|\|\vec{V'}\|}$$

La formule (1) du 2° s'écrit alors

$$\rho = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} \qquad \text{ou} \qquad e^{-i2\theta}$$

Autrement dit, on a la formule, attribuée à Laguerre,

$$\boxed{(\infty_D, \infty_{D'}, I, J) = \cos 2\theta - i \sin 2\theta}$$

4° **Application à l'homographie.** — Dans le plan $\mathcal{P}$ complexifié considérons un faisceau de droites $\mathcal{F}$ dont le point fixe O est réel et situé à distance finie. Soit h une application homographique de $\mathcal{F}$ sur lui-même.

a) Supposons d'abord que h admet les isotropes de O pour rayons invariants. En coupant les droites de $\mathcal{F}$ par ∞_Π et en utilisant le n° **87**, 3°, nous constatons que $D' = h(D)$ se traduit par

$$(\infty_D, \infty_{D'}, I, J) = k.$$

S'il existe une droite réelle D_0 qui est transformée par h en une droite réelle D'_0, nous avons, d'après le 3° : $k = e^{-i2\theta_0}$, en désignant par θ_0 la mesure de l'angle de D_0 avec D'_0. On en déduit que toute droite réelle D est transformée par h en une droite réelle D' telle que

$$\text{angle}(D, D') = \text{angle}(D_0, D'_0).$$

Autrement dit, h admet une restriction $\widehat{h}$ au plan $\mathcal{L}$ non complexifié et $\widehat{h}$ est engendrée par un angle de grandeur constante qui tourne autour de son sommet O.

b) Supposons maintenant que h admet une restriction $\widehat{h}$ au plan $\mathcal{L}$ non complexifié et que $\widehat{h}$ est engendrée par un angle de mesure constante qui tourne autour de son sommet O.

Soit D_0 une droite réelle de $\mathcal{F}$ et D'_0 l'image de D_0 par $\widehat{h}$; désignons par k l'application homographique de $\mathcal{F}$ sur lui-même qui admet les isotropes de O pour rayons invariants et transforme D_0 et D'_0. En utilisant *a*) nous constatons que h et k ont une infinité de couples communs, ce qui entraîne $h = k$. Il en résulte que h admet les isotropes de O pour rayons invariants.

5° **Courbes circulaires.** — Rappelons (IV, n° 58) que dans le plan $\mathcal{L}$ complexifié et rapporté à un repère réel quelconque, une courbe algébrique est l'ensemble des points réels ou imaginaires dont un système de coordonnées homogènes vérifie l'équation

$$F(X, Y, T) = 0,$$

dans laquelle F désigne un polynôme homogène à coefficients réels (1).

DÉFINITION. — **Une courbe algébrique du plan euclidien complexifié est dite circulaire si elle contient les points cycliques.**

Autrement dit la courbe Γ qui admet pour équation, dans un repère orthonormé, $F(X, Y, T) = 0$ est circulaire si, et seulement si on a

$$F(1, i, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(1, -i, 0) = 0.$$

Pour étudier cette condition, ordonnons $F(X, Y, T)$ suivant les puissances de T :

$$F(X, Y, T) = \varphi_n(X, Y) + T\varphi_{n-1}(X, Y) + \dots + T^{n-1}\varphi_1(X, Y) + T^n\varphi_0.$$

Nous exceptons le cas où $\varphi_n(X, Y) = (0)$, c'est-à-dire le cas où Γ contient la droite à l'infini du plan (à la rigueur une telle courbe, qui contient les points cycliques, pourrait être considérée comme circulaire).

Il peut se faire que le polynôme $\varphi_n(X, Y)$ homogène et de degré n, soit divisible par une puissance de X. Pour parer à cette éventualité, écrivons

$$\varphi_n(X, Y) = X^{n-p}\psi(X, Y); \qquad \psi(X, Y) = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1}Y + \dots + a_0Y^p, \ (a_0 \neq 0).$$

En désignant par t_k, $(k = 1, \dots, p)$, les zéros du polynôme $\psi(1, t)$, de degré p, nous avons

$$a_p + a_{p-1}t + \dots + a_0t^p = a_0\prod_{k=1}^{p}(t - t_k).$$

Nous en déduisons

$$\psi(X, Y) = a_0\prod_{k=1}^{p}(Y - t_kX) \qquad \text{et} \qquad \varphi_n(X, Y) = a_0X^{n-p}\prod_{k=1}^{p}(Y - t_kX).$$

Les conditions $F(1, i, 0) = 0$ et $F(1, -i, 0) = 0$, qui expriment que Γ est circulaire, s'écrivent $\varphi_n(1, i) = 0$ et $\varphi_n(1, -i) = 0$, ce qui signifie que parmi les zéros t_k du polynôme $\varphi_n(1, t)$ figurent i et $-i$, et encore que le polynôme $\varphi_n(X, Y)$ est divisible par

$$(Y - iX)(Y + iX) \qquad \text{ou} \qquad X^2 + Y^2.$$

C'est ainsi que, dans un repère orthonormé quelconque, l'équation générale des coniques circulaires du plan est

$$a(x^2 + y^2) + 2Ax + 2By + C = 0 \qquad (a \neq 0);$$

on reconnaît l'ensemble des cercles réels ou imaginaires du plan.

(1) Depuis 1963, l'étude systématique des courbes algébriques ne figure plus au programme des classes de Mathématiques Spéciales.

Dans le même repère, l'équation générale des cubiques circulaires du plan est

$$(ax + by)(x^2 + y^2) + Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0$$

a et b désignant deux réels non simultanément nuls.

II. DIRECTIONS PRINCIPALES. ÉQUATIONS RÉDUITES

251. ***Directions principales d'une conique.*** — Nous reprenons la notation du n° 243, mais nous supposons en outre que le plan affine réel Π a été muni d'une structure euclidienne et nous nous astreindrons à n'utiliser que des repères orthonormés.

1° **Directions principales.** — Soit Γ une conique du plan affine réel Π et soit $f(x, y) = 0$ l'une quelconque des équations de Γ dans le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ arbitrairement choisi; les autres équations de Γ dans ce repère sont :

$$\alpha f(x, y) = 0, \qquad \alpha \in \mathbf{R}^{\bullet}.$$

Explicitons :

$$(1) \qquad f(x, y) = H(x, y) + 2\,b'x + 2\,by + a''$$

$$H(x, y) = \text{dét}\,(\tilde{\mu} B \mu) \quad \text{avec} \quad \mu = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix}, \qquad (\delta = \text{dét}\,B).$$

Soit $f_1(x', y') = 0$ l'une quelconque des équations de Γ dans un second repère, $\{O', \vec{i'}, \vec{j'}\}$, arbitrairement choisi. Explicitons :

$$(2) \qquad f_1(x', y') = H_1(x', y') + 2\,b_1'x' + 2\,b_1y' + a_1''$$

$$H_1(x', y') = \text{dét}\,(\tilde{\mu}' B_1 \mu') \quad \text{avec} \quad \mu' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1'' \\ b_1'' & a_1' \end{bmatrix}, (\delta_1 = \text{dét}\,B_1).$$

Le second repère est déterminé par rapport au premier par

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \qquad \vec{i'} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}, \qquad \vec{j'} = \alpha'\vec{i} + \beta'\vec{j}$$

et les formules de changement de coordonnées s'écrivent

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad P = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{bmatrix}$$

On en déduit qu'il existe un réel non nul k assurant l'égalité entre polynômes du second degré

$$(4) \qquad f_1(x', y') = kf(x_0 + \alpha x' + \alpha' y', \quad y_0 + \beta x' + \beta' y')$$

et, en utilisant (2) et (3), l'égalité entre polynômes quadratiques

$$H_1(x', y') = kH(\alpha x' + \alpha' y', \quad \beta x' + \beta' y')$$

qui s'écrit

$$\tilde{\mu}'B_1\mu' = k\tilde{\mu}'\tilde{P}BP\mu'$$

et équivaut à l'égalité matricielle

$$B_1 = k\tilde{P}BP. \quad (5)$$

Puisque nous n'utilisons que des repères orthonormés, la matrice de passage P est orthogonale : $\tilde{P} = P^{-1}$. La relation (5) s'écrit

$$B_1 = kP^{-1}BP,$$

ce qui montre que les matrices B_1 et kB sont semblables; elles admettent les mêmes directions propres. Étant donné que les matrices B et kB ont les mêmes directions propres, nous pouvons énoncer :

Théorème et définition. — **Si une conique Γ du plan euclidien est représentée dans un repère orthonormé par l'équation non homogène**

$$\text{dét}\left([xy]\,B\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) + 2\,b'x + 2\,by + a'' = 0, \qquad \textbf{avec} \qquad B = \begin{bmatrix}a & b''\\ b'' & a'\end{bmatrix}$$

les directions propres de la matrice B sont indépendantes du choix du repère et de celui de l'équation; on les appelle directions principales de la conique Γ.

Remarque I. — Les valeurs propres de la matrice kB, ($k \neq 0$), se déduisent de celles de la matrice B par multiplication par k. En toute rigueur il est donc incorrect de parler des « valeurs propres » ou de « l'équation caractéristique » d'une conique du plan euclidien.

Cette difficulté disparaît si on convient d'attacher à la conique Γ une forme quadratique Φ bien déterminée (à l'exclusion des formes $\alpha\Phi$), ce qui revient à dire qu'une fois choisie l'équation, $f(x, y) = 0$, de Γ dans le repère initial $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, on adoptera pour équation de Γ dans le second repère : $f_1(x', y') = 0$ avec

$$f_1(x', y') = f(x_0 + \alpha x' + \alpha' y',\ \ y_0 + \beta x' + \beta' y'),\quad (k = 1), \quad (6)$$

et ainsi de suite.

En coordonnées homogènes, on écrira la relation (3) sous la forme

$$\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{\;P\;} & \begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\\ 0\quad 0 & 1\end{bmatrix}}_{Q}\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}$$

et on passera de

$$F(X, Y, T) = \text{dét}\,(\tilde{\mathcal{M}}\,A\,\mathcal{M}) \quad \text{à} \quad F_1(X', Y', T') = \text{dét}(\tilde{\mathcal{M}}'\,A_1\,\mathcal{M}')$$

par : $\mathcal{M} = Q\,\mathcal{M}'$ et $A_1 = \tilde{Q}AQ.$ (7)

Remarque II. — En géométrie affine (sans qu'il soit, naturellement, question de repères orthonormés) on déduit de la relation (5), (avec $k = 1$), et de la relation (7) :

$$\text{dét } B_1 = \text{dét } B.(\text{dét } P)^2 \qquad \text{et} \qquad \text{dét } A_1 = \text{dét } A.(\text{dét } Q)^2$$

ce qui s'écrit, compte-tenu de : dét Q = dét P,

$$\delta_1 = \delta.(\text{dét } P)^2 \qquad \text{et} \qquad \Delta_1 = \Delta.(\text{dét } P)^2$$

d'où il résulte :

$$\frac{\Delta_1}{\delta_1} = \frac{\Delta}{\delta}$$

D'une part δ et δ_1 sont simultanément soit nuls, soit non nuls et de même signe, ce qui explique le rôle joué par δ dans l'étude des points à l'infini. D'autre part $\frac{\Delta}{\delta}$ est invariant (sous la réserve faite dans la remarque I), ce qui explique le rôle de $\frac{\Delta}{\delta}$ dans l'équation au centre (244, 3°).

2° **Recherche des directions principales.** — La notation est celle du début du 1°, étant entendu que le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ est orthonormé.

Les valeurs propres s_1 et s_2 de la matrice B sont les zéros du polynôme caractéristique (dans lequel nous avons, par tradition, désigné l'indéterminée par s)

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a - s & b'' \\ b'' & a' - s \end{vmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \Delta(s) = s^2 - (a + a')\,s + (aa' - b''^2).$$

Rappelons (44 et 46) que :

a) une matrice symétrique réelle d'ordre 2 admet deux valeurs propres réelles distinctes ou confondues, ce que confirme ici l'étude du discriminant de $\Delta(s)$ qui est : $(a - a')^2 + 4\,b''^2$;

b) deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Les directions principales de Γ sont fournies, dans le repère considéré, par le système

$$\Sigma(s_k) \begin{cases} (a - s_k)x + b''y = 0 \\ b''x + (a' - s_k)y = 0 \end{cases}$$

où s_k désigne l'une quelconque des valeurs propres de la matrice B.

Cas général : $s_1 \neq s_2$. Chacun des deux systèmes $\Sigma(s_1)$ et $\Sigma(s_2)$ fournit une, et une seule direction propre de B, et les deux directions ainsi obtenues sont orthogonales. La conique Γ admet deux directions principales, orthogonales.

Cas particulier : $s_1 = s_2$. Le discriminant de $\Delta(s)$ est nul si, et seulement si, on a à la fois

$$a = a' \qquad \text{et} \qquad b'' = 0;$$

ce cas est celui de la conique

$$a(x^2 + y^2) + 2\,b'x + 2\,by + a'' = 0,$$

c'est-à-dire celui du cercle. Le système Σ est alors totalement indéterminé : toute direction du plan est une direction principale pour le cercle.

252. ***Réduction de l'équation d'une conique.*** — Nous partons de la conique Γ du plan euclidien Π déterminée dans le repère orthonormé $\{ O, \vec{i}, \vec{j} \}$ par l'équation $f(x, y) = 0$; la notation est celle du n° **251, 1°**.

1° Théorie de la réduction. — Nous venons de voir qu'il existe au moins un repère orthonormé $\{ O, \vec{u}, \vec{v} \}$ dont les directions d'axes sont des directions principales de Γ. Par changement d'axes (en l'occurrence par rotation si Π est orienté et si les deux repères sont de même sens) on obtient l'équation de Γ dans $\{ O, \vec{u}, \vec{v} \}$

$$(1) \qquad s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + 2\, b'_1\, x' + 2\, b_1 y' + a''_1 = 0.$$

En effet la matrice qui tient le rôle de B est ici la matrice diagonale

$$B_1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \qquad (\delta_1 = s_1 s_2).$$

Pour achever la discussion, nous distinguerons deux cas.

1er Cas : $s_1 s_2 \neq 0$. — C'est le cas où les points à l'infini de Γ sont distincts; Γ est une conique à centre.

L'équation (1) peut s'écrire, en *complétant les carrés*,

$$s_1\left(x' + \frac{b'_1}{s_1}\right)^2 + s_2\left(y' + \frac{b_1}{s_2}\right)^2 + a''_2 = 0,$$

ce qui nous conduit à introduire le repère $\{ \omega, \vec{u}, \vec{v} \}$, tel que

$$\overrightarrow{O\omega} = -\frac{b'_1}{s_1}\vec{u} - \frac{b_1}{s_2}\vec{v}.$$

Dans ce repère, Γ a pour équation

$$s_1 \xi^2 + s_2 \eta^2 + a''_2 = 0.$$

Ce premier cas se subdivise lui-même en deux :

a) $a''_2 \neq 0$. Le rang de la forme quadratique associée à la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\{ s_1, s_2, a''_2 \}$ est $r = 3$. La conique Γ est propre; nous allons maintenant faire intervenir la signature de la forme quadratique :

I. s_1, s_2, a''_2 sont de même signe. Une équation de Γ dans $\{ \omega, \vec{u}, \vec{v} \}$ est

$$(\text{I}) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Si nous nous reportons à la classification des coniques d'un espace affine réel (243), nous constatons que Γ est une *ellipse imaginaire*.

II. $\mathrm{sgn}(s_1) = \mathrm{sgn}(s_2) = \mathrm{sgn}(-a_2'')$. Une équation de Γ dans $\{\omega, \vec{u}, \vec{v}\}$ est

(II) $$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$$

Γ est une *ellipse réelle.*

III. $\mathrm{sgn}(s_1) = \mathrm{sgn}(-s_2)$. En transposant éventuellement $\vec{u}$ et $\vec{v}$, nous pouvons supposer $\mathrm{sgn}(a_2'') = \mathrm{sgn}(s_2)$.

Une équation de Γ dans $\{\omega, \vec{u}, \vec{v}\}$ est

(III) $$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$$

Γ est une *hyperbole.*

b) $a_2'' = 0$. Γ est formée de deux droites distinctes, imaginaires conjugués si $s_1 s_2 > 0$, réelles si $s_1 s_2 < 0$.

2e CAS : $s_1 s_2 = 0$. — C'est le cas où les points à l'infini de Γ sont confondus. Étant donnés que s_1 et s_2 ne peuvent être simultanément nuls (car, dans ce cas, la matrice B_1 serait nulle), nous sommes en droit de supposer : $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$.

L'équation (1) peut ici s'écrire, en *complétant le carré,*

$$s_2\left(y' + \frac{b_1}{s_2}\right)^2 + 2\, b_1' x' + a_2'' = 0$$

ce qui nous conduit à introduire le repère $\{O'', \vec{u}, \vec{v}\}$, tel que

$$\overrightarrow{OO''} = -\frac{b_1}{s_2}\vec{v}.$$

Dans ce repère Γ a pour équation

$$s_2 y''^2 + 2\, b_1' x'' + a_2'' = 0.$$

Ce second cas se subdivise lui-même en deux :

a) $b_1' \neq 0$. En posant : $\overrightarrow{O''S} = -\dfrac{a_2''}{2\, b_1'}\vec{u}$, nous déterminons un repère orthonormé $\{S, \vec{u}, \vec{v}\}$ dans lequel Γ a une équation de la forme

(IV) $$\eta^2 - 2\, p\, \xi = 0, \qquad (p \neq 0).$$

La conique Γ est propre ($r = 3$); d'après la classification affine, c'est une *parabole.*

b) $b_1' = 0$. Γ est formée de deux droites parallèles, distinctes et imaginaires conjuguées si $s_2 a_2'' > 0$, distinctes et réelles si $s_2 a_2'' < 0$, confondues et réelles si $a_2'' = 0$.

En conclusion nous constatons que, les coniques dégénérées étant mises à part, nous avons rencontré une fois, et une seule, chacun des types de coniques

propres mis en évidence dans la classification affine. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — **Soit, dans un plan affine réel, une**

ellipse imaginaire	**ellipse réelle**	**hyperbole**	**parabole.**

Quand on munit le plan d'une structure euclidienne, il existe un repère orthonormé dans lequel la conique admet l'équation, dite réduite,

$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+1=0$	$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1=0$	$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-1=0$	$\eta^2-2p\xi=0.$

CONSÉQUENCE. — Dans le plan de la géométrie élémentaire, considéré comme un plan affine réel muni d'une structure euclidenne (mais non complexifié), les coniques propres que nous avons appelées ellipse réelle, hyperbole et parabole sont identiques aux courbes étudiées en géométrie élémentaire sous le nom d'ellipse, hyperbole et parabole.

2° **Pratique de la réduction de l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole.** — On commence par déterminer les coordonnées, dans le repère orthonormé initial $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, du centre ω de la conique Γ et deux vecteurs unitaires, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de deux directions principales orthogonales (**251**, 2°).

Dans le repère $\{\omega, \vec{i}, \vec{j}\}$ on dispose de l'équation au centre

$$H(x', y') + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Quand on passe du repère $\{\omega, \vec{i}, \vec{j}\}$ au repère $\{\omega, \vec{u}, \vec{v}\}$, de même origine, le terme constant de l'équation n'est pas altéré. L'équation réduite s'écrit donc

$$s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{3}$$

REMARQUE. — Dans certains problèmes, on n'a besoin que de l'équation réduite (3) elle-même et il est inutile de « mettre en place » le centre ω et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$.

C'est ainsi que si Γ est une ellipse réelle $\left(s_1 s_2 > 0 \text{ et } s_1\frac{\Delta}{\delta} < 0\right)$ et si on ne s'intéresse qu'à l'aire $\mathcal{A}$ du domaine intérieur à Γ, on utilisera

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\delta s_1}, \qquad b^2 = -\frac{\Delta}{\delta s_2}.$$

D'où, compte-tenu de $s_1 s_2 = \delta$: $\mathcal{A} = \pi\frac{|\Delta|}{\delta^{3/2}}$.

De même si Γ est une hyperbole et si on n'a besoin que de l'angle θ des asymptotes, on utilisera : $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = -\frac{s_1}{s_2}$.

3° **Pratique de la réduction de l'équation d'une parabole.** — Dans le repère orthonormé initial $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, la parabole Γ admet une équation de la forme

$$(4) \quad P^2(x, y) + Q(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P(x, y) = ax + by \\ Q(x, y) = Ax + By + C. \end{cases}$$

Cette équation s'écrit, pour toute valeur réelle de λ,

$$[P(x, y) + \lambda]^2 + Q(x, y) - 2\lambda P(x, y) - \lambda^2 = 0,$$

ce qui est de la forme

$$P_1^2(x, y) + Q_1(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_1(x, y) = P(x, y) + \lambda \\ Q_1(x, y) = Q(x, y) - 2\lambda P(x, y) - \lambda^2. \end{cases}$$

On choisit alors la constante λ de telle sorte que les deux droites D et D' qui ont pour équations dans le repère initial

$$D) \quad P_1(x, y) = 0; \qquad D') \quad Q_1(x, y) = 0,$$

soient orthogonales.

On introduit ensuite un nouveau repère orthonormé $\{S, \vec{u}, \vec{v}\}$ tel que S soit le point d'intersection de D et D', et $\vec{u}, \vec{v}$ soient des vecteurs directeurs de D et D'. Les nouvelles coordonnées étant désignées par ξ et η, nous avons, en exprimant de deux façons les distances du point générique du plan à D et à D'

$$P_1(x, y) = k\eta, \qquad Q_1(x, y) = l\xi.$$

Dans le nouveau repère, Γ a une équation de la forme

$$\eta^2 - 2p\xi = 0.$$

Exemple numérique : $(x - y)^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Cette équation s'écrit :

$$(x - y + \lambda)^2 - 2(1 + \lambda)x + 2(2 + \lambda)y + 1 - \lambda^2 = 0.$$

Les deux droites

$$(D) \quad x - y + \lambda = 0; \qquad (D') \quad -2(1 + \lambda)x + 2(2 + \lambda)y + 1 - \lambda^2 = 0$$

sont orthogonales si, et seulement si,

$$-2(1 + \lambda) - 2(2 + \lambda) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -\frac{3}{2}.$$

En adoptant cette valeur de λ, nous avons

$$(D) \quad x - y - \frac{3}{2} = 0; \qquad (D') \quad x + y - \frac{5}{4} = 0.$$

Ces droites sont respectivement l'axe et la tangente au sommet de Γ; le sommet S de Γ a donc pour coordonnées dans le repère initial : $x = \frac{11}{8}$ et $y = -\frac{1}{8}$.

D et D′ admettent les vecteurs unitaires $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$ et les formules de changement de coordonnées s'écrivent

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{11}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \\ y = -\frac{1}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x - y - \frac{3}{2} = -\sqrt{2}\eta \\ x + y - \frac{5}{4} = \sqrt{2}\xi. \end{array} \right.$$

Dans le nouveau repère, Γ admet l'équation

$$\eta^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi = 0.$$

Le paramètre de la parabole est $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

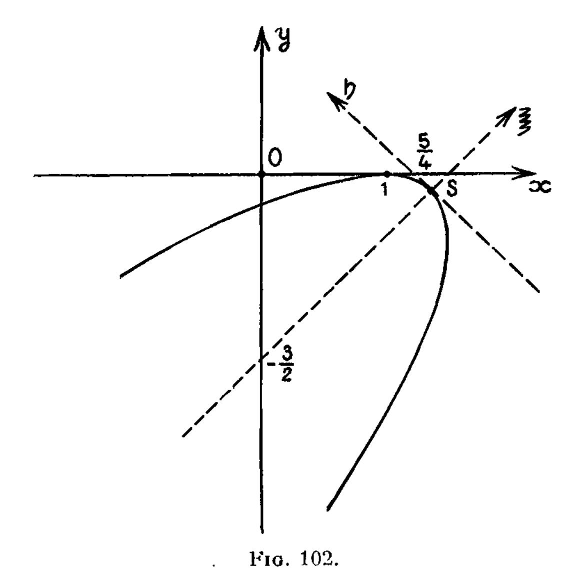


Fig. 102.

La courbe est tracée sur la figure n° 102; le lecteur remarquera qu'elle est tangente à l'axe Ox au point d'abscisse 1.

253. ***Axes d'une conique.*** — 1° **Seconde définition des directions principales.** —Nous reprenons les notations du n° 251, 1°. La conique étant définie dans le repère orthonormé $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ par l'équation

$$H(x, y) + 2\,b'x + 2\,by + a'' = 0 \qquad \text{avec} \qquad H(x, y) = \text{dét}\left([x\ y]\, B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right),$$

nous avons appelé directions principales de Γ les directions propres de B.

Autrement dit un vecteur $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$, non nul, dirige une direction principale si, et seulement si, il existe un réel s tel que

$$B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H'_x(x, y) \\ H'_y(x, y) \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou encore si $\vec{V}$ vérifie la condition

$$(1) \qquad yH'_x(x, y) - xH'_y(x, y) = 0.$$

En désignant par $\vec{V'}$ le vecteur non nul, orthogonal à $\vec{V}$, déterminé par

$$\vec{V'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \quad \text{avec} \quad x' = +y \quad \text{et} \quad y' = -x,$$

la condition (1) s'écrit

$$x'H'_x(x, y) + y'H'_y(x, y) = 0,$$

et exprime (246) une condition nécessaire et suffisante pour que les directions de droites de vecteurs directeurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ soient conjuguées par rapport à la conique Γ. Énonçons :

Théorème. — **Une direction de droite Δ est principale pour une conique Γ si, et seulement si, Δ' désignant la direction de droite perpendiculaire à Δ, les directions Δ et Δ' sont conjuguées par rapport à Γ.**

Il en résulte que la direction de droite Δ est principale pour Γ si, et seulement si, son point à l'infini, ∞_Δ, est tel que le conjugué harmonique de ∞_Δ par rapport aux points cycliques I et J coïncide avec le conjugué harmonique de ∞_Δ par rapport aux points à l'infini U et V de Γ. Cela permet de retrouver les résultats du n° 251, 2°.

I. Si Γ est un cercle, les points U et V coïncident avec les points I et J; toute direction de droite est principale.

II. Si Γ est une conique à centre, il existe deux directions principales; leurs points à l'infini constituent le couple commun aux deux involutions sur la droite à l'infini dont les points invariants sont d'une part U et V, d'autre part I et J.

III. Enfin si les points à l'infini de Γ sont confondus, il existe deux directions principales; l'une est la direction asymptotique double, l'autre est la direction perpendiculaire à la précédente.

En résumé : *toute conique qui n'est pas un cercle admet un couple de directions principales, constitué par les bissectrices des directions asymptotiques.*

L'équation de l'ensemble des droites menées par O parallèlement aux deux directions principales est

$$(1) \qquad yH'_x(x, y) - xH'_y(x, y) = 0.$$

Étant donné que : $H(x, y) = ax^2 + 2\,b''xy + a'y^2$,

(1) s'écrit $\qquad b''(y^2 - x^2) + (a - a')xy = 0.$

2° **Axes.** — DÉFINITION I. — **On appelle axe d'une conique le diamètre d'une direction qui est principale sans être asymptotique.**

a) Conique à centre. — Écartons le cas du cercle, pour lequel tout diamètre est un axe. La conique Γ admet deux axes qui peuvent être considérés soit comme les parallèles aux directions principales menées par le centre ω, soit comme les diamètres des directions principales ; ces axes sont les droites d'équations

$$\alpha f'_x(x, y) + \beta f'_y(x, y) = 0 \qquad \text{avec} \qquad b''(\beta^2 - \alpha^2) + (a - a')\alpha\beta = 0.$$

En éliminant α et β, homogènes, entre ces deux équations on obtient la conique dégénérée formée par l'ensemble des axes de Γ :

$$b''[f'^2_x(x, y) - f'^2_y(x, y)] - (a - a')f'_x(x, y)f'_y(x, y) = 0.$$

b) Conique à direction asymptotique double. — Il y a un, et un seul axe, le diamètre de la direction perpendiculaire à la direction asymptotique double.
Γ étant représentée par l'équation

$$(px + qy)^2 + 2\,b'x + 2\,by + a'' = 0,$$

l'axe a pour équation : $\quad pf'_x(x, y) + qf'_y(x, y) = 0$

ou $\quad (p^2 + q^2)(px + qy) + b'p + bq = 0.$

3° **Sommets.** — DÉFINITION II. — **On appelle sommet d'une conique propre tout point commun à la conique et à un axe et situé à distance finie.**

Une parabole a un sommet (réel). En utilisant l'équation réduite, on constate qu'une ellipse a quatre sommets réels, qu'une hyperbole a deux sommets réels et deux sommets imaginaires conjugués.

4° **Axes de symétrie.** — Le diamètre d'une direction non asymptotique étant le lieu des milieux des cordes de la conique qui sont parallèles à cette direction (245), tout axe (au sens du 2°) est un axe de symétrie, ce qu'il est aisé de vérifier sur les équations réduites.

Réciproquement donnons-nous un axe de symétrie D de la conique Γ et cherchons s'il s'agit du diamètre d'une direction principale. Soi Δ la direction de droite perpendiculaire à D.

a) Si Δ n'est pas une direction asymptotique de Γ, toute parallèle à Δ coupe Γ en deux points situés à distance finie, symétriques l'un de l'autre par rapport à D, ce qui exige que D soit le diamètre de la direction de droite Δ qui est ainsi principale, puisque perpendiculaire à D.

b) Si ∞_Δ est un point simple de Γ, une parallèle à Δ coupe en général Δ en deux points dont l'un est ∞_Δ ; l'autre ne peut être que sur D ; on en déduit que D fait partie de Γ qui est ainsi dégénérée ; l'autre partie de Γ est une droite D' qui contient ∞_Δ et, par suite, est perpendiculaire à D. Inversement la conique formée par deux droites perpendiculaires D et D' admet quatre axes de symétrie : D, D' et les deux axes (au sens du 2°).

c) Si ∞_Δ est un point double de Γ, la conique, dégénérée, est formée de deux droites D_1 et D_2 perpendiculaires à D. Inversement la conique formée par deux droites parallèles D_1 et D_2 admet pour axes de symétrie : l'axe (au sens du 2°) et toute perpendiculaire à D_1 et D_2.

III. FOYERS ET DIRECTRICES

254. ***Étude analytique des foyers et directrices d'une conique propre.*** — 1° **Première notion de foyer et de directrice.** — Plaçons nous d'abord dans un plan affine réel Π, muni d'une structure euclidienne mais *non complexifié*, et donnons-nous un point F et une droite D de Π, ainsi qu'un réel positif e. Le lieu Γ du point M du plan tel que

$$\frac{MF}{MK} = e \qquad \text{(MK : distance de M à D)}$$

est une conique.

En effet, un repère orthonormé ayant été arbitrairement choisi, soient (x_0, y_0) les coordonnées de F et $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ l'équation normale de D :

$$M \in \Gamma \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - e^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 = 0.$$

On dit que F est un foyer de la conique Γ, D la directrice associée à F, e l'excentricité.

Par extension au plan euclidien *complexifié*, dans lequel nous allons nous placer jusqu'à la fin de ce sous-chapitre, posons la définition suivante :

DÉFINITION I. — **Si une conique propre Γ d'un plan euclidien complexifié admet, dans un repère orthonormé, une équation de la forme**

$$(1) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (lx + my + n)^2 = 0,$$

on dit que le point F (réel ou imaginaire) **de coordonnées** (x_0, y_0) **est un foyer de** Γ, **que la droite** D (réelle ou imaginaire) **d'équation** $lx + my + n = 0$ **est la directrice associée au foyer** F, **enfin que** (1) **est une équation focale de** Γ.

Le choix du repère n'intervient qu'en apparence; en effet la forme (1) de l'équation est conservée dans un changement de repère orthonormé. Notons que la définition I n'implique pas l'existence *a priori* de foyers pour une conique donnée.

REMARQUE. — Il résulte de la définition I qu'un point F (réel ou imaginaire) est foyer de la conique Γ si, et seulement si, lorsque M parcourt Γ, le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{FM}$ est égal au carré d'une fonction affine des coordonnées de M.

2° **Définition plückerienne des foyers.** — *a*) En écrivant (1) sous la forme

$$[(x - x_0) + i(y - y_0)]\,[(x - x_0) - i(y - y_0)] = (lx + my + n)^2$$

nous constatons que, si le point F est foyer de la conique Γ, chacune des droites isotropes de F,

$$x - x_0 + i(y - y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad (x - x_0) - i(y - y_0) = 0,$$

coupe Γ en deux points confondus avec le point d'intersection de l'isotrope considérée et de la droite D. Autrement dit, les deux droites FI et FJ sont tangentes à la conique propre Γ et leurs points de contact sont situés sur la droite D, qui est ainsi la polaire de F par rapport à Γ.

b) Inversement soit F un point réel ou imaginaire, à distance finie, et Γ une conique propre tangente aux isotropes FI et FJ. Choisissons arbitrairement un repère orthonormé; désignons par (x_0, y_0) les coordonnées de F et par

$$F(X, Y, T) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x, y) = 0, \qquad \text{avec} \qquad f(x, y) \equiv F(X, Y, 1),$$

une équation homogène et une équation non homogène de Γ (l'égalité de deux polynômes est ici notée ≡).

La conique dégénérée formée par les deux tangentes menées de F à Γ a pour équation non homogène (**223**, 3°) :

$$(2) \qquad (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{t_0})^2 - 4\,f_0\,f(x, y) = 0,$$

en désignant respectivement par $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{t_0}, f_0$, les nombres

$$F'_X(x_0, y_0, 1) = f'_x(x_0, y_0), \qquad F'_Y(x_0, y_0, 1) = f'_y(x_0, y_0), \qquad F'_T(x_0, y_0, 1),$$
$$F(x_0, y_0, 1) = f(x_0, y_0).$$

Puisque cette conique dégénérée est formée de FI et FJ, elle admet également pour équation

$$(3) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0.$$

En comparant (2) et (3), on constate qu'il existe un nombre complexe non nul k qui assure l'égalité entre polynômes.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \equiv k[(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{t_0})^2 - 4\,f_0\,f(x, y)].$$

Cela posé, l'appartenance de $M(x, y)$ à Γ, qui équivaut à $f(x, y) = 0$, s'écrit

$$(4) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - k(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{t_0})^2 = 0.$$

Cette équation (4) est de la forme (1). Il en résulte que F est un foyer de Γ, au sens de la définition I et que la directrice associée à F est la droite d'équation

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{t_0} = 0,$$

c'est-à-dire la polaire de F par rapport à Γ.

Cette étude nous prouve l'équivalence de la définition I et de la définition suivante, attribuée à Plücker :

DÉFINITION II. — **Dans un plan euclidien complexifié, on appelle foyer d'une conique propre Γ tout point F tel que les isotropes de F soient tangentes à Γ; la polaire d'un foyer est appelée directrice associée à ce foyer.**

La définition plückérienne des foyers s'étend à une courbe algébrique d'ordre $n > 2$.

REMARQUE I. — Le lecteur qui a étudié la théorie des faisceaux de coniques obtiendra une démonstration plus rapide de l'équivalence des définitions I et II en remarquant que, étant donnés une conique propre Γ et un point F, dont la polaire par rapport à Γ est désignée par D, les isotropes FI et FJ sont tangentes à F si, et seulement si, Γ fait partie du faisceau de coniques déterminé par le couple de droites isotropes (FI, FJ) et par la droite double D.

REMARQUE II. — Un point et sa polaire par rapport à une conique d'un plan affine réel complexifié étant simultanément réels ou imaginaires, il en est de même pour un foyer et la directrice associée.

3° **Recherche analytique des foyers d'une conique propre.** — Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\{ O, \vec{i}, \vec{j} \}$ qui, naturellement, est réel.

Les isotropes du point $F(x_0, y_0)$ ont pour équations (non homogènes)

$$x + iy - (x_0 + iy_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad x - iy - (x_0 - iy_0) = 0.$$

Des coordonnées tangentielles (homogènes) de ces droites sont :

$$u = 1,\ v = i,\ h = -(x_0 + iy_0) \qquad \text{et} \qquad u = 1,\ v = -i,\ h = -(x_0 - iy_0).$$

Soit Γ la conique propre d'équation tangentielle : $G(u, v, h) = 0$.

F est foyer de Γ si, et seulement si, (x_0, y_0) vérifie le système des deux équations

$$\text{I} \quad \begin{cases} G(1,\ i,\ -x_0 - iy_0) = 0 \\ G(1,\ -i,\ -x_0 + iy_0) = 0. \end{cases}$$

EXEMPLE I. — Γ est l'ellipse réelle qui a pour équation tangentielle :

$$a^2u^2 + b^2v^2 - h^2 = 0 \qquad (a > b > 0;\quad a^2 - b^2 = c^2).$$

Les foyers sont donnés par le système

$$\text{I} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 - (x_0 + iy_0)^2 = 0, \\ a^2 - b^2 - (x_0 - iy_0)^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{équivalent à} \qquad \begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = c^2 \\ x_0y_0 = 0. \end{cases}$$

On obtient : deux foyers réels F et F', de coordonnées $(\varepsilon c, 0)$, avec $\varepsilon = \pm 1$, qui ne sont autres que les foyers au sens de la géométrie élémentaire; deux foyers imaginaires conjugués Φ et $\bar{\Phi}$, de coordonnées $(0, \varepsilon ic)$, avec $\varepsilon = \pm 1$.

Γ a pour équation ponctuelle $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$;

le point (x_0, y_0) ayant pour polaire la droite $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$,

les directrices associées aux foyers réels ont pour équations : $x-\varepsilon\frac{a^2}{c}=0$,

les directrices associées aux foyers imaginaires ont pour équations : $y+\varepsilon i\frac{b^2}{c}=0$.

Les équations focales correspondantes ont la forme :

$$(x-\varepsilon c)^2+y^2-\lambda\left(x-\varepsilon\frac{a^2}{c}\right)^2=0 \qquad \text{et} \qquad x^2+(y-\varepsilon ic)^2-\mu\left(y+\varepsilon i\frac{b^2}{c}\right)^2=0.$$

Les constantes λ et μ s'obtiennent en écrivant que, dans ces deux équations, les coefficients de x^2 et y^2 sont respectivement proportionnels à b^2 et à a^2, soit

$$a^2(1-\lambda)=b^2 \quad \text{ou} \quad \lambda=\frac{c^2}{a^2} \qquad \text{et} \qquad a^2=b^2(1-\mu) \quad \text{ou} \quad \mu=-\frac{c^2}{b^2}.$$

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

FOYERS	DIRECTRICES	ÉQUATION FOCALE
réels : $(\varepsilon c, 0)$.	$x=\varepsilon\frac{a^2}{c}$	$(x-\varepsilon c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x-\varepsilon\frac{a^2}{c}\right)^2$
imaginaires : $(0, \varepsilon ic)$.	$y=-\varepsilon i\frac{b^2}{c}$	$x^2+(y-\varepsilon ic)^2=-\frac{c^2}{b^2}\left(y+\varepsilon i\frac{b^2}{c}\right)^2$

Exemple II. — Γ est l'hyperbole qui a pour équation tangentielle

$$a^2u^2-b^2v^2-h^2=0 \qquad (a^2+b^2=c^2).$$

Un calcul analogue au précédent conduit aux résultats suivants

FOYERS	DIRECTRICES	ÉQUATION FOCALE
réels : $(\varepsilon c, 0)$ . .	$x=\varepsilon\frac{a^2}{c}$	$(x-\varepsilon c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x-\varepsilon\frac{a^2}{c}\right)^2$
imaginaires : $(0, \varepsilon ic)$.	$y=\varepsilon i\frac{b^2}{c}$	$x^2+(y-\varepsilon ic)^2=\frac{c^2}{b^2}\left(y-\varepsilon i\frac{b^2}{c}\right)^2$

Exemple III. — Γ est la parabole qui a pour équation tangentielle

$$pv^2-2uh=0.$$

Les foyers sont donnés par le système

$$\begin{cases}-p+2(x_0+iy_0)=0,\\ -p+2(x_0-iy_0)=0\end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases}y_0=0\\ x_0=\frac{p}{2}\end{cases}$$

On obtient un foyer F, de coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, qui est le foyer au sens de la géométrie élémentaire. Γ a pour équation ponctuelle $y^2-2px=0$; le point (x_0, y_0) ayant pour polaire la droite $y_0y-p(x+x_0)=0$, la directrice associée à F a pour équation $x=-\frac{p}{2}$ et on obtient, sans difficulté, l'équation focale

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2-\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

255. ***Compléments géométriques sur les foyers et les directrices.*** — **1° Étude géométrique des foyers d'une conique à centre Γ, propre.** — Il résulte de la définition plückérienne qu'un point F est foyer de Γ, si, et seulement s'il est situé à la fois sur une tangente à Γ menée par le point cyclique I et sur une tangente à Γ menée par le point cyclique J, ces deux tangentes étant distinctes de la droite à l'infini, ∞_{Π}. Or, on peut mener de I deux tangentes à Γ, T et T', qui sont imaginaires et distinctes de ∞_{Π} ; on peut mener de J deux tangentes à Γ, $\bar{T}$ et $\bar{T}'$, distinctes de ∞_{Π}, respectivement imaginaires conjuguées de T et T'.

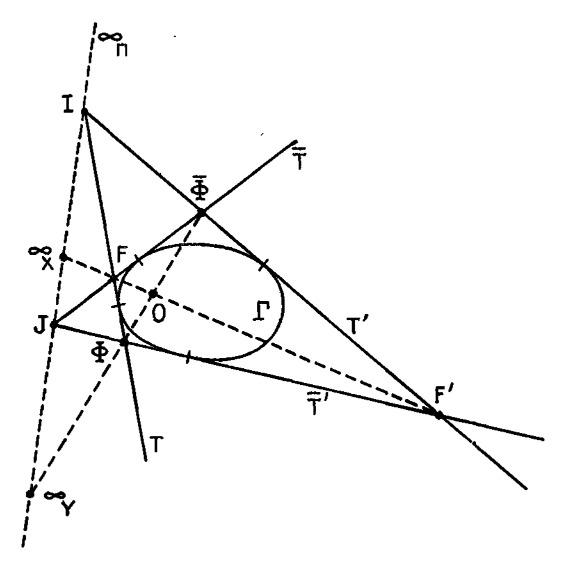


Fig. 103.

Si Γ est un cercle, T et T' (resp. $\bar{T}$ et $\bar{T}'$) sont confondues avec l'asymptote, tangente en I (resp. J) au cercle et Γ a un, et seul foyer, le centre ω qui est un point réel. Ce cas excepté, Γ a quatre foyers qui sont les points (fig. 103)

$$F = T \cap \bar{T}, \qquad F' = T' \cap \bar{T}', \qquad \Phi = T \cap \bar{T}', \qquad \bar{\Phi} = \bar{T} \cap T'$$

Les deux premiers sont réels, les deux autres imaginaires conjugués.

2° Coniques à centre homofocales. — Définition. — **Les coniques à centre admettant pour foyers deux points réels donnés F et F', sont dites homofocales.**

Il s'agit de l'ensemble des coniques propres du faisceau tangentiel $\mathcal{F}$ dont les tangentes fixes sont les isotropes de F, $T = FJ$ et $\bar{T} = FJ$, ainsi que celles de F', $T' = F'I$ et $\bar{T}' = F'J$. Les coniques considérées ont les mêmes foyers imaginaires $\Phi = T \cap \bar{T}'$ et $\bar{\Phi} = \bar{T} \cap T'$. Le faisceau $\mathcal{F}$ contient trois coniques dégénérées, chacune formée de deux faisceaux de droites dont les points fixes sont respectivement F et F', Φ et $\bar{\Phi}$, I et J. Les « droites doubles » du faisceau tangentiel, FF', $\Phi\bar{\Phi}$ et IJ sont réelles; elles déterminent un triangle qui est autopolaire par rapport à chacune des coniques Γ. Les sommets de ce triangle sont d'une part les points à l'infini de FF' et $\Phi\bar{\Phi}$, que nous désignons par ∞_X et ∞_Y, d'autre part le point d'intersection O de FF' et $\Phi\bar{\Phi}$. Le point O, pôle de ∞_{Π}, est le centre commun à toutes les coniques Γ. Les points ∞_X et ∞_Y, conjugués harmoniques par rapport à I et J, sont à l'infini dans des directions orthogonales; comme d'autre part les droites $O\,\infty_X$ et $O\,\infty_Y$ sont conjuguées, ces droites sont les axes communs à toutes les coniques Γ.

Soit P un point donné du plan. Les tangentes menées de P à la conique générique du faisceau tangentiel $\mathcal{F}$ sont homologues dans une involution (cf. théorème de Plücker, nº 242, 4º).

Deux couples de cette involution sont (PI, PJ) et (PF, PF′); il en résulte que les rayons doubles, conjugués harmoniques par rapport à PI et PJ sont orthogonaux; conjugués harmoniques par rapport à PF et PF′, les rayons doubles orthogonaux sont les bissectrices de l'angle des droites PF et PF′; comme il s'agit (en général) des tangentes en P à celles des coniques de $\mathcal{F}$ qui passent par P, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME I. — **Par un point P passent en général deux coniques à centre admettant deux foyers réels donnés F et F′; les tangentes en P à ces coniques sont les bissectrices de l'angle des droites PF et PF′.**

THÉORÈME II. — **Par un point P on peut mener deux tangentes à une conique Γ de foyers F et F′. Ces deux tangentes d'une part, les deux droites PF et PF′ d'autre part, ont les mêmes bissectrices.**

3º **Étude géométrique des foyers d'une parabole** Γ. — On peut mener de I (resp. J) une tangente T (resp. $\overline{T}$), distincte de ∞_Π ; T et $\overline{T}$ qui sont imaginaires conjuguées se coupent en un point réel F, qui est le foyer, unique, de Γ (fig. 104).

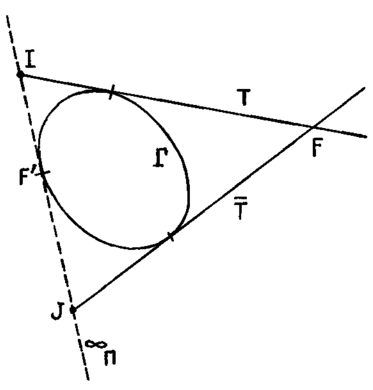


FIG. 104.

4º **Paraboles homofocales.** — DÉFINITION. — **Les paraboles qui admettent pour foyer un point réel donné F et pour point à l'infini un point réel donné F′ sont dites homofocales.**

Il s'agit de l'ensemble des coniques propres d'un faisceau tangentiel $\mathcal{F}$ du second type (coniques tangentes en F′ à ∞_Π et, en outre tangentes à FI et FJ). Le faisceau $\mathcal{F}$ contient deux coniques dégénérées, respectivement formées des deux faisceaux de droites dont les points fixes sont F et F′, I et J.

L'étude des tangentes menées du point donné P et les théorèmes I et II du 2º restent valables à condition de considérer qu'il s'agit ici de paraboles et que F et F′ sont respectivement le foyer et le point à l'infini de l'axe.

5º **Propriétés focales communes à toutes les coniques propres.** — THÉORÈME III. — **Deux droites conjuguées issues d'un foyer F d'une conique Γ sont orthogonales.**

En effet il s'agit de deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux isotropes FI et FJ qui sont les tangentes menées de F à Γ.

THÉORÈME IV. — **Soient A et B les points de contact des tangentes menées par un point P à une conique Γ de foyer F. La droite FP est l'une des bissectrices de l'angle des droites FA et FB; l'autre bissectrice passe par le point d'intersection Q de la droite AB et de la directrice D associée au foyer F.**

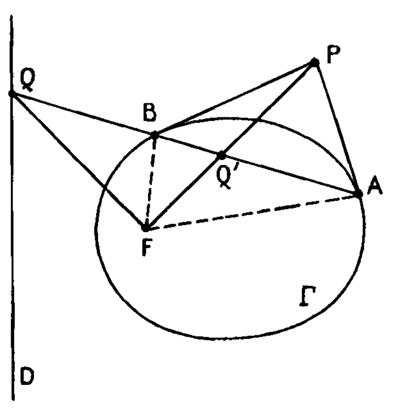


FIG. 105.

En effet (fig. 105) la droite FP est la polaire du point Q; elle est donc conjuguée de FQ, et par suite orthogonale à FQ (théorème III). La

droite AB coupant FP en Q', les points Q et Q' sont conjugués harmoniques par rapport à A et B. Les droites FP et FQ sont donc à la fois orthogonales et conjuguées harmoniques par rapport à FA et FB. La proposition en résulte.

THÉORÈME V. — **Si la tangente en P à une conique propre Γ coupe en Q la directrice D associée au foyer F de Γ, les droites FP, et FQ sont orthogonales.**

Il s'agit d'un cas particulier du théorème IV.

THÉORÈME VI. — **Si R et R' sont les points d'intersection d'une tangente variable à une conique Γ de foyer F avec deux tangentes fixes T et T', l'angle des droites FR et FR' a une mesure constante.**

Nous savons que R' est l'homologue de R dans une application homographique de T sur T'. Il en résulte, par conservation du birapport, que la droite FR' est l'homologue de la droite FR dans une application homographique h du faisceau de point fixe F sur lui-même. Les rayons invariants de h sont les tangentes menées de F à Γ, c'est-à-dire les isotropes de F; il en résulte que h peut être engendrée (250, 4°) en faisant tourner un angle de grandeur constante autour de son sommet F. La proposition en résulte.

6° **Transformée par polaires réciproques d'une conique propre Γ de foyer F, la conique directrice étant un cercle $\mathcal{K}$ de centre F.** — Le pôle de la droite isotrope FI par rapport au cercle $\mathcal{K}$ est le point à l'infini de la direction perpendiculaire à FI, c'est-à-dire le point I lui-même. La conique Γ* transformée de Γ est donc un cercle. Étant donné qu'un point et sa polaire par rapport à Γ se transforment en une droite et son pôle par rapport à Γ*, le centre du cercle Γ* est le pôle par rapport à $\mathcal{K}$ de la directrice associée au foyer F de Γ.

IV. COMPLÉMENTS SUR LES FAISCEAUX DE CONIQUES

Nous nous plaçons, au cours de l'étude du sous-chapitre IV, dans un plan affine réel, muni d'une structure euclidienne. Au n° 257, nous considérerons en outre que ce plan a été complété par une droite à l'infini, et qu'il a été complexifié.

256. ***Interprétation métrique de deux coniques osculatrices.*** — THÉORÈME. — **Deux coniques propres sont osculatrices en un point réel, situé à distance finie, si, et seulement si, elles admettent le même centre de courbure en ce point.**

Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ deux coniques propres tangentes au point réel O, situé à distance finie.

Choisissons un repère orthonormé $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ tel que $\vec{i}$ soit colinéaire à la tangente commune aux deux coniques, qui ont ainsi des équations de la forme :

$$\mathcal{S} : \quad ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2by = 0 \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$
$$\mathcal{T} : \quad a_1x^2 + 2b''_1xy + a'_1y^2 + 2b_1y = 0 \qquad (a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0)$$

(la non nullité de a, b, a_1, b_1 résulte de ce qu'il s'agit de coniques propres).

a) Pour un point M de $\mathcal{S}$ ou de $\mathcal{T}$ distinct de O et par suite non situé sur Ox, nous pouvons écrire

$$\frac{x^2}{2y} = -\frac{b''}{a}x - \frac{a'}{2a}y - \frac{b}{a} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{2y} = -\frac{b''_1}{a_1}x - \frac{a'_1}{2a_1}y - \frac{b_1}{a_1}\,.$$

Nous en déduisons :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2y} = -\frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2y} = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Autrement dit (IV, 122) les centres de courbure, I et I_1, de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ en O sont déterminés par

$$\overrightarrow{OI} = -\frac{b}{a}\vec{j}, \quad \overrightarrow{OI_1} = -\frac{b_1}{a_1}\vec{j}.$$

Ces points sont confondus si, et seulement si, $\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}$.

b) Soit $\mathcal{F}$ le faisceau de coniques déterminé par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$. L'équation générale des coniques de $\mathcal{F} - \{\mathcal{G}\}$ est

$$(\lambda a + a_1)x^2 + 2(\lambda b'' + b_1'')xy + (\lambda a' + a_1')y^2 + 2(\lambda b + b_1)y = 0.$$

Une des coniques du faisceau contient la tangente commune Ox; elle correspond à $\lambda = -\frac{a_1}{a}$; elle est composée de Ox et de la droite Δ d'équation

$$2\left(-\frac{a_1}{a}b'' + b_1''\right)x + \left(-\frac{a_1}{a}a' + a_1'\right)y + 2\left(-\frac{a_1}{a}b + b_1\right) = 0.$$

Les coniques $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ sont osculatrices en O si, et seulement si, trois des points fixes du faisceau $\mathcal{F}$ sont confondus en O (cf. n° 237), c'est-à-dire si la droite Δ passe par O ce qui se traduit par : $\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}$.

Le théorème résulte de la comparaison des résultats obtenus en *a*) et *b*).

257. ***Courbes remarquables d'un faisceau ponctuel de coniques.*** — 1° **Hyperbole équilatère d'un faisceau.** — Une conique est dite hyperbole équilatère quand ses directions asymptotiques sont orthogonales ou encore quand ses points à l'infini sont conjugués harmoniques par rapport aux points cycliques (couple de l'involution de points doubles I et J).

Étant donné le faisceau ponctuel de coniques $\mathcal{F}$, trois cas sont possibles :

a) *$\mathcal{F}$ n'a aucun point fixe à l'infini.* Une conique de $\mathcal{F}$ est une hyperbole équilatère si, et seulement si, ses points à l'infini constituent un couple commun à l'involution de points doubles I et J et à l'involution de Desargues (239) relative à la droite à l'infini.

En général les deux involutions sont distinctes; elles admettent (89, 6°) un, et un seul, couple commun; le faisceau $\mathcal{F}$ contient une, et une seule, hyperbole équilatère. Si, exceptionnellement, les deux involutions sont confondues, toutes les coniques du faisceau sont des hyperboles équilatères.

b) *$\mathcal{F}$ a un point fixe à l'infini* A. Ce point est distinct de I ou J. (Si I était point fixe de $\mathcal{F}$, J le serait aussi, et $\mathcal{F}$ aurait deux points fixes à l'infini.) Le

faisceau contient une, et une seule hyperbole équilatère : les points à l'infini en sont A et le conjugué harmonique de A par rapport à I et J.

c) *ℱ a deux points fixes à l'infini.* Selon que ces points sont conjugués harmoniques par rapport à I et J, ou ne le sont pas, ℱ contient exclusivement des hyperboles équilatères ou n'en contient aucune.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **En général un faisceau de coniques contient une, et une seule, hyperbole équilatère. Exceptionnellement il peut se faire que le faisceau contienne exclusivement des hyperboles équilatères ou encore qu'il ne contienne aucune hyperbole équilatère.**

REMARQUE. — Soit ℱ un faisceau de coniques dont les points fixes A, B, C, D sont à distance finie. D'après *a*), ℱ est composé exclusivement d'hyperboles équilatères si, et seulement si, il contient au moins deux hyperboles équilatères et par suite si, et seulement si, deux des coniques dégénérées sont des hyperboles équilatères ou encore si, et seulement si, les points fixes constituent un quadrangle orthocentrique (chacun des points A, B, C, D est l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres).

2° **Cercle d'un faisceau.** — Un cercle est une conique propre qui passe par les points cycliques (la conique dégénérée formée de ∞_{Π} et d'une droite à distance finie n'est pas considérée comme un cercle).

Étant donné un faisceau ponctuel de coniques, ℱ, trois cas sont à envisager :

a) *ℱ a deux points fixes à l'infini.* Selon que ces points sont I et J, ou ne le sont pas, ℱ contient exclusivement des cercles ou n'en contient aucun.

b) *ℱ a un point fixe à l'infini.* Ce point, A, est distinct de I ou J (cf 1°, *b*). Le faisceau ne contient aucun cercle.

c) *ℱ n'a aucun point fixe à l'infini.* Pour que le faisceau contienne un cercle, il faut et il suffit que (I, J) soit un couple de points homologues dans l'involution de Desargues relative à ∞_{Π}, c'est-à-dire que les points invariants, α et β, de cette involution soient conjugués harmoniques par rapport à I et J ou encore que, O désignant un point réel à distance finie, les droites O α et O β soient orthogonales.

Si cette condition est remplie, les directions asymptotiques OU et OV de la conique générique du faisceau admettent pour bissectrices les droites fixes O α et O β, qui sont ainsi directions principales pour toute conique du faisceau, et en particulier pour les coniques de base.

Inversement soit ℱ un faisceau ponctuel de coniques qui n'a aucun point fixe à l'infini, tel que deux coniques de ℱ ont des directions principales communes O α et O β (O α et O β sont orthogonales). L'involution de Desargues ℑ relative à ∞_{Π} a deux couples communs avec l'involution déterminée sur ∞_{Π} par la donnée des points invariants α et β; les deux involutions coïncident; (I, J) est donc un couple de points homologues dans ℑ; le faisceau ℱ contient un, et un seul, cercle.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Un faisceau ponctuel de coniques qui contient deux cercles est exclusivement formé de cercles; un faisceau ponctuel de coniques contient un, et un seul, cercle si, et seulement si, deux coniques du faisceau ont deux directions principales communes, sans avoir les mêmes directions asymptotiques.**

Observons qu'en général un faisceau ponctuel de coniques ne contient pas de cercle.

APPLICATIONS I. — Les quatre points d'intersection de deux paraboles sont sur un même cercle si, et seulement si, les axes des paraboles sont perpendiculaires.

II. Quatre points A, B, C, D d'une conique sont sur un même cercle si, et seulement si, les bissectrices de l'angle des droites AB et CD sont parallèles aux directions principales de la conique.

III. Le cercle osculateur en un point M d'une conique recoupe la conique en un point M′ tel que la droite MM′ est symétrique en direction de la tangente en M par rapport aux directions principales de la conique.

Soit, par exemple, à former l'équation du cercle osculateur C à l'ellipse Γ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ au point M ($x=a\cos u$, $y=b\sin u$). La tangente en M à Γ a pour équation : $bx\cos u+ay\sin u-ab=0$. La sécante MM′ a donc une équation de la forme :

$$bx\cos u-ay\sin u+h=0 \qquad (h=-ab\cos 2u).$$

Le cercle C appartient au faisceau d'équation générale

$$\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+(bx\cos u+ay\sin u-ab)(bx\cos u-ay\sin u+h)=0.$$

En écrivant que les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux, nous obtenons la valeur du paramètre λ qui correspond au cercle osculateur C.

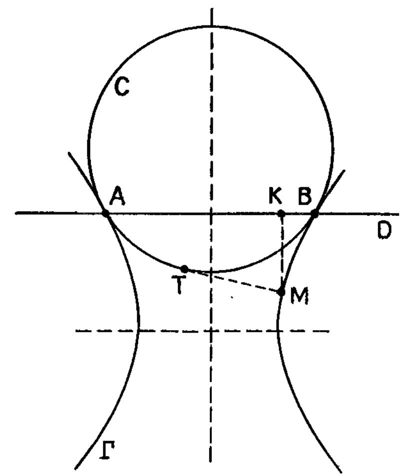


FIG. 106.

IV. Pour qu'il existe un cercle bitangent à une conique donnée Γ en deux de ses points donnés A et B (situés à distance finie) il faut et il suffit que la conique dégénérée formée par la droite double AB admette les mêmes directions principales que Γ, c'est-à-dire que la droite AB soit parallèle à une direction principale de Γ; il en résulte qu'un cercle bitangent à une conique est nécessairement centré sur un axe de symétrie de la conique.

Extension de la notion de foyer d'une conique. — Soit un cercle C bitangent à une conique Γ en deux points A et B et soit

D la droite AB. Désignons par $f(x, y) = 0$ et $p(x, y) = 0$ des équations normales de C et D, dans un repère orthonormé. Il existe une constante k telle que

$$f(x, y) - kp^2(x, y) = 0$$

est une équation de Γ dans le repère considéré.

En désignant par C (M) la puissance du point générique du plan par rapport à C et par MK la distance de M à D nous avons :

$$(1) \qquad M \in \Gamma \iff C(M) = kMK^2.$$

Si M est extérieur à Γ, nous avons : $C(M) = MT^2$, T étant le point de contact d'une tangente issue de P, et

$$(2) \qquad M \in \Gamma \iff \frac{MT}{MK} = \sqrt{k},$$

ce qui généralise la définition d'une conique par foyer et directrice (fig. 106).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier, à titre d'exercice, que la constante k ne change pas quend on remplace C par un autre cercle bitangent centré sur le même axe de symétrie de Γ, en particulier par un cercle-point centré en un foyer.

EXERCICES

Dans tous les exercices de ce chapitre on fera choix d'un repère orthonormé.

1. — Former une équation réduite de chacune des coniques représentées dans un repère orthonormé donné par les équations

$$2x^2 + 3xy + y^2 - 4x - 5y = 0; \qquad 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0;$$
$$xy + 3x + 5y - 4 = 0; \qquad (2x + 3y)^2 + 4x - 5y + 7 = 0;$$
$$(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 7 = 0; \qquad (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 - 2\,ay = 0;$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - e^2(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 = 0$$

et écrire dans chaque cas les formules de changement de repère.

2. — Montrer que les équations

$$(ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad (ax + a'y)^2 + (bx + b'y)^2 - 1 = 0$$

représentent, dans un même repère orthonormé, des coniques égales.

3. — Soit P un polynôme du troisième degré à une indéterminée. Calculer l'excentricité de la conique d'équation :

$$\frac{P(x) - P(y)}{x - y} = 0$$

4. — Déterminer les foyers de l'ellipse

$$x = a \cos t + b \sin t, \qquad y = c \cos t + d \sin t$$

5. — Déterminer le foyer et le sommet de la parabole

$$x = at^2 + bt + c, \qquad y = a't^2 + b't + c'.$$

6. — Déterminer les foyers et les directrices de l'hyperbole équilatère :

$$xy + 2\,ay - a^2 = 0.$$

7. — Lieu du sommet d'une parabole variable dont on donne le foyer et une normale.

8. — Lieu du centre d'une hyperbole équilatère variable dont on donne un foyer et un point.

9. — Lieu des sommets d'une hyperbole équilatère variable dont on donne un point et une directrice. Enveloppe de l'hyperbole.

10. — On donne deux points O et A, ainsi qu'une droite Δ qui passe par A. Une conique variable Γ, de foyer O, est tangente en A à D.

a) Quelle est l'enveloppe de Γ?

b) Montrer que l'une des directrices réelles de Γ passe par un point fixe et que l'autre enveloppe une parabole.

11. — Deux points P et Q se déplacent sur une ellipse E de foyer F de telle sorte que FP + FQ reste fixe. Trouver le lieu du milieu M du segment PQ. Montrer que l'enveloppe de la droite PQ est une conique Γ. Trouver les points communs et les tangentes communes à E et à Γ.

12. — On donne un cercle fixe Γ et une famille de coniques homofocales C. Trouver le lieu des points communs aux tangentes communes à C et Γ.

13. — Enveloppe des paraboles tangentes à Ox et Oy, dont le foyer décrit

a) une droite donnée;

b) un cercle donné, de centre O;

c) un cercle donné, lui-même tangent à Ox et Oy.

14. — Le lieu du foyer d'une parabole passant par deux points donnés et tangente en l'un de ces points à une droite donnée est une cissoïde.

15. — Lieu des foyers d'une conique Γ tangente aux quatre côtés d'un rectangle. Enveloppe des droites joignant les points de contact de Γ et de deux des côtés du rectangle.

16. — On donne une sphère S de centre O et un plan P qui passe par O, ainsi qu'un point F de P. Montrer que l'enveloppe des plans qui coupent S suivant des cercles dont les projections sur P ont pour foyer F est l'ensemble d'un cône et d'un cylindre.

17. — Le point A est fixe; le point B décrit un cercle fixe C, de centre O. Lieu des foyers de l'ellipse E dont OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués.

18. — Lieu des foyers et des sommets de l'ellipse E_θ d'équation

$$x^2 \sin^2 \theta - xy \sin 2\theta + y^2(1 + \cos^2 \theta) = a^2 \sin^2 \theta.$$

19. — On donne un repère orthonormé Ox, Oy, un point A $(a, 0)$ et un point B$(0, b)$.

a) Enveloppe des axes des coniques Γ tangentes en A à Ox, en B à Oy.

b) En supposant $a = b$, trouver le lieu des sommets de Γ, et celui des foyers de Γ.

20. — L'enveloppe des axes des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle rectangle isocèle est une hypocycloïde à trois rebroussements (solution analytique et solution géométrique).

21. — On donne un cercle C et un point A de C; soit Γ une parabole quelconque osculatrice en A à C.

a) Lieu du foyer de Γ.

b) Enveloppe de l'axe de Γ (on trouve une hypocycloïde à trois rebroussements; solution analytique et solution géométrique).

22. — On donne un cercle C et un point A de C; soit Γ une hyperbole équilatère quelconque osculatrice en A à C. Démontrer que l'enveloppe des axes de Γ, et celle des asymptotes de Γ sont des hypocycloïdes à trois rebroussements.

23. — Quel est le lieu des foyers des coniques osculatrices en O au cercle de diamètre OA, et qui passent par A?

24. — Une parabole variable P passe par les foyers F, F′ d'une ellipse E et son foyer décrit E. Trouver le lieu du pôle de la droite FF′ par rapport à P.

25. — Deux coniques ont un foyer commun F. L'une est fixe, l'autre varie en gardant une grandeur fixe. Trouver le lieu du point d'intersection des tangentes communes (non isotropes) aux deux coniques.

26. — Dans un repère orthonormé, on donne la parabole P d'équations : $z = 0$, $y^2 - 2px = 0$. Déterminer le lieu Γ des points F de l'espace tels que la longueur MF soit un polynôme par rapport aux coordonnées (x, y) d'un point M qui décrit P. Démontrer qu'à tout point F de Γ on peut associer un plan Π tel que le rapport des distances, à F et Π, d'un point M (qui décrit P) soit constant.

Reprendre le même problème en remplaçant P par une conique à centre.

27. — Lieu du centre d'une hyperbole équilatère de grandeur constante qui admet en un point donné une tangente donnée.

28. — Enveloppe de la droite qui joint les points de contact d'une parabole fixe et d'une hyperbole équilatère variable, de grandeur constante, bitangente à la parabole (on vérifiera que la courbe trouvée est une développante d'astroïde).

29. — Une hyperbole variable H est bitangente à une ellipse donnée E et admet pour asymptote un axe de E.

a) Démontrer, en utilisant le théorème de Desargues, que la droite qui joint les points de contact de E et H passe par le centre de E.

b) Trouver le lieu des foyers de H.

30. — *a*) Montrer que l'enveloppe des polaires d'un point fixe par rapport aux cercles bitangents à une conique à centre est formée de deux paraboles.

b) En utilisant une transformation par polaires réciproques, en déduire le lieu du second foyer d'une conique variable Γ qui admet un premier foyer fixe et reste bitangente à une conique fixe.

31. — On donne une hyperbole H de foyer réel F, d'axe non transverse Δ. Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées par F aux cercles bitangents à H et centrés sur Δ.

32. — Lieu du centre d'une hyperbole équilatère variable qui est osculatrice à une parabole donnée et a une asymptote parallèle à l'axe de la parabole.

33. — Une hyperbole équilatère H varie en passant par un point fixe A et en restant bitangente à un cercle fixe C, en des points P et Q. Trouver l'enveloppe de la droite PQ, le lieu du centre de H, l'enveloppe des asymptotes de H.

34. — On donne une ellipse E; par les extrémités de deux diamètres conjugués de E il passe une hyperbole équilatère H. Lieu des sommets de H pour tous les couples de diamètres conjugués de E.

35. — On donne un triangle OAB; soit Γ une conique propre tangente en A à OA, en B à OB. Démontrer que le rapport des rayons de courbure en A et B à Γ est indépendant de Γ.

36. — Soient MT et MN la tangente et la normale en un point M d'une conique à centre Γ. D'un point variable T de MT on abaisse la perpendiculaire Δ sur la polaire de T. Démontrer que Δ enveloppe une parabole tangente à MT et MN en des points qu'on précisera.

T et T' sont deux points de MT dont les polaires sont symétriques par rapport à MN; les droites Δ, Δ' associées rencontrent MN en R et R'; étudier les déplacements simultanés de ces points quand T et T' varient. Examiner le cas où T est sur une des directrices de Γ et en déduire une construction géométrique du centre de courbure en un point d'une conique.

Que deviennent les résultats précédents si Γ est une parabole?

37. — Soit E une ellipse donnée et C un cercle variable passant par les foyers réels de E.

a) Trouver le lieu des points de contact avec C des tangentes communes à E et C.

b) Trouver l'enveloppe des cordes communes à C et E.

38. — On donne un cercle Γ de centre O et un point A de ce cercle. Étudier les hyperboles équilatères passant par A et qui recoupent Γ aux sommets d'un triangle équilatéral.

39. — On donne un repère orthonormé et le point A $(a, 0)$. On appelle H toute hyperbole équilatère passant par A et coupant Oy en deux points symétriques par rapport à O.

Démontrer qu'il existe une infinité de couples (M, M′) conjugués par rapport à toutes les coniques H; quel est le lieu Γ de ces points? Quel est le lieu du milieu ω de MM′? Démontrer que Γ est le lieu des centres des hyperboles H décomposées.

Il existe une conique de foyers M et M′ tangente en O à Ox; déterminer ses asymptotes ainsi que l'enveloppe de ses axes.

40. — Démontrer, de deux manières, que l'orthocentre d'un triangle $\mathcal{T}$ formé par trois tangentes à une parabole Γ est situé sur la directrice de Γ :

a) on utilisera une transformation par polaires réciproques, la conique directrice étant le cercle par rapport auquel $\mathcal{T}$ est autopolaire;

b) on utilisera le théorème de Brianchon qui a fait l'objet de l'exercice n° 32, p. 501; (à partir des sommets A, B, C de $\mathcal{T}$ on définit Γ en se donnant la tangente perpendiculaire à BC et en cherchant la tangente parallèle à CA).

41. — Montrer que le cercle circonscrit à un triangle autopolaire par rapport à une ellipse E est orthogonal au cercle orthoptique de E.

42. — *Normales menées d'un point donné à une conique à centre.* — On donne

$$\Gamma)\ \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad P(\alpha, \beta).$$

Montrer que (dans le plan complexifié) les points d'incidence des normales à Γ qui passent par P s'obtiennent en coupant Γ par la courbe d'équation

$$c^2xy + B\beta x - A\alpha y = 0 \qquad (c^2 = A - B),$$

qui est dite hyperbole d'Apollonius relative au point P.

Utiliser cette étude pour résoudre les problèmes suivants :

a) Par les points d'incidence des quatre normales à Γ issues du point générique M du plan passent deux paraboles dont les axes ont des directions indépendantes de M, soit M′ le point d'intersection de ces axes. Étudier l'application $M' = f(M)$.

b) Par le point générique M du plan, on mène à Γ deux tangentes dont les points de contact sont désignés par A et B. Les normales à Γ en A et B se coupent en P et, par ce point, on peut mener deux autres normales à Γ, dont les points d'incidence sont désignés par A_1 et B_1. Les tangentes à Γ en A_1 et B_1 se coupent en M_1. Étudier l'application $M_1 = g(M)$.

c) Pour qu'il existe un point ayant même hyperbole d'Apollonius par rapport à deux coniques, il faut et il suffit qu'il existe un cercle dans le faisceau linéaire ponctuel qui a pour bases les deux coniques. Lorsque cette condition est remplie le point est le centre de ce cercle et l'hyperbole d'Apollonius est le lieu des centres des coniques du faisceau.

d) Soit $\mathcal{T}$ un triangle inscrit dans une ellipse donnée E, le centre de gravité de $\mathcal{T}$ étant le centre de E. Montrer que les normales à E aux sommets de $\mathcal{T}$ concourent en un point P et trouver le lieu de P quand $\mathcal{T}$ varie.

43. — *Normales menées d'un point donné à une parabole.* — On donne

$$\Gamma)\ y^2 - 2px = 0 \qquad \text{et} \qquad P(\alpha, \beta).$$

Montrer que (dans le plan complexifié) les points d'incidence des normales à Γ qui passent par P sont les points d'intersection, à distance finie, de Γ et de la courbe d'équation

$$(x - \alpha)\, y + p\,(y - \beta) = 0$$

qui est dite hyperbole d'Apollonius relative au point P. Montrer que, quel que soit P, les trois points d'incidence et le sommet de la parabole sont sur un même cercle.

Résoudre les problèmes suivants :

a) Un point P décrit la normale à une parabole donnée Γ en un point donné M. Soient M′ et M″ les points d'incidence des deux autres normales à Γ menées par P; on désigne par C′ et C″ les centres de courbure à Γ en M′ et M″. Trouver le lieu du milieu du segment M′M″ et l'enveloppe de la droite C′C″.

b) Trouver le lieu du centre d'un triangle équilatéral dont les côtés sont normaux à une parabole donnée.

CHAPITRE XX

ÉQUATIONS RÉDUITES DES QUADRIQUES

258. ***Les quadriques d'un espace projectif.*** — Soit $\mathcal{P}$ un espace projectif de dimension 3, issu d'un espace vectoriel $\vec{E}$, de dimension 4, sur le corps des complexes.

1° DÉFINITION. — **On appelle quadrique de $\mathcal{P}$, attachée à la forme quadratique non nulle Φ, sur $\vec{E}$, l'ensemble Σ des points M de l'espace projectif $\mathcal{P}$ tels que, $\vec{M}$ étant un représentant homogène de M dans $\vec{E}$,**

$$\Phi\left(\vec{M}\right) = 0.$$

La quadrique Σ ne change pas quand on remplace la forme quadratique Φ par la forme $k\,\Phi$, $(k \in C^{*})$.

En reprenant l'étude faite au n° 217, on constate que, $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère $\mathcal{R}$ arbitrairement choisi,

$$M \in \Sigma \iff \tilde{\mathcal{M}}\, A\, \mathcal{M} = [0],$$

avec $$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{bmatrix}$$

Autrement dit : $M \in \Sigma \iff F(X, Y, Z, T) = 0$,
avec

$$F(X, Y, Z, T) \doteq aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + 2\,bYZ + 2\,b'ZX + 2\,b''XY + 2\,cXT + 2\,c'YT + 2\,c''ZT + dT^2.$$

Il existe des repères privilégiés dans lesquels

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F(X, Y, Z, T) = aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + dT^2.$$

2° Classification projective par les points doubles. — DÉFINITION. **Un point M_0 de $\mathfrak{P}$ est dit point double de la quadrique Σ, attachée à la forme quadratique Φ, si un représentant homogène $\vec{M_0}$ de M_0 appartient au noyau $\vec{S}$ de Φ.**

Les points doubles de Σ sont donnés par le système

$$\begin{cases} F'_X = 0 \\ F'_Y = 0 \\ F'_Z = 0 \\ F'_T = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} aX + b''Y + b'Z + cT = 0 \\ b''X + a'Y + bZ + c'T = 0 \\ b'X + bY + a''Z + c''T = 0 \\ cX + c'Y + c''Z + dT = 0 \end{cases}$$

La discussion fait intervenir le rang r de la forme quadratique Φ, qui est aussi celui de la matrice A; on obtient les résultats suivants (cf. n° 219).

I. $r = 4$: Σ n'a pas de point double; elle est dite *quadrique propre* (ou *non dégénérée*).

II. $r = 3$: Σ a un point double unique Ω. Σ est un *cône de sommet* Ω. En effet si M est un point quelconque de Σ on a, quel que soit λ,

$$\Phi\left(\vec{\Omega} + \lambda\vec{M}\right) = \lambda^2\Phi\left(\vec{M}\right) + 2\lambda\varphi\left(\vec{\Omega}, \vec{M}\right) + \Phi\left(\vec{\Omega}\right).$$

Ω étant point double de Σ, $\vec{\Omega}$ est un vecteur du noyau de Φ et :

$$\varphi\left(\vec{\Omega}, \vec{M}\right) = 0, \qquad \Phi\left(\vec{\Omega}\right) = 0;$$

M étant un point de Σ : $\qquad \Phi\left(\vec{M}\right) = 0.$

On en déduit : $\Phi\left(\vec{\Omega} + \lambda\vec{M}\right) = 0$, ce qui prouve que tout point de la droite ΩM appartient à Σ.

III. $r = 2$: Φ est le produit de deux formes linéaires indépendantes; Σ est formée de *deux plans distincts*; la droite commune à ces deux plans est le lieu des points doubles de Σ.

IV. $r = 1$: Φ est le carré d'une forme linéaire non nulle; Σ est un *plan double*; tout point de Σ est un point double.

3° Section plane. — Soit $\mathfrak{Q}$ un plan projectif, sous-espace projectif de $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{Q}$ est issu d'un sous-espace vectoriel $\vec{E'}$, de dimension 3, de l'espace vectoriel $\vec{E}$.

L'intersection de $\mathfrak{Q}$ et de la quadrique Σ attachée à Φ, forme quadratique sur $\vec{E}$, est l'ensemble Γ des points M de $\mathfrak{P}$ dont un représentant homogène vérifie simultanément

$$\vec{M} \in \vec{E'} \qquad \text{et} \qquad \Phi\left(\vec{M}\right) = 0.$$

La restriction $\widehat{\Phi}$ de Φ à $\vec{E'}$ est une application de $\vec{E'}$ dans C qui vérifie les axiomes de la forme quadratique; Γ est donc en général la conique de $\mathfrak{Q}$ qui est attachée à la forme quadratique $\widehat{\Phi}$, sur $\vec{E'}$. Si, exceptionnellement, $\widehat{\Phi}$ est la forme nulle de $\vec{E'}$, on a $\Gamma = \mathfrak{Q}$: c'est qu'alors tout point M de $\mathfrak{Q}$ vérifie $\Phi\left(\vec{M}\right) = 0$, ou encore que $\mathfrak{Q}$ fait partie de Σ qui est alors dégénérée et formée de deux plans dont l'un, au moins, est $\mathfrak{Q}$.

4° **Intersection d'une droite et d'une quadrique.** — En reprenant la démonstration faite au n° 223, on obtient :

THÉORÈME. — **Dans un espace projectif complexe, toute quadrique Σ, propre ou dégénérée, est coupée en deux points, éventuellement confondus, par toute droite D qui ne fait pas partie de Σ.**

THÉORÈME. — **Toute droite D qui passe par un point double M_0 d'une quadrique dégénérée Σ, ne contenant pas D, coupe Σ en deux points confondus avec M_0.**

259. *Réduction de l'équation d'une quadrique.* — 1° **Directions principales.** — En raisonnant comme au n° 251, on démontre :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si une quadrique Σ de l'espace euclidien est représentée dans un repère orthonormé par l'équation non homogène**

$$\left(\text{dét } [xyz]\, \mathrm{B} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + 2\,cx + 2\,c'y + 2\,c''z + d = 0, \quad \textbf{avec} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix}$$

les directions propres de la matrice B sont indépendantes du choix du repère et de celui de l'équation; on les appelle directions principales de la quadrique Σ.

Dans le repère considéré, les directions principales sont fournies par les systèmes

$$\Sigma(s_k) \begin{cases} (a - s_k)x + b''y + b'z = 0 \\ b''x + (a' - s_k)y + bz = 0 \\ b'x + by + (a'' - s_k)z = 0 \end{cases}$$

dans lesquels les s_k, ($k = 1, 2, 3$), sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a - s & b'' & b' \\ b'' & a' - s & b \\ b' & b & a'' - s \end{vmatrix}$$

Rappelons (44 à 46) que, la matrice B étant symétrique réelle, $\Delta(s)$ a trois zéros réels distincts ou confondus; deux vecteurs propres associés à deux zéros distincts de $\Delta(s)$ sont orthogonaux; il existe au moins un repère orthonormé $\{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dont les directions d'axes sont les directions propres de B, c'est-à-dire sont des directions principales de Σ.

2° **Réduction de l'équation.** — Nous considérons la quadrique Σ de l'espace euclidien, initialement représentée dans un repère orthonormé quelconque $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ par l'équation $f(x, y, z) = 0$. Il existe au moins (1°) un repère orthonormé $\{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dont les directions d'axes sont des directions principales de Σ. Dans un tel repère, la quadrique a une équation de la forme

$$(1) \qquad s_1x'^2 + s_2y'^2 + s_3z'^2 + 2\,c_1x + 2\,c_1'y + 2\,c_1''z + d_1 = 0.$$

Pour achever la discussion, nous distinguerons trois cas, suivant que la matrice B admet zéro, une ou deux valeurs propres nulles.

1er CAS : $s_1 s_2 s_3 \neq 0$.

L'équation (1) s'écrit, en *complétant les carrés,*

$$s_1\left(x' + \frac{c_1}{s_1}\right)^2 + s_2\left(y' + \frac{c_1'}{s_2}\right)^2 + s_3\left(z' + \frac{c_1''}{s_3}\right)^2 + d_2 = 0,$$

ce qui nous conduit à introduire le repère $\left\{ \omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right\}$ tel que

$$\overrightarrow{O\omega} = -\frac{c_1}{s_1}\vec{u} - \frac{c_1'}{s_2}\vec{v} - \frac{c_1''}{s_3}\vec{w}.$$

Dans ce repère, Σ a pour équation

$$s_1 \xi^2 + s_2 \eta^2 + s_3 \zeta^2 + d_2 = 0. \tag{2}$$

Des trois nombres réels non nuls s_1, s_2, s_3, deux au moins ont le même signe; nous supposons : $\operatorname{sgn} s_1 = \operatorname{sgn} s_2$, ce qui permet de remplacer l'équation (2) par

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \varepsilon\frac{\zeta^2}{c^2} + \varepsilon_1 = 0 \qquad \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ ou } -1 \\ \varepsilon_1 = +1 \text{ ou } -1 \text{ ou } 0. \end{cases} \tag{3}$$

Comme nous l'avons fait au nº 216, nous pouvons considérer Σ comme l'homologue, dans l'affinité orthogonale de plan double $\xi\omega\zeta$ et de rapport $\frac{a}{b}$, de la quadrique Σ' qui a pour équation, dans le repère orthonormé $\left\{ \omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right\}$

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} + \varepsilon\frac{\zeta^2}{c^2} + \varepsilon_1 = 0. \tag{4}$$

Σ' est la quadrique de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe des ζ, de la conique Γ' d'équations :

$$\eta = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \varepsilon\frac{\zeta^2}{c^2} + \varepsilon_1 = 0.$$

Suivant les valeurs de ε et ε_1, nous distinguons les six types suivants :

ÉQUATION RÉDUITE :	NATURE DE LA CONIQUE Γ' :	LA QUADRIQUE Σ EST APPELÉE :
I. $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} + 1 = 0$	ellipse imaginaire	ellipsoïde imaginaire
II. $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = 0$	ellipse réelle	ellipsoïde réel
III. $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} + 1 = 0$	hyperbole	hyperboloïde à deux nappes
IV. $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = 0$	hyperbole	hyperboloïde à une nappe
V. $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 0$	deux droites imaginaires conjuguées	cône imaginaire
VI. $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0$	deux droites réelles	cône réel

Dans tous les cas, ω est centre de symétrie, les plans (resp. axes) de coordonnées du repère $\{\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ sont plans (resp. axes) de symétrie pour Σ.

Le cas de l'hyperboloïde à deux (resp. une) nappe se reconnaît à ce que la quadrique de révolution Σ', affine de Σ, est engendrée par la rotation d'une hyperbole autour de son axe transverse (resp. non transverse).

Pour avoir une idée de la forme des quadriques des types (II), (III) et (IV) le lecteur se reportera au n° **216**.

Naturellement si $s_1 = s_2$, Σ est une quadrique de révolution; si $s_1 = s_2 = s_3$, Σ est une sphère (éventuellement imaginaire ou dégénérée).

2e CAS : $s_1 s_2 \neq 0$, $s_3 = 0$.

L'équation (1) s'écrit, en *complétant les carrés*,

$$s_1\left(x' + \frac{c_1}{s_1}\right)^2 + s_2\left(y' + \frac{c_1'}{s_2}\right)^2 + 2\,c_1'' z' + d_2 = 0$$

ce qui nous conduit à introduire le repère $\{O'', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ tel que

$$\overrightarrow{OO''} = -\frac{c_1}{s_1}\vec{u} - \frac{c_1'}{s_2}\vec{v}.$$

Dans ce repère, Σ a pour équation

(5) $$s_1 x''^2 + s_2 y''^2 + 2\,c_1'' z'' + d_2 = 0.$$

Ce second cas se subdivise en deux :

a) $c_1'' \neq 0$. — En posant $\overrightarrow{O''S} = -\frac{d_2}{2\,c_1''}\vec{w}$, nous déterminons un repère orthonormé $\{S, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dans lequel, suivant que $s_1 s_2 > 0$ ou $s_1 s_2 < 0$, Σ a pour équations

(VII) $$\frac{\xi^2}{p} + \frac{\eta^2}{q} - 2\,\zeta = 0 \qquad (p > 0, q > 0)$$

ou

(VIII) $$\frac{\xi^2}{p} - \frac{\eta^2}{q} - 2\,\zeta = 0 \qquad (p > 0, q > 0).$$

La quadrique représentée par l'équation VII se déduit par une affinité orthogonale du paraboloïde de révolution Σ' d'équation : $\xi^2 + \eta^2 - 2\,p\zeta = 0$; on l'appelle *paraboloïde elliptique* (**216**).

La quadrique représentée par l'équation VIII se déduit par une affinité orthogonale de celle qui a été étudiée au n° **214** (fig. 73) et qui a pour équation

$$\xi^2 - \eta^2 - 2\,p\,\zeta = 0;$$

on l'appelle *paraboloïde hyperbolique*.

b) $c_1'' = 0$. — L'équation (5), dans laquelle ne figure pas z'', représente soit un cylindre dont les génératrices sont parallèles au vecteur $\vec{w}$, soit l'ensemble de deux plans parallèles à ce vecteur. Les diverses formes possibles de cette équation (5) sont (en notant ξ et η au lieu de x'' et y'') :

IX.	$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+1=0$	cylindre elliptique imaginaire
X.	$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1=0$	cylindre elliptique réel
XI.	$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-1=0$	cylindre hyperbolique
XII.	$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=0$	deux plans imaginaires conjugués non parallèles
XIII.	$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=0$	deux plans réels non parallèles.

3e CAS : $s_1 = s_2 = 0, \qquad s_3 \neq 0.$

L'équation (2) s'écrit, en *complétant le carré*,

$$s_3\left(z' + \frac{c_1''}{s_3}\right)^2 + 2\,c_1 x + 2\,c_1' y + d_2 = 0,$$

ce qui nous conduit à introduire le repère orthonormé $\{ O'', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ tel que

$$\overrightarrow{OO''} = -\frac{c_1''}{s_3}\vec{w}.$$

Dans ce repère, Σ a pour équation

(6) $$s_3 z''^2 + 2\,c_1 x'' + 2\,c_1' y'' + d_2 = 0.$$

Ce troisième cas se subdivise, lui aussi, en deux.

a) Si c_1 et c_1' ne sont pas nuls tous les deux, désignons par $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ des vecteurs unitaires des droites orthogonales

$$\begin{cases} z'' = 0 \\ c_1 x'' + c_1' y'' = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z'' = 0 \\ c_1' x'' - c_1 y'' = 0. \end{cases}$$

Dans le repère $\{ O'', \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w} \}$, Σ a une équation de la forme

$$s_3 z'''^2 + 2\,c_2' y''' + d_2 = 0.$$

En posant $\overrightarrow{O''S} = -\frac{d_2}{2\,c_2'}\vec{v}_1$, on se ramène enfin à un repère $\{ S, \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w} \}$ dans lequel Σ a l'équation

(XIV) $$\zeta^2 - 2\,p\eta = 0.$$

Il s'agit d'un *cylindre parabolique* dont les génératrices sont parallèles au vecteur $\vec{u}_1$.

b) Si c_1 et c_1' sont tous deux nuls, l'équation (6) prend l'une des formes

(XV) $\zeta^2 + a^2 = 0$; (XVI) $\zeta^2 - a^2 = 0$; (XVII) $\zeta^2 = 0$

qui représentent respectivement deux plans parallèles imaginaires conjugués, réels et distincts, ou confondus.

3° **Pratique de la réduction de l'équation d'une quadrique centrée à l'origine.** — Soit $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien. Une quadrique Σ est centrée en O si, et seulement si, elle a dans ce repère une équation de la forme

$$H(x, y, z) + d = 0.$$

dans laquelle H désigne un polynôme homogène de degré 2.

Dans l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 constitué par les vecteurs liés

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

considérons la forme quadratique Ψ déterminée par : $\Psi(\overrightarrow{OM}) = H(x, y, z)$.

La quadrique Σ peut être considérée comme le lieu de M tel que :

$$\Psi(\overrightarrow{OM}) + d = 0.$$

D'après l'étude de la réduction d'une forme quadratique réelle dans le groupe orthogonal (46), nous savons déterminer une base orthonormée $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dans laquelle on peut écrire

$$\overrightarrow{OM} = \xi\vec{u} + \eta\vec{v} + \zeta\vec{w} \qquad \text{et} \qquad \Psi(\overrightarrow{OM}) = s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2.$$

Autrement dit, nous disposons d'un repère orthonormé $\{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de l'espace euclidien dans lequel la quadrique Σ a pour équation

$$s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + d = 0.$$

EXEMPLE : Étudier la quadrique Σ dont une équation dans le repère orthonormé $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est :

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy - 1 = 0.$$

En reprenant le calcul fait au n° 46, on est conduit à introduire le repère $\{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ déterminé par :

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \hline \vec{i} & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \vec{j} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \vec{k} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{array}$$

Dans ce repère, Σ a pour équation :

$$6\eta^2 - 5\zeta^2 - 1 = 0.$$

Il en résulte que Σ est un cylindre hyperbolique dont les génératrices sont parallèles au vecteur $\vec{u}$.

EXERCICES

1. — Former une équation réduite de chacune des quadriques représentées dans un repère orthonormé donné par les équations

$$5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 6yz + 2x + 4y - 6z + 1 = 0$$
$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2zx + 4x - 2y - z + 3 = 0$$
$$(x + y)(y - z) + 3x - 5y = 0$$
$$7x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2yz - 4zx + 4xy - 4x + 5y + 4z - 18 = 0$$
$$x^2 - 2y^2 - z^2 - 4yz + 2xz + 2y + 2z + 3 = 0$$
$$x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12yz + 4zx - 6xy + 4x - 2y + z + 4 = 0$$
$$4x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4zx - 4xy + 8x - 4y + 4z + 2 = 0$$

et écrire dans chaque cas les formules de changement de repère.

2. — Montrer que les équations

$$(ax + by + cz)^2 + (a'x + b'y + c'z)^2 + (a''x + b''y + c''z)^2 = 1$$
$$(ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 + (cx + c'y + c''z)^2 = 1$$

représentent, dans un même repère orthonormé, des quadriques égales.

INDEX ALPHABÉTIQUE

(Les chiffres renvoient aux pages)

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
120, boulevard Saint-Germain, Paris VIe
Dépôt légal 1er trimestre 1971.
III

Imprimé en France par Brodard-Taupin
Imprimeur - Relieur, Coulommiers - Paris.
4157/2



73700